

3. វិធី ធ្វើ (Procédé de symétrisation).

ឥឡូវនេះយើងនឹងបង្ហាញថា លក្ខខណ្ឌដែលបានមកក៏គ្រប់គ្រាន់ដែរ ដោយបង្ហាញ ការស្នើជាទូទៅមួយ ដូចតទៅនេះ ៖

ការស្នើ (V,3,1)

D ជាកន្លះគ្រុបអាបេលីអៀង មាន នប៉ុសកលិផ្ត e ។ នៅពេលនោះ មាន ការពង្រីក (E, f) នៃ D ដែលបំពេញ លក្ខខណ្ឌ ៖

I. ធាតុស្មើជ្រុង នីមួយៗនៃ D មានធាតុច្នុះ ក្នុង E ;

II. ការពង្រីកនីមួយៗនៃ D ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ I អាចបានដោយ ការពង្រីកនៃ E ។

ការបង្ហាញ

យើងតាងដោយ D^* សំនុំនៃ ធាតុស្មើជ្រុងនៃ D ហើយដោយ Δ សំនុំនៃ គូ (a, b) ដោយ $a \in D$ និង $b \in D^*$ ។ យើងសន្មតសរសេរ $(a, b) \equiv (a', b')$ បើ $a * b' = a' * b$ ។

ការបង្ហាញ ការស្នើ(V,3,1) ត្រូវចែកជាការបង្ហាញនូវ ឡឹម (lemme) ជាច្រើន ដូចតទៅនេះ ៖

ឡឹម-ទី១

ទំនាក់ទំនង $\mathcal{E}$ កំណត់ដោយ $(a, b) \equiv (a', b')$ ជា វិទ្យាស្យង់ សមមូល (relation d'équivalence) នៅលើសំនុំ $\Delta = D \times D^*$ ។

បង្ហាញ

a/ $\mathcal{E}$ រ៉េផ្លិចស៊ីវ បើកាលណា $(a, b) \equiv (a, b)$ ត្រូវ។ តាមនិយមន័យរបស់ $\mathcal{E}$

$(a, b) \equiv (a, b) \Leftrightarrow a * b = a * b$ ដែលត្រូវ។ ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង $\mathcal{E}$ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ។

b/ $\mathcal{E}$ ធ្វើ បើកាលណា $(a, b) \equiv (a', b') \Rightarrow (a', b') \equiv (a, b)$ ។ តាមនិយមន័យរបស់ $\mathcal{E}$

$$(a, b) \equiv (a', b') \Leftrightarrow a * b' = a' * b \quad (1)$$

$$(a', b') \equiv (a, b) \iff a' * b = a * b' \quad (2)$$

ដោយ (1) = (2) ដូច្នេះ $\mathcal{E}$ ឆ្លុះ ។

c/ $\mathcal{E}$ ត្រង់ស៊ីទីវ បើកាលណា $(a, b) \equiv (a', b')$ និង $(a', b') \equiv (a'', b'')$ នោះគេត្រូវបាន $(a, b) \equiv (a'', b'')$ ។ យើងយកកន្សោម $a * b' * b''$ ហើយយើងប្រើ

$$(a, b) \equiv (a', b') \iff a * b' = a' * b \quad (3)$$

និង $(a', b') \equiv (a'', b'') \iff (a' * b'' = a'' * b')$ (4) ។ ដោយកន្សោមខាងលើ ៖

$$a * b' * b'' = a' * b * b'' \quad \text{ដោយ (3)}$$

$$a' * b * b'' = a' * b'' * b \quad (* \text{ ត្រលប់ ចំពោះ កន្លះគ្រប អាបេលីអៀង })$$

$$a' * b'' * b = a'' * b' * b \quad \text{ដោយ (4)}$$

$$a'' * b' * b = a'' * b * b' \quad (* \text{ ត្រលប់})$$

$$\text{ដូច្នេះ } a * b' * b'' = a'' * b * b' \implies a * b'' = a'' * b \quad (\text{ពីព្រោះ } b' \text{ ស្មើជ្រុង})$$

តាមនិយមន័យ $a * b'' = a'' * b \iff (a, b) \equiv (a'', b'')$ ដូច្នេះ $\mathcal{E}$ ត្រង់ស៊ីទីវ ។

ការកត់ត្រា

យើងតាងដោយ E សំនុំជើងលព្វ (ensemble quotient) នៃ Δ ដោយទំនាក់ទំនងសមមូល $\mathcal{E}$ គឺថាជា ថ្នាក់សមមូល មួយច្បាស់ $\mathcal{E} \left(E = \frac{\Delta}{\mathcal{E}} \right)$ ហើយយើងតាងដោយ $((a, b))$ ថ្នាក់សមមូល ដែលមានគូ (a, b) ជាធាតុ។

ទ្រឹម-ទី២

គេមាន ច្បាប់ក្នុងមួយ (une loi interne) លើ Δ ដោយកំណត់ការផ្សំធាតុពីរ (a, b) និង (c, d) នៃ Δ ដោយ៖

$$(1) \quad (a, b) * (c, d) = (a * c, b * d)$$

ថ្នាក់ សមមូល នៃធាតុផ្សំដោយ ពីរធាតុនៃ Δ ជាប់ទាក់ទងតែនឹង ថ្នាក់សមមូលនៃធាតុទាំងពីរនោះតែប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះគេបាន ច្បាប់ក្នុងលើ E ដោយដាក់៖

$$(2) \quad ((a, b)) * ((c, d)) = ((a * c, b * d)) \text{ ។}$$

នេះបានន័យថា ច្បាប់ក្នុង $(*)^1$ ដែលកំណត់ លើសំនុំ Δ ច្បាប់ក្នុង $(*)$ ដដែលនេះ ក៏ជា ច្បាប់ក្នុង កំណត់ លើសំនុំ $(E = \frac{\Delta}{\varepsilon})$ នៃថ្នាក់សមមូលដែរ។ ហើយថ្នាក់សមមូល ផ្សំដោយច្បាប់ក្នុង អំពីធាតុពីរ នៃថ្នាក់សមមូល មិនជាប់ទាក់ទងនឹងធាតុណាមួយដែល ធាតុទាំងពីរនោះ ជាដំណាងឡើយ។ ចូរវែកញែកឲ្យច្បាស់រវាង ច្បាប់ក្នុង $(*)$ និង ទំនាក់ទំនង សមមូល ε ៖

ចំពោះ ច្បាប់ក្នុង « * » លើ $\Delta = D \times D^*$: $(a, b) * (c, d) = (a * c, b * d)$

ចំពោះ ទំនាក់ទំនងសមមូល « ε » លើ Δ : $(a, b) \equiv (a', b') \Leftrightarrow a * b' = a' * b$

សំនុំនៃថ្នាក់សមមូល គឺ E ដែលគេច្រើនសរសេរ $E = \Delta/\varepsilon$ ។

បង្ហាញ

ដើម្បីបង្ហាញថា (1)កំណត់វិធីគណនាលើ Δ នោះគេគ្រាន់តែបង្ហាញថា បើកាលណា b និង d ជាធាតុស្មើជ្រុងនៃ D នោះធាតុផ្សំ $b * d$ ក៏ជាធាតុស្មើជ្រុងនៃ D ដែរ។ បើ b ស្មើជ្រុង ទំនាក់ទំនង $b * d * x = b * d * y \Rightarrow d * x = d * y$ ដែលឲ្យ $x = y$ បើ

¹ ពាក្យថា ច្បាប់ក្នុង (loi interne) បានន័យថា បើកាលណាគេយក ធាតុពីរនៃ Δ មកគណនាដោយ ច្បាប់ក្នុងនោះ។ គេបានផលជាធាតុថ្មីមួយទៀត នៅក្នុង Δ ដដែល។ ឧទាហរណ៍ នៅក្នុង N នៃចំនួនគត់ លេខ បូក ជាច្បាប់ក្នុង ដូចជា $2 + 7 = 9$ ។ តែ ចំពោះលេខសង់វិញ $2 - 7 = -5$ ដោយ -5 មិននៅក្នុង N ដូច្នេះ លេខសង់ មិនមែនជា ច្បាប់ក្នុង នៃ N ទេ។

d ស្មើជ្រុង។ ដូច្នេះ $(b * d) * x = (b * d) * y \Rightarrow x = y$ ដូច្នេះ $(b * d)$ ស្មើជ្រុង កាលណា b និង d ស្មើជ្រុង។

ដើម្បីបង្ហាញថា ថ្នាក់សមមូល $((a * c, b * d))$ ជាប់ទាក់ទងតែនឹង ថ្នាក់សមមូល $((a, b))$ និង $((c, d))$ គេគ្រាន់តែតាំងថា ៖

$$(A1) \quad (a, b) \equiv (a', b')$$

$$(A2) \quad (c, d) \equiv (c', d')$$

នោះគេបាន $\Downarrow$

$$(A3) \quad (a, b) * (c, d) \equiv (a', b') * (c', d') \quad ?$$

ដោយច្បាប់ក្នុង (A3) ទៅជា ៖

$$(a * c, b * d) \equiv (a' * c', b' * d') \Leftrightarrow (a * c) * (b' * d') = (a' * c') * (b * d) \text{ ឬ }$$

$$a * c * b' * d' = a' * c' * b * d \text{ (ពីព្រោះដោយ } * \text{ ផ្គុំ នោះយើងអាចលំប្រួលក្របខណ្ឌ)}$$

$$\text{ដោយប្រើ (A1)} \Rightarrow a * b' = a' * b \text{ (B1) ហើយ (A2)} \Rightarrow c * d' = c' * d \text{ (B2)}$$

$$\text{ដោយ } * \text{ ត្រលប់ ពីព្រោះ កន្លះគ្រប អាបេលីអៀង នោះ } a * c * b' * d' = a' * c' * b * d$$

$$\text{អាចសរសេរជា៖ } a * b' * c * d' = a' * b * c' * d \text{ ដែលត្រូវដោយ (B1) និង (B2) ។}$$

ដូច្នេះ (A3) ត្រូវ បើកាលណាគេមាន (A1) និង (A2)។ ដូច្នេះយើងបានបង្ហាញ ឡឹម-ទី២។

ឡឹម-ទី៣

សំនុំ E ដែលមានរបៀបគណនាកំណត់ដោយ (2) ជាកន្លះគ្របអាបេលីអៀង ហើយមានថ្នាក់ $((e, e))$ ជា នប៉ុស្តិ៍សកលិដ្ឋ។

បង្ហាញ

a/ ត្រូវបង្ហាញ * ត្រលប់ ក្នុង E ៖

$$((c, d)) * ((a, b)) = ((c * a, d * b)) = ((a * c, b * d)) = ((a, b)) * ((c, d)) \quad ?$$

b/ ត្រូវបង្ហាញ * ផ្គុំ ក្នុង E ៖

$$[(a,b) * (c,d)] * (g,f) = ((a * c, b * d)) * (g,f) = ((a * c * g, b * d * f)) \text{ ដោយ(2)}$$

$$= ((a * (c * g), b * (d * f))) \text{ ពីព្រោះ } * \text{ ផ្គុំក្នុង } D$$

$$= ((a,b)) * [(c,d) * (g,f)] \text{ ។ ដូច្នេះ } * \text{ ផ្គុំក្នុង } E \text{ ។}$$

c/ ត្រូវបង្ហាញ (e,e) ជាធាតុសកលក្នុង E ៖

$$((a,b)) * ((e,e)) = ((a * e, b * e)) = ((a,b)) \text{ ពីព្រោះ } e \text{ ជាធាតុសកលក្នុង } D \text{ ។}$$

ឡឹម-ទី៤

ការអនុវត្តន៍ f កំណត់ដោយ $f(a) = ((a,e))$ ជាអាំងសេចស្យង់ (injection) ពី D ទៅក្នុង E ហើយ f ក៏បំពេញនូវអ៊ីសូម៉ូរហ្វីស្យម (isomorphisme) ពី D ទៅក្នុងផ្នែកមួយនៃ E ។

បង្ហាញ

តាមនិយមន័យ f អាំងសេចទីវ៉ា កាលណា $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow ((a,e)) = ((b,e)) \Rightarrow a = b \text{ ពីព្រោះ } e \text{ ជាធាតុមួយក៏ស្មើគ្នា ។ ម្យ៉ាងទៀត តាមនិយមន័យ } f(a) = ((a,e)) \text{ យើងបាន៖}$$

$$f(a) * f(b) = ((a,e)) * ((b,e)) = ((a * b, e * e)) = ((a * b, e)) = f(a * b) \text{ ហើយ}$$

$$f(e) = ((e,e)) \text{ ។ ដូច្នេះ យើងបាន } f(a * b) = f(a) * f(b) \text{ និង } f(e) = ((e,e)) \text{ ។}$$

f អាំងសេចទីវ៉ា និង $f(a * b) = f(a) * f(b)$ ហើយ $f(e) = ((e,e))$ ដូច្នេះ f ជាអ៊ីសូម៉ូរហ្វីស្យមពី D ទៅ $f(D)$ ។

ឡឹម-ទី៥

បើ a ជាធាតុស្មើជ្រុង នៃ D នោះធាតុ $((a,b))$ នៃ E មាន $((b,a))$ ជាធាតុផ្ទុះ ។ ជាពិសេស រូបភាពដោយ f នៃធាតុ a មួយស្មើជ្រុងនៅក្នុង D គឺធាតុ $((a,e))$ នៃ E ដែលមាន ធាតុផ្ទុះ $((e,a))$ ។ ហើយបើគ្រប់ធាតុនៃ D ស្មើជ្រុង នៅពេលនោះ E ជាគ្រុបអាបេលីអៀងមួយ។

ឡើង-ទី៥ នេះ បានមកពី ឡើង ទី១ ទី២ ទី៣ ទី៤ ហើយថា E ជាគ្រូបអាបេលីអៀង មួយ បានមកដោយគេសន្មតថា គ្រប់ធាតុនៃ D សុទ្ធតែស្មើជ្រុង។ ពីព្រោះ ពី ឡើងទី១ ដល់ ដល់ទី ៤ គេសន្មត់ ត្រឹមគ្រប់ធាតុនៃ D^* ស្មើជ្រុង និង $\Delta = D \times D^*$ ហើយ $E = \Delta/\varepsilon$ ។ ដូច្នេះ ក្នុងគូ (a,b) នៃទំនាក់ទំនងសមមូល ε b ត្រូវតែនៅក្នុង D^* បាន ន័យថា b ជាធាតុស្មើជ្រុង តែចំពោះធាតុ a វិញដែលនៅក្នុង D មិនចាំបាច់ជា ធាតុស្មើជ្រុងទេ ៖ ចង់ a ស្មើជ្រុងក៏បាន មិនស្មើជ្រុងក៏បាន។ តែបើ a ស្មើជ្រុង នោះវិត តែប្រសើរទៅទៀត ចំពោះ ទំនាក់ទំនងសមមូល ε ។ ហើយនៅពេលនោះ យើងអាច យក គូដែលមានទម្រង់ (a,a) មកបញ្ចូលក្នុង ទំនាក់ទំនង ε នោះ បាន។ តាមនិយម ន័យ ទំនាក់ទំនងសមមូល ε យើងឃើញថា បើ a និង b ស្មើជ្រុង នោះ $(a,a) \equiv (b,b)$ ពីព្រោះ $a * b = b * a$ ត្រូវដោយ $*$ ត្រឡប់ ។ ដោយ $(a,a) \equiv (e,e)$ ដូច្នេះ គូដែលមានធាតុដូចគ្នា ហើយ ស្មើជ្រុង គូទាំងនោះ ប្រមូល ផ្គុំបានជាថ្នាក់មួយតាងដោយ $((e,e))$ ហើយ ថ្នាក់នោះ ជា ធាតុនប៉ុសកលិផ្គុំនៃសំនុំ E ។ នៅក្នុង ឡើងទី៥ គេថា ៖ បើ a ស្មើជ្រុង នោះ $(a,b) * (b,a) = (e,e)$ ពីព្រោះតាមនិយមន័យ $*$, $(a,b) * (b,a) = (a * b, b * a) = (a * b, a * b) \equiv (e,e)$ ។ រួមសេចក្តីទៅ ឡើងទាំងអស់ ចាប់តាំងពី ឡើងទី១ រហូតដល់ឡើងទី៥ បង្ហាញនូវ ផ្នែក (I) នៃ ការស្នើ-(V,3,1) ។

ដើម្បីបង្ហាញ ផ្នែក (II) នៃ ការស្នើ-(V,3,1) យើងយក ការពង្រីកជាធម្មតាមួយ (E_1, f_1) នៃ D ដែលបំពេញ លក្ខខណ្ឌ (I) ហើយយើង ចំណាំ ធាតុ x មួយនៃ D ដោយ ធាតុ $f_1(x)$ ជារូបភាពនៃ x ដោយ f_1 នៅក្នុង E_1 ។ ដោយថា ការពង្រីកនេះបំពេញ ផ្នែក (I) នៃ ការស្នើ-(V,3,1) ដូច្នេះ នៅក្នុង E_1 មាន

ធាតុឆ្លុះ y^{-1} នៃធាតុស្មើជ្រុង $y \in D$ ហើយនិងធាតុផ្សំ $x * y^{-1}$ នៃ y^{-1} ជាមួយនឹងធាតុ x ណាក៏ដោយនៃ D ។ តែ ធាតុផ្សំ $x * y^{-1}$ ជាប់ទាក់ទងតែនឹង ថ្នាក់សមមូល (x, y)

ពីព្រោះ $x * y^{-1} = x' * y'^{-1} \iff (x, y) \equiv (x', y')$ ដោយមកពី ៖

$$x * y^{-1} = x' * y'^{-1} \iff x * y^{-1} * y * y' = x' * y'^{-1} * y * y' \quad (\text{ដោយគុណនឹង } y * y')$$

$$x * y^{-1} * y * y' = x' * y'^{-1} * y' * y \quad \text{ដោយ } * \text{ ត្រលប់}$$

$$x * (y^{-1} * y) * y' = x' * (y'^{-1} * y') * y \iff x * y' = x' * y \quad \text{ពីព្រោះ}$$

$$y^{-1} * y = y'^{-1} * y' = e \quad \text{ហើយ } x * y' = x' * y \iff (x, y) \equiv (x', y') \quad \text{។}$$

សង្កេត

សំនុំ E និង សំនុំ E_1 សំនុំទាំងពីរនេះ ជាសំនុំពង្រីកនៃ សំនុំ D ទាំងអស់គ្នា។ តែនៅក្នុង E មានធាតុឆ្លុះ នៃធាតុស្មើជ្រុងទាំងឡាយនៅក្នុង D ហើយចំពោះ E_1 វិញមិនត្រឹមតែ មានធាតុឆ្លុះ នៃធាតុស្មើជ្រុងទាំងឡាយនៅក្នុង D ប៉ុណ្ណោះទេ ថែមទាំងមាន ធាតុផ្សំ ដែល មានរាងដូចជា $x * y^{-1}$ ដោយ $x \in D$ និង y ជាធាតុស្មើជ្រុងនៃ D ។

ដូច្នេះ ការផ្លាស់ប្តូរ $((x, y)) \rightarrow xy^{-1}$ កំណត់ ទំនាក់ទំនង អាំងសែចទីវ g មួយពី E ទៅ E_1 ។ យើងឃើញថាការអនុវត្តន៍ g នេះ កំណត់ អ៊ីសូម៉ូហ្វីស្មួយ

(un isomorphisme) រវាង E និង $g(E)$ ។ គេសរសេរបែបនេះបាន ដោយធាតុ

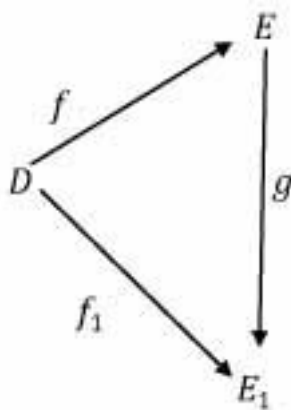
ទាំងឡាយក្នុង D គេចំណាំបាន ដោយរូបភាពវានៅក្នុង E_1 ។ ការអនុវត្តន៍ f បាន

កំណត់ដោយ $f(x) = ((x, e))$ ដូច្នេះយើងបាន $g[f(x)] = f_1(x)$ ដែលយើងអាច

សរសេរ ជានិមិត្តរូប $f_1 = g \circ f$ ។

យើងអាចថា ការពង្រីក (E_1, f_1) គឺជា ការពង្រីកផ្សំ

ដោយ ការពង្រីកជាបន្ទាប់បន្ត (E, f) និង (E_1, g) ។



ចូរមើលឌីយ៉ាក្រាមខាងឆ្វេង។

បើនិយាយ តាមមើលឃើញ ការពង្រីក (E_1, f_1)

ទាញ ចេញមកពីការពង្រីក (E, f) បន្តដោយការ
ពង្រីកថ្មី (E_1, g) ។

យើងឃើញថា ការពង្រីក (E, f) ដែយើង បានធ្វើជាដំបូង ជាការពង្រីកដែលតូចជាងគេ
ដែលអាចធ្វើបាន ដែលបំពេញ លក្ខខណ្ឌ (I) ៖ យើងថា (E, f) ជាការពង្រីក អប្បបរមា
(une extension minimale) ។ យើងហៅថា ការធ្វើនៃ D (symétrisation de D)
គឺការពង្រីកណាដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (I) និង (II) (toute extension satisfai –
sant aux condition (I) et (II)។