3.បន្សំ (Combinaisons) – រូបមន្តនៃ ទ្វេធា (*Formule du binôme*).

យើងត្រឡប់មកចំណោទ-ទី២ វិញ ៖ គេឲ្យ សំនុំ E មាន n ធាតុ យើងហៅថា « បន្សំ p ទៅ p នៃ n ធាតុ » គឺ សំនុំនៅក្នុងE ដែលមាន p ធាតុ ។ បន្សំ p ទៅ p នីមួយៗ នៃធាតុនៃE ផ្តល់បាននឹង $p!$ ចំលាស់ p ទៅ p ដែលបានដោយ តម្រៀបដោយគ្រប់ របៀបទាំងអស់ ដែលអាចធ្វើបាន ចំពោះ p ធាតុ ដែលគេបានជ្រើសរើស។ ហើយ បន្សំពីរ ខុសគ្នា ត្រូវតែផ្តល់នឹង ចំលាស់ ខុសគ្នា ពីព្រោះ បន្សំ ជា សំនុំ ដូច្នេះ បន្សំពីរ ខុសគ្នា ក៏ដូចជាថា សំនុំពីរខុសគ្នាដែរ ។ ដូច្នេះ បើគេ តាង C_n^p ជា ចំនួន បន្សំ p ទៅ p នៃ ធាតុរបស់E គេបាន $A_n^p = p!\,C_n^p$ ។ ដូច្នេះ យើងអាច ថ្លែងថា ៖

ការស្មើ (IV,3,1)

ចំនួន បន្សំ (combinaisons) p ទៅ p នៃ n វត្ថុ គឺ ៖

$$C_n^p = {}^{1}\!/_{p!} \times A_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-p+1)}{1.2.3.\quad .p}$$

ចំនួន C_n^p យើងនឹងឃើញ នៅពេលខាងមុខ គេហើថា មេគុណ នៃ ទ្វេធា (*coefficients du binôme*) ។ នៅពេលខ្លះ ក្នុងការសរសេរ គេ ជំនួស C_n^p ដោយ $\binom{n}{p}$ ។

សង្កេត

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$ បង្ហាញ ថា $C_n^{n-p} = C_n^p$ (R1)

ទំនាក់ទំនង (R1) អាចគ្រោងទុកជា មុនបាន ពីព្រោះថា មួយផ្នែកៗ ដែលមាន p ធាតុ នៃ E ផ្តទៅនឹង ផ្នែក រួមបង្គ្រប់ មាន $(n-p)$ ធាតុ (*la partie complémentaire composée de n − p éléments*) នៃ E តែមួយគត់ ។

ដូច្នេះ ការផ្គូផ្គងនេះជា ប៊ីសេចស្យុង ។ ហើយយើងក៏អាចថា C_n^p ជាចំនួន ប៉ាទីស្យុង[1] នៃ E ជា ពីរ សំនុំ ៖ មួយផ្នែក មាន p ធាតុ ហើយមួយផ្នែកទៀតមាន $(n-p)$ ធាតុ ។

ម្យ៉ាងទៀត យើងសង្កេតឃើញថា អត្ថន័យនៃមេគុណ C_n^p នៅតែមានន័យ ចំពោះ $p=0$ និង $p=n$ ថ្វីបើ ក្នុងនិយាយ $p=0$ យក សូន្យវត្ថុ មិនមានន័យទេ។ ចំនួន C_n^0 គឺជា ចំនួន នៃសំនុំ ទទេ (*ensemble vide* $\emptyset$) ដែល គេអាចដកចេញពី E ។ ដោយ សំនុំ ទទេ មានតែមួយ គត់ នោះគេបាន $C_n^0 = 1$ ។ ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង $C_n^p = C_n^{n-p}$ នៅតែ ត្រូវដដែល ចំពោះ $p=0$។ ដើម្បី ឲ្យ រូបមន្ត C_n^p ដែលបាននោះ ត្រូវគ្រប់ ករណី យើង តាំងដោយ សន្មត ជា និយមន័យ ថា $0!=1$ ក៏ដូចជាថា មានរបៀបតែមួយគត់ តម្រៀប សំនុំ ទទេ ។

ការសង្កេតជាចុងក្រោយ តាមនិយមន័យ មេគុណ C_n^p គឺត្រូវតែជា ចំនួនគត់ ធម្មជាតិ (*un entier naturel*) ។ ដូច្នេះ យើងអាចថ្លែងថា៖

<u>ការស្នើ</u> (IV,3,2)

ផលគុណ នៃ p ចំនួនគត់ បន្តគ្នា ចែកដាច់ ជានិច្ច ជាមួយនឹង p! ។

$$\text{ពីព្រោះ } C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)........(n-p+1)}{1.2.3.\quad .p} = \frac{n(n-1)(n-2)........(n-p+1)}{p!} \text{ ។}$$

<u>ឧទាហរណ៍</u> $5\times6\times7\times8\times9\times10 \Rightarrow p=6$ ដូច្នេះ $5\times6\times7\times8\times9\times10$ ចែកនឹង $6!$ ដាច់ តាមការស្នើ (IV,3,2) ខាងលើ ។

<u>រូបមន្ត នៃទ្វេធា (*formule du binôme*)</u>

រូបមន្ត នៃទ្វេភាគ ដែលងាយ និង សំខាន់ ឥឡូវនេះ មានរៀន នៅថ្នាក់ទី ១២ ផ្នែក គណិតសាស្ត្រ។ ដើម្បីនឹងបាន រូបមន្តនេះ យើងគ្រាន់តែ ប្រដូច $(a+b)^n$ ទៅនឹង

---

[1] ប៉ាទីស្យុង នៃ E បានន័យថា ផ្នែកនីមួយៗ ដាច់ៗ ពីគ្នា ហើយផ្នែកទាំងអស់រួមគ្នា បានជាសំនុំ E ឡើងវិញ។

ផល គុណ នៃ n កត្តា $(a+b)$ ៖ ការបំបែកនៃ ផលគុណ នេះ គឺជា ផលបូក នៃ ឯកធាទាំងឡាយ (une somme de monômes) មានទម្រង់ $a^p b^{n-p}$ ហើយគេបាន ឯកធា $a^p b^{n-p}$ នៅពេលណា ដែលគេយក តួ a នៅក្នុង ចំណោម p កត្តា នៃ សំនុំដែលមាន n កត្តា និង យក b នៅក្នុងចំណោម $(n-p)$ កត្តា នៅសល់ពីការបានរើស p កត្តា [2]។ ដូច្នេះ គេបាន ឯកធា $a^p b^{n-p}$ មានចំនួន ច្រើនដង ស្មើនឹង ចំនួន ប៉ាទីស្យុង ជាពីរផ្នែក គឺ ផ្នែកដោយ មួយផ្នែក មាន p កត្តា និង ផ្នែក មួយទៀតជាគូជាមួយ ដែលមាន $(n-p)$ កត្តា ។ ហើយ ដោយ ចំនួន ប៉ាទីស្យុង បែបនេះ មាន C_n^p ដូច្នេះ មេគុណ នៃ ឯកធា $a^p b^{n-p}$ ក៏មាន C_n^p ដែរ ។ ដូច្នេះ យើងបាន រូបមន្ត ៖

$$(1) \qquad \boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p b^{n-p} = b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^p a^p b^{n-p} + \ldots + a^n}$$

<u>ត្រីកោណ ប៉ាស្កាល់ (**Triangle de Pascal**)</u>

ដោយទំនាក់ទំនង $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$ (S1) យើងអាចទាញយកនូវ ទំនាក់ទំនង រវាង មេគុណ នៃ ស្វ័យគុណ n និងស្វ័យគុណ $n+1$ ។ យើងបាន ដូចតទៅនេះ ៖

---

[2] យើងធ្លាប់ឃើញ ការ ផ្សំ p ទៅ p ក្នុងចំណោម n វត្ថុ ហើយ វត្ថុ ច្រើនតែជា តួអក្សរ $a, b, c, \ldots$ តែ នៅពេលនេះ វត្ថុ គឺ $(a+b)_1, (a+b)_2, (a+b)_3, \ldots, (a+b)_n$ ដោយ $(a+b)_i$ នីមួយៗ ស្មើ នឹង $(a+b)$ ។ ឧបមា $n = 5$ យើង រក ការបំបែកនៃ $(a+b)^5$ ហើយ ចំពោះ $p = 2$ មេគុណ ទាំងឡាយ នៃឯកធា a^2b^3 នោះបានដោយ ៖

$[\,a+b)_1 (a+b)_2]\ [(a+b)_3 (a+b)_4 (a+b)_5]$ ឬ $\{1,2\} \cup \{3,4,5\}$

និង $[\,a+b)_1 (a+b)_3]\ [(a+b)_2 (a+b)_4 (a+b)_5]$ ឬ $\{1,3\} \cup \{2,4,5\}$ ….. និង …..

ដូច្នេះ មេគុណ នៃ ឯកធា a^2b^3 មានចំនួន $C_5^2 = 10$ ។

$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p\, a^p b^{n+1-p}$ (S2)

នៅក្នុង (S2) នេះ គេសរសេរ $(a+b)^{n+1}$ ដោយពីរ របៀប គឺ៖

$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p b^{n-p}$ (S2-1) បានដោយ (S1)

$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p\, a^p b^{n+1-p}$ (S2-2) បានដោយ រូបមន្ត (1) ចំពោះ $n = (n+1)$ [3] គឺថា ដោយយក $n+1$ មកជំនួស n ។ ដោយ (S2-1) និង (S2-2) ជា ពហុធា (*polynômes*) ដូច្នេះ ដើម្បី (S2-1) = (S2-2) លុះត្រាតែ ឯកធា ដែល មាន ស្វ័យគុណ ស្មើគ្នា ត្រូវមានមេគុណស្មើគ្នាដែរ ។ ឥឡូវនេះ យើង រកមេគុណ នៃឯកធា $a^p b^{n-p}$ របស់ (S2-1) និង (S2-2) ។

(S2-1) => $(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n}[\, C_n^p\, a^{p+1} b^{n-p} + C_n^p a^p b^{n+1-p}]$

$= C_n^0 ab^n + C_n^0 b^{n+1} + \ldots + \boldsymbol{C_n^{p-1} a^p b^{n+1-p} + C_n^p a^p b^{n+1-p}} + \ldots$ (L1)

(S2-2) => $(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p\, a^p b^{n+1-p}$

$= C_{n+1}^0 b^{n+1} + \ldots\ldots + \boldsymbol{C_{n+1}^p\, a^p b^{n+1-p}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ (L2)

ដោយ (L1) និង (L2) យើងបាន ទំនាក់ទំនង រវាង មេគុណនៃ $a^p b^{n+1-p}$ ដូចតទៅ៖

(2)

$$\boldsymbol{C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p \quad (1 \le p \le n)}$$

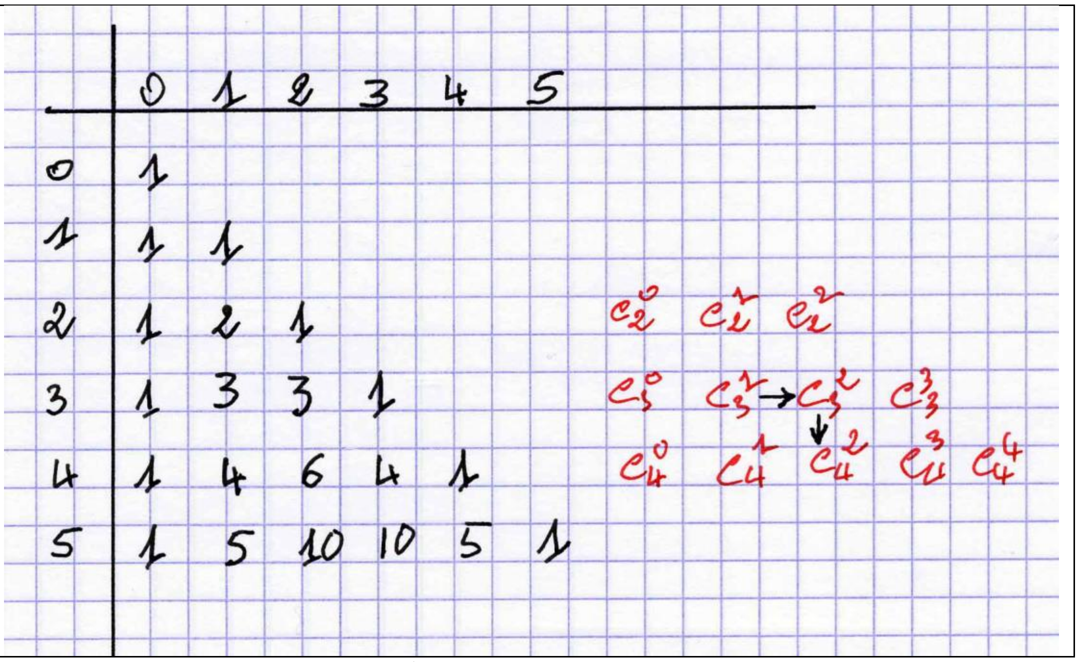
ទំនាក់ទំនង (**2**) អាចឲ្យយើងស្គាល់ មេគុណ ថ្នាក់ $\boldsymbol{n+1}$ កាលណាគេស្គាល់មេគុណ

---

[3] ចំពោះអ្នកធ្លាប់រៀន ពត៌មានវិជ្ជា សរសេររបៀបនេះ មិនមានអ្វីប្លែកទេ ពីព្រោះ នៅ ពត៌មានវិជ្ជា $A = B$ មានន័យថា គេយក B មក ជំនួស A ដែលនៅ ខាង ឆ្វេង សញ្ញា « = »។ ដូចនៅខាងលើនេះ ខ្ញុំយក តម្លៃថ្មី $(n+1)$ មកជំនួស តម្លៃចាស់ n ។ គឺថា កន្លែងណា មាន n ខ្ញុំដាក់ជំនួសវិញដោយ $n+1$ ។

ថ្នាក់ **n** ។ ដើម្បី នឹងបានយ៉ាងនេះ គេ ដាក់ មេគុណ ទាំងអស់ ក្នុង តារាងមួយ ដែលមាន ច្រកចូលពីរ (*un tableau* à *double entrée*) :

(T1)



នៅក្នុងតារាង នេះ មេគុណ C_n^p នៅត្រង់បន្ទាត់កាត់គ្នា រវាង បន្ទាត់ ឈរ (colonne) p និងបន្ទាត់ ដេក (ligne) n ។ នៅតាមបន្ទាត់ដេក (*chaque ligne*) នីមួយៗ មានមេគុណ របស់ $(a+b)^n$ ចំពោះ $n=0$ $n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$ $n=5$ ។ ដូចជា ចំពោះ $n=2$ យើងដឹងហើយថា $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ដូច្នេះ មេគុណគឺ 1 2 1 ដែលយើងឃើញ នៅ លើបន្ទាត់ដេក លេខ 2 នៃតារាង ។ ហើយចំពោះ $n=3$ យើងឃើញថា ក្នុង មេគុណ 1 3 3 1 មេគុណ 3 ទី១ បានមកដោយ យក 1 + 2 ដែល ជា មេគុណ នៅលើបន្ទាត់ដេកលេខ **2** ហើយ ចំពោះមេគុណ 3 ទី២ បានមកដោយ យក 2 + 1 ដែល ជា មេគុណ នៅលើបន្ទាត់ដេកលេខ 2 ដែរ ។ ចូរមើល ក្នុងតារាង នូវ មេគុណ C_n^p សរសេរ ជា ពណ៌ក្រហម ដូចជា $C_4^2 = C_3^1 + C_3^2$ ជាដើម ។

ជាទូទៅ $(\forall n \in N)$ ទំនាក់ទំនង **(2)** អាចឲ្យយើង គណនា មេគុណ លំដាប់ $n+1$ កាលណា គេដឹង គណនា មេគុណ លំដាប់ n ។ ដូច្នេះ យើងតម្រៀប មេគុណ C_n^p

នៅក្នុងតារាងមួយ ដែលមានច្រកចូលពីរ (មើល (T1) ហើយ មេគុណ C_n^p នៅត្រង់ បន្ទាត់កាត់គ្នា គឺបន្ទាត់ ឈរ p និងបន្ទាត់ដេក n ។ ដោយ របៀបរបៀបនេះ យើងឃើញថា C_{n+1}^p នឹង ជា ផលបូកនៃ ពីរ ចំនួន ដែលនៅ បន្ទាត់ដេក ខាងលើវា ៖ មួយនៅ លើ បន្ទាត់ ឈរ ជាមួយគ្នា ហើយមួយទៀត នៅលើបន្ទាត់ ឈរពីមុន ។ ដើម្បីឲ្យគ្រប់ តារាងនោះ ត្រូវមាន ជាមុននូវ បន្ទាត់ឈរ សន្ទស្សន៍ សូន្យ (une colonne d'indice zéro) ដោយមាន ចំនួន 1 នៅក្នុងនោះ (គឺ មេគុណ C_n^0) ហើយនិង បន្ទាត់ដេក សន្ទស្សន៍ សូន្យ (une ligne d'indice zéro) ដែលមានតែ មួយតួ គឺ $C_0^0 = 1$ ។ តារាង រាងត្រីកោណ ដែលបាន នោះ ហៅថា <u>ត្រីកោណប៉ាស្កាល់</u> ដែលអាចឲ្យគណនា ដោយលឿននូវមេគុណ $\boldsymbol{C_n^p}$ ចំពោះ ចំនួន $\boldsymbol{n}$ តូចៗ ដូចនៅ តារាង (T1) ខាងលើ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ។

<u>របៀបបង្ហាញ ផ្សេងទៀត</u>

គេអាចបង្ហាញ រូបមន្ត (2) ដោយប្រើ កន្សោមនៃ $\boldsymbol{C_n^p}$ (expression de C_n^p) ឬ មួយ ដោយ ការបកស្រាយត្រង់ៗតែម្តង គឺថា យើងតាងដោយ $\boldsymbol{E'}$ សំនុំមាន $n+1$ ធាតុ បានមក ដោយ បន្ថែម ធាតុ a មួយថ្មី ទៅក្នុង សំនុំមួយដែលមាន n ធាតុ ។ ដើម្បី បាន សំនុំ ដែលមាន p ធាតុ គេអាច ៖

- ឬមួយយក p ធាតុ ក្នុង E ដែលធ្វើឲ្យបាន C_n^p ជម្រើសដែលអាចមាន
- ឬមួយយក $p-1$ ធាតុ ក្នុង E ដែលធ្វើឲ្យបាន C_n^{p-1} ជម្រើសដែលអាចមាន បន្ទាប់មក

យើងយក ធាតុ a មកបន្ថែម ដើម្បីបានទៅជា សំនុំ មាន p ធាតុៗ នៅទីបំផុត យើងបាន ៖ $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$ ជម្រើស ដែលអាចមាន ។

ឥឡូវយើងបាន (2) ហើយ ដូច្នេះ គេអាច បាន រូបមន្ត នៃ ទ្វេធា ដោយ រ៉េគារ៉ង ដោយ ប្រើ ទំនាក់ទំនង $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$ ហើយដោយ សន្មតថា រូបមន្ត (1) ត្រូវរហូតដល់ លំដាប់ n ហើយគេត្រូវបង្ហាញថា រូបមន្តនោះ ក៏ត្រូវដល់

លំដាប់ $n+1$ ដែរ ។

<u>ការអនុវត្តន៍ របស់ រូបមន្តនៃទ្វេធា (Applications de la formule du binôme)</u>

បើនៅក្នុងរូបមន្ត (1) យើងយក $a=b=1$ នោះយើងបានទំនាក់ទំនង៖

(3) $$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots + C_n^p + \ldots\ldots + C_n^n = 2^n$$

ផលបូក នៅខាងឆ្វេង ក្នុង (3) ដំណាងចំនួន ទាំងអស់នៃផ្នែក របស់ សំនុំដែលមាន n ធាតុ ដោយ រាប់ទាំង ផ្នែក ទទេ និង សំនុំទាំងមូលផង ។ យើងថ្លែងថា៖

<u>ការស្នើ (IV,3,3)</u>

បើ សំនុំ E មាន n ធាតុ សំនុំ $\mathcal{P}(E)$ នៃផ្នែកទាំងឡាយ នៃ E នោះមាន 2^n ធាតុ ។

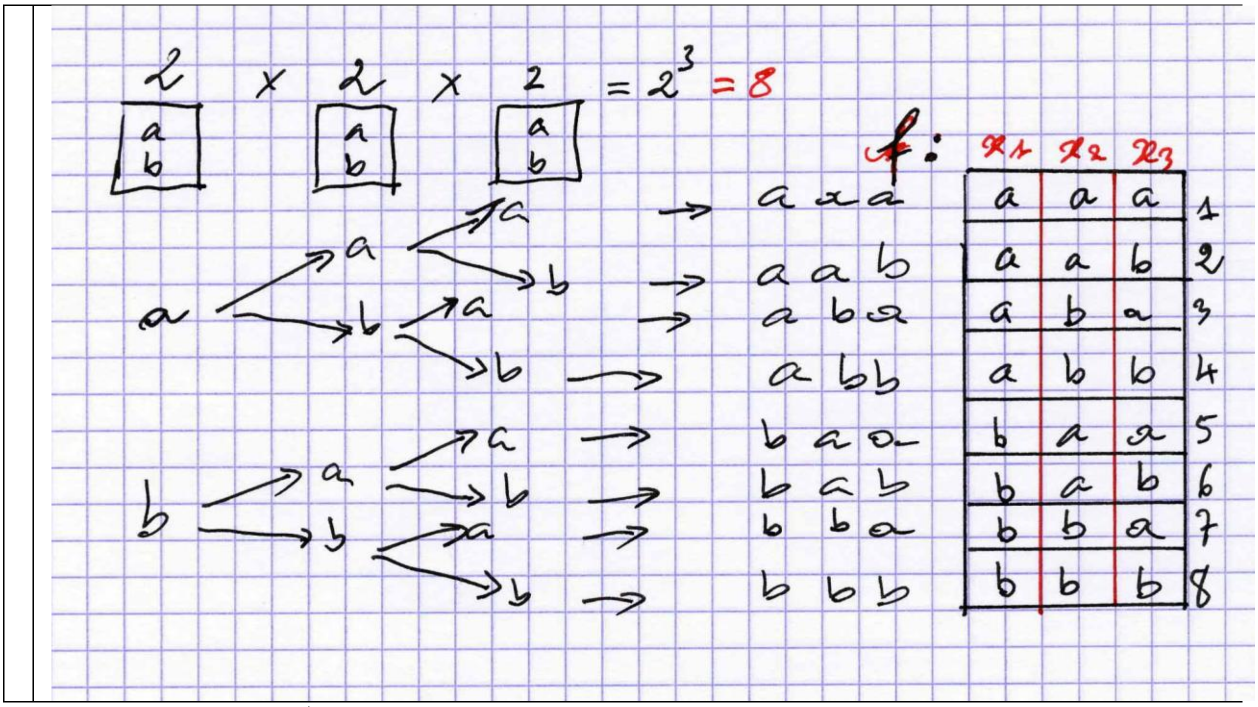
ដោយនៅក្នុង $\mathcal{P}(E)$ ក៏មានផ្នែក ទទេ និងផ្នែក ដែលមានធាតុតែមួយ ហើយ ខុសគ្នា ពី ផ្នែកមួយទៅ ផ្នែកមួយ ដែល ទាំងអស់ មាន n ដូច្នេះ
បើរាប់ទាំង ផ្នែកទទេផង នោះ ទាំងអស់មាន $n+1$។ ដូច្នេះ យើងបាន
វិសមភាព មួយដ៏សំខាន់ គឺ ៖

$$2^n \geq n+1$$

ដែលមាននៅក្នុង ការស្នើ (III, 8, 3) ។

គេអាច រក ផលបូកនៃ $\sum C_n^p$ ដោយ គណនា ជាពីរ របៀបខុសគ្នា ទី១ ដោយរក ចំនួន ការអនុវត្តន៍ ខុសគ្នាពី សំនុំ E មួយដែលមាន n ធាតុ ទៅ សំនុំ ដែលមានតែពីរ ធាតុ ។ បើយើងតាង ដោយ E សំនុំទី១ និង a, b ធាតុនៃសំនុំទី២ F នៅពេលនោះ

ការអនុវត្តន៍ នីមួយៗ កំណត់បាន ប៉ាទីស្យុងមួយ នៃសំនុំ E គឺថាចែកសំនុំ E ជាពីរ សំនុំ A និង B ដាច់ពីគ្នា ដោយ $A = f^{-1}(a)$ និង $B = f^{-1}(b)$ ៖ ដូច្នេះ ចំនួន ការអនុវត្តន៍ ពី E ទៅ F ស្មើ នឹង ចំនួន ប៉ាទីស្យុង នៃ E ជា ពីរ សំនុំ គឺ $[\sum_{p=0}^{n} C_n^p]$[4] ។ ម្យ៉ាងទៀត ដើម្បី កំណត់ ការអនុវត្តន៍ ពី E ទៅ F យើងគ្រាន់តែ សម្រេចថា ក្នុង n ជាតុ នៃ E តើ យើងយក ជាតុណាខ្លះ ដែល ផ្គូ នឹង a ឬនឹង b ដូច្នេះ ត្រូវមានជម្រើសទាំងអស់ 2^n ។ ដូច្នេះ យើងឃើញឡើងវិញ នូវ រូបមន្ត (3) ។ ដើម្បី យល់ការជម្រើស ដែលឲ្យ 2^n នោះ មាន ឧទាហរណ៍ ខាងក្រោមនេះ ចំពោះ $n = 3$ និង សំនុំ E = $\{x_1, x_2, x_3\}$ ៖



សព្វថ្ងៃនេះ អនុគមន៍ ដែលយកតែ ពីរចំនួន នេះហើយ ដែលគេប្រើ នៅក្នុង machine

[4] ចំពោះ ប៉ាទីស្យុង នៃសំនុំ **E** ជាពីរ សំនុំ បើ A ជាសំនុំទី១ នៃ E យើងយកសំនុំទី២ $B = E - A$ ហើយ សំនុំ A អាច ទទេ អាចមាន ១ ជាតុ អាចមាន ២ជាតុ អាចមាន ៣ជាតុ .....អាចមាន n ជាតុ ។ ចំនួន A ទទេ គឺ C_n^0 ចំនួន A មាន ១ជាតុ គឺ C_n^1 ចំនួន A មាន ២ជាតុ គឺ C_n^2 ......ចំនួន A មាន n ជាតុ គឺ C_n^n ។