លំហាត់ទី២

គេឲ្យ x ចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង មិនមែនជាចំនួនគត់ ហើយគេតាងដោយ $[x]$ ផ្នែកនៃចំនួនគត់។ គេតាងដោយ $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$ ($[x]$ ជាចំនួនគត់ធំជាងគេបំផុត ដែលបំពេញ $[x] \leq x$)។

$a)$ បើ x ជាចំនួនសនិទាន ចូរបង្ហាញថា $f(x)$ តាងដោយ ប្រភាគមិនអាចបម្រួញបាន $(fraction\ irréductible)$ ដែលមានភាគបែង តូចជាដាច់ខាត $(strictement\ plus\ petit)$ ជាង ភាគបែងនៃប្រភាគដំណាង x ។

$b)$ ដោយសន្មតថា x ជាចំនួនសនិទានដដែល ចូរបង្ហាញថា គេមានស្វីតមានដែនកំណត់ $(une\ suite\ finie)$ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ ដែលបំពេញ $x_1 = f(x), x_2 = f(x_1), \ldots,$ $x_{k+1} = f(x_k)\ldots\ldots, x_n = f(x_{n-1})$ ហើយដែល x_n ជាចំនួនគត់។ [គ្រាន់តែបង្ហាញថា ស្វីតនៃ ភាគបែង $(dénominateur)$នៃប្រភាគមិនអាចបម្រួញបាន ដែលជាតួនៃស្វីតនោះ ជាស្វីតចុះជានិច្ច ជាដាច់ខាត$(la\ suite\ des\ dénominateurs\ des\ fractions\ irréductibles$ $réprésentant\ les\ termes\ \ de\ cette\ suite\ \ est\ strictement\ décroissante)$]

$c)$ ដោយទាញយកពីលទ្ធផលខាងលើនេះ ចំនួនសនិទានណាក៏ដោយ អាច តាងដោយ (របៀបតែមួយ) ដោយប្រភាគមានរាង

$$x = y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cdots\cdots \, y_{n-1} + \cfrac{1}{y_n}}}}$$

(គេតាង $y_0 = [x]$ ហើយ $y_k = [x_k]$ ចំពោះ $k \leq n$)

ដោយហេតុនេះ ប្រភាគបែបនេះគេ តាងដោយរូបនិមិត្ត $(y_0, y_1, \ldots\ldots, y_n)$ ។

ចម្លើយ

$a)$ យើងយកប្រភាគ $x = \frac{a}{b}$ ។ ដែលយើងអាចសរសេរ ជា ៖

$a = bq + r_1$ ដោយ $r_1 < b$ => $x = \frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{b}$, $r_1 < b$ ។ដូច្នេះ

$f(x) = \frac{1}{x-[x]} = \frac{1}{q+\frac{r_1}{b} - q} = \frac{1}{\frac{r_1}{b}} = \frac{b}{r_1}$ ។ ដោយ $r_1 < b$ ដូច្នេះ ប្រភាគ $\frac{b}{r_1}$ មានភាគបែង តូចជាងភាគបែងនៃ x ហើយបើសិនជា b មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ នោះគេអាចបម្រួញ $\frac{b}{r_1}$ ឲ្យទៅជា ប្រភាគមិនអាចបម្រួញបាន។ តែបើ b ជាចំនួនបឋម នោះប្រភាគ $\frac{b}{r_1}$ ជាប្រភាគមិនអាចបម្រួញបាន ។

រួមសេចក្តីទៅ យើងបានរូបមន្ត ៖

$x = \frac{a}{b}$, => $f(x) = \frac{1}{x-[x]} = \frac{b}{r_1}$ ដោយ $r_1 < b$ និងជាសំណល់ នៃការចែក a ដោយ b ។ (1)

b) ដោយសន្មតថា x ជាចំនួនសនិទានដដែល ។ ដោយ

$x_1 = f(x) = \frac{1}{x-[x]} = \frac{b}{r_1}$ => $x_2 = f(x_1) = \frac{1}{x_1 - [x_1]} = \frac{r_1}{r_2}$ ដោយ r_2 ជាសំណល់នៃការចែក b ដោយ r_1 ។ ដូច្នេះ $r_2 < r_1$ (នេះដោយប្រើរូបមន្ត (1) ខាងលើ) ។ ហើយបើយើងបន្ត ការគណនា របៀបនេះតទៅទៀត យើងនឹងបានស៊ីត $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n$ ។ ដោយ $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots\ldots > r_{n-1} > r_n$ នោះនៅពេលណាមួយ យើងបាន $r_{n-1} \neq 0$ ហើយ $r_n = 0$ ។ បើយើងមើលឡើងវិញនូវរបៀបគណនានេះ យើងបានសរសេរ ៖

$a = bq + r_1$ ដោយ $r_1 < b$

$b = r_1 q_1 + r_2$ ដោយ $r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 q_2 + r_3$ ដោយ $r_3 < r_2$

……………………………………….

$r_k = r_{k+1}q_{k+1} + r_{k+2}$ ដោយ $r_{K+2} < r_{k+1}$ ។ ដោយសំណល់ r_iចេះតែចុះជានិច្ច នោះយើងអាចថា $r_{k+2} = 0$ ហើយនៅពេលនោះប្រភាគ $\frac{r_k}{r_{k+1}} = q_{k+1}$ ទៅជាចំនួនគត់ ។ ដោយបានចំនួនគត់នេះហើយ ដល់យើងឡើងទៅរហូតដល់ប្រភាគខាងដើមវិញនោះ ក៏ដូចជាយើងបានគណនា ប្រភាគ $\frac{a}{b}$ ដែរ ដែលជាសំណួរ $c)$ នៃលំហាត់នេះ។

$c)$ ដោយទាញយកពីលទ្ធផលខាងលើនេះ ចំនួនសនិទានណាក៏ដោយ អាច តាងដោយ (របៀបតែមួយ) ដោយប្រភាគមានរាង

$$x = y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{\ddots \cdots\cdots y_{n-1} + \cfrac{1}{y_n}}}}$$

(គេតាង $y_0 = [x]$ ហើយ $y_k = [x_k]$ ចំពោះ $k \le n$)

ដើម្បីងាយយល់ រូបមន្ត ដែលយើងត្រូវបង្ហាញនេះ យើងគណនា y_0, y_1 ជាមុនសិន បន្ទាប់មក ដោយ រូបមន្តនេះ រ៉េគារង់ នោះយើងអាចហង្ហាញតាមរ៉េគារង់ ។ យើងបានបានគណនា x នៅសំណួរ $a)$ និង $b)$ ហើយយើងបាន៖

$x = \frac{a}{b}$ => $a = bq + r_1$, $r_1 < b$ => $x = \frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{b}$ ។ ដោយ $r_1 < b$ នោះដើម្បី គណនា $\frac{r_1}{b}$ គេណនា $\frac{b}{r_1}$ វិញ ដើម្បី បានផ្នែកគត់ នៃប្រភាគ ហើយម្យ៉ាងទៀត $\frac{r_1}{b} = \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$ ។ ដោយ $b > r_1$ => $b = r_1q_1 + r_2$, $r_2 < r_1$ => $\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}$ ។

រួមសេចក្តីទៅយើងបាន៖

$[x] = q$ => $y_0 = q$ ហើយ ដោយ $b)$ $x_1 = \frac{b}{r_1}$ => $y_1 = [x_1] = y_1 = [x_1] = q_1$ ។

ដូច្នេះ $x = q + \frac{r_1}{b}$ ទៅជា $x = y_0 + \frac{r_1}{b} = y_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = y_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{r_2}{r_1}}$ ។

ដើម្បីសរសេរ រូបមន្ត រ៉េគារ៉ង់ យើងសង្កេតមើល តួទាំងឡាយចំពោះ $n = 1$ នៅខាងលើ នេះ យើងឃើញថា $y_1 = q_1$ ហើយ q_1 បានដោយ ចែក b និង r_1 ហើយ r_2 ជា សំណល់នៃការចែកនោះ គឺថា $r_2 < r_1$ ដូច្នេះបើយើងធ្វើបន្តទៅទៀត គឺយើងបាន $y_2 + \frac{r_2}{r_3}$ ដោយ $y_2 = q_2$ បានដោយ ចែក r_1 និង r_2 ហើយ r_3 ជាសំណល់នៃការចែក នោះ គឺថា $r_3 < r_2$ ហើយ រូបមន្ត ចំពោះ $n = 2$ ទៅជា ៖

$x = y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{r_3}{r_2}}}$ ដោយ $r_1 > r_2 > r_3$ ………

តែដោយ $\frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$ នោះ គេ គណនា $\frac{r_2}{r_3}$ ជាមុនសិន បន្ទាប់មកបានគេគណនា $\frac{r_3}{r_2}$ ដោយយកចំរាស។ តែដោយ សំណល់ r_i ចុះជានិច្ច នោះដល់ $i = n+1$ សំណល់ $r_{n+1} = 0$ ហើយ q_n ទៅជាចំនួនគត់។ គឺថា

$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}$ ហើយដោយ $r_{n+1} = 0$ នោះ ប្រភាគ $\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n$ ទៅជាចំនួនគត់។ ហើយរូបមន្ត រេគារ៉ង់ ក៏ចប់នៅពេលនោះ ។

ដូច្នេះ $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{y_n} \Rightarrow x = y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{r_3}{r_2}}}$

………..

$\frac{1}{y_{n-1} + \frac{1}{y_n}}$ ។

ដោយរូបមន្តនេះ យើងសង្កេតឃើញថា ប្រភាគ x អាចសម្តែងដោយ ស្វីត $y_0, y_1, y_2,$ ….,y_n ដែលតួនីមួយៗជាចំនួនប្រភាគដែរ ។ តទៅនេះយើងយកឧទាហរណ៍ដោយ យកប្រភាគ $x = \frac{96}{7}$ ។ ដោយយកការកត់ត្រាដដែល យើងបាន ៖

$a = 96$ និង $b = 7$

$a = bq + r_1 \quad (r_1 < b) \Rightarrow x = \frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{b}$ គឺថា $x = \frac{96}{7} = 13 + \frac{5}{7} \Rightarrow q = y_0 = 13$ (1)

$\frac{b}{r_1} = \frac{7}{5} = b = r_1q_1 + r_2 \ (r_2 < r_1) \Rightarrow \frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}$ គឺថា $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} \Rightarrow q_1 = y_1 = 1$ (2)

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow r_1 = r_2q_2 + r_3 \ (r_3 < r_2) \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2}$ គឺថា $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow q_2 = y_2 = 2$ (3)

$\frac{r_2}{r_3} = \frac{2}{1} \Rightarrow r_2 = r_3q_3 + r_4 \ (r_4 < r_3) \Rightarrow \frac{r_2}{r_3} = q_3 + \frac{r_4}{r_3}$ គឺថា $\frac{2}{1} = 2 + \frac{0}{1} \Rightarrow q_3 = y_3 = 2$ (4)

សង្កេត

a)នៅ (4) សំណល់ $r_4 = 0$ ដូច្នេះ $\frac{r_2}{r_3}$ ជាចំនួនគត់ ។ តែចំពោះ (1) (2) (3) ដោយ សំណល់ r_1, r_2, r_3 ខុសពីសូន្យ នោះ $\frac{b}{r_1}$ ឬ $\frac{r_1}{r_2}$ មានផ្នែកគត់ (y_1) ឬ (y_2) បូកនឹង ប្រភាគ $\frac{r_2}{r_1}$ ឬ $\frac{r_3}{r_2}$ ។

b) យើងធ្លាប់ជួប្រភាគ $\frac{p}{q}$ ដោយ p និង q ជាចំនួនគត់ ។ តែបើ q ប្រភាគដែរ នោះយើង គណនា $\frac{p}{q}$ របៀបណា ។ ឧបមា $q = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ នោះយើងសរសេរ ៖

$F = \frac{p}{q} = \frac{p}{a/b} = \frac{p\times\frac{b}{a}}{a/b\times\frac{b}{a}}$ (ដោយគុណ ភាគយក និងភាគបែង ដោយចំនួនតែមួយគឺ $\frac{b}{a}$ ប្រភាគច្រាសនៃ $\frac{a}{b}$) នៅពេលនោះយើងបាន ៖

$F = p \times \frac{b}{a} = \frac{pb}{a}$ ពីព្រោះភាគបែង $a/_b \times \frac{b}{a} = 1$ ។

b) យើងធ្លាប់ដឹងហើយថា នៅក្នុងគ្រុប Z ដែលមាន លេខបូក នោះសូន្យ ជាធាតុ នប៉ុសកលឹង្គ ហើយ ធាតុផ្ទុយ នៃ x គឺ $-x$ ពីព្រោះ $x + (-x) = 0$ ។

ក៏ដូចគ្នាដែរ នៅក្នុង Q ដែលមានលេខ គុណ នោះ មួយ ជាធាតុ

នប៉ុសកលឹង្គ ហើយ ធាតុច្រាស នៃ x ដែលខុសពីសូន្យ គឺ $\frac{1}{x}$ ពីព្រោះ $x \times \frac{1}{x} = 1$ ។

ដូច្នេះ បើ $x = \frac{r_1}{r_2}$ នោះ ច្រាសនៃ x គឺ $\frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$ ។

ឥឡូវយើងត្រឡប់មក លំហាត់វិញ ។ យើងប្រើ លទ្ធផលនៃ (1) (2) (3) (4)

$x = 13 + \frac{5}{7}$

$= 13 + \frac{1}{\frac{7}{5}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{2}{5}}$ ដោយ (2)

$= 13 + \frac{1}{1+\frac{2}{5}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{2}}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ (ដោយ (3))

$= 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{\frac{2}{1}}{}}} = 13 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ (ដោយ (4)) ។

បើសរសេរតាម រូបមន្ត យើងបាន ៖

$$x = y_0 + \frac{1}{y_1+\frac{1}{y_2+\frac{1}{y_3}}}$$ ដោយ $y_0 = 13,\ y_1 = 1, y_2 = 2,\ y_3 = 2$ ។

សង្កេត

ចំពោះប្រភាគ $x = \frac{96}{7}$ បើយើងធ្វើលេខចែកធម្មតា នោះដោយ 7 ជាចំនួនបឋម ហើយដោយ 96 ចែក នឹង 7 មិនដាច់ នោះបានន័យថា មានសំណល់ជានិច្ច។ ហើយដោយសំណល់ត្រូវតែតូចជាង 7 ហើយនៅទីនេះ ខុសពី សូន្យទៀត នោះសំណល់មានតែ 1, 2, 3, 4, 5, 6 តែប៉ុណ្ណោះ ។ ដូច្នេះបើយើងចេះតែបន្តលេខចែកនេះ ហួសពី ៧ ដងបន្ទាប់ពីដាក់កណ្តក់សញ្ញាទៅ នោះយើងនឹងឃើញសំណល់ដដែលនេះម្តងទៀត។ ឧបមាសំណល់ 5 មាននៅលើកទី១ នឹងមានមកលើកទី២ ទៀតជាដើម។ ដូច្នេះបើសំណល់នៅដដែល នោះលទ្ធផលផ្នែកដេស៊ីមាលក៏វានឹងត្រឡប់មកដូចដើមវិញដែរ គឺថា វាមានខួបដោយមួយខួបប្រវែង ៦ លេខដេស៊ីមាល ។ បើយើងធ្វើលេខចែកនោះ យើងនឹងបាន ៖

$x = \frac{96}{7} = 13{,}714285\ 714285\ 714285 \ldots\ldots\ldots$ ។ តែលំហាត់ខាងលើនេះ គេ មិនធ្វើលេខចែក ដេស៊ីមាលទេ ដោយគេ ទុកផ្នែកដេស៊ីមាល ជាប្រភាគទៅវិញ ៕