

10. ស្វ័យស័ត្យ ប៉េអាណូ (Les axiomes de Péano)

បើយើងគ្រាន់តែចង់ថ្លែងពី ទ្រឹស្តី នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះយើងអាចលោតរំលង ទ្រឹស្តី នៃចំនួន បកតិសំខ្យា (court-circuiter la théorie de cardinaux) ដោយយើងសន្មត ជាស្វ័យស័ត្យ ចំពោះកម្មសិទ្ធិ នៃចំនួនគត់ដែលបានមកពីការសិក្សា ធ្វើនៅ កថាខ័ណ្ឌ §3 និង §4 ហើយ លទ្ធផលដែលបាន បន្តមក គឺ បានមកពីកម្មសិទ្ធិទាំងនោះ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងមិនចាំបាច់ សន្មត ស្វ័យស័ត្យយ៉ាងច្រើននោះទេ ជាពិសេស កម្មសិទ្ធិនៃ លេខបូក និងលេខគុណ ។ បើយើងទុក ស្វ័យស័ត្យ ទាំងពីរ ដែលយើងបានសន្មតរួច ហើយនោះ នៅ §4 (គោលការណ៍ រេគរ៉ង់ និង ស្វ័យស័ត្យ អនន្ត - principe de récurrence et axiome de l'infini) យើងនឹងឃើញ ថា យើងគ្រាន់តែបំពេញ ដោយយកជា ស្វ័យស័ត្យ នូវការស្នើមួយ ដែលសមមូលនឹង ការស្នើ (III, 3, 5)។ នៅពេលនោះ កម្មសិទ្ធិ ឯទៀតៗ គឺចេញមកតែពី ស្វ័យស័ត្យ ទាំងបីនោះ ដែលហៅថា ស្វ័យស័ត្យប៉េអាណូ ។

ក៏អាចមាន ប្រព័ន្ធនៃស្វ័យស័ត្យ ឯទៀត ដែលអាចបង្កើតទ្រឹស្តីនៃចំនួនគត់ដែរ តែ ប្រព័ន្ធប៉េអាណូ គឺ ងាយស្រួល ហើយប្រក្រតី ជាងគេ ។ គឺ បង្កើត ចំនួនគត់ N ដោយ ពឹងផ្អែកទៅលើ ការ បូក និង ១ ជាបន្តបន្ទាប់រហូតទៅ ។

ការថ្លែងស្វ័យស័ត្យ

នៅក្នុង ទ្រឹស្តីស្វ័យស័ត្យ (théorie autonome) នៃចំនួនគត់ ស្វ័យស័ត្យ អនន្ត និង គោល ការណ៍ រេគរ៉ង់ ពុំអាចថ្លែងបានដូច កថាខ័ណ្ឌ §4 ។ ស្វ័យស័ត្យ អនន្ត នឹងថ្លែងមុនគេ ដោយអះអាងថា មានសំនុំ N មួយដែលបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌ ថ្លែងដោយ ស្វ័យស័ត្យ ឯទៀតៗ ។ គោលការណ៍រេគរ៉ង់ ត្រូវ ថ្លែងដោយមិនមានប្រើ សញ្ញា $a + 1$ ពីព្រោះ យើង អាចថាពុំទាន់ស្គាល់ថា អ្វីទៅ ផល បូក ហើយ តើ លេខ 1 ដំណាងអ្វី ៖ យោងគ្រាន់តែអះអាងថា មានការអនុវត្តន៍ f មួយ ពី N ទៅ N ដែលមានកម្មសិទ្ធិខ្លះ

ហើយបន្ទាប់មក លេខបូក នឹងកំណត់របៀបណាដើម្បី ឲ្យ ការអនុវត្តន៍ f អាចទៅជា រូបមន្ត ដែលឲ្យ $x \rightarrow x + 1$ គឺថា $f(x) = x + 1$ ។ មុននឹងបញ្ចប់ ដើម្បីជំនួស ការស្នើ (III, 3, 5) យើងគ្រាន់តែថា f អាំងសេចទីវ ។ ដល់ប្រមូលការថ្លែងទាំងអស់នោះមកជាការ ថ្លែងតែមួយ យើងមានប្រព័ន្ធដូចតទៅនេះ ៖

ស្វ័យស័ក្ស ប៉េអាណូ

មានសំនុំមួយដែលយើងតាងដោយ N ហើយនិង ការអនុវត្តន៍ f ពី N ទៅ N ដែលបំពេញ លក្ខខ័ណ្ឌ ដូចតទៅនេះ ៖

- I. f អាំងសេចទីវ ដែលមានន័យថា $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- II. មានធាតុមួយនៅក្នុង តាងដោយ 0 ដែលមិននៅក្នុង $f(N)$
- III. បើ A ជាផ្នែកមួយ នៃ N ដែល $0 \in A$ ហើយនិង $f(A) \subset A^1 \Rightarrow A = N$ ។

តែ ស្វ័យស័ក្ស ទាំងនេះ គេថ្លែងដោយរបៀបមួយទៀត ដែលស្រួលយល់ ដូចខាងក្រោមនេះ ដែលនៅក្នុងនោះ គេជំនួស $f(x)$ ដោយ x^+

✿ មាន សំនុំមួយតាងដោយ N ដែលចំពោះធាតុ x មួយនៃ N គេអាចផ្លូវនឹង ធាតុ កំណត់មួយតាងដោយ x^+ ហៅថា បន្ទាប់ពី x ដែលបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌដូចតទៅ ៖

- I' $y^+ = x^+ \Rightarrow y = x$.
- II' មានធាតុមួយ តាងដោយ 0 ដែលមិនមែនជា ធាតុបន្ទាប់ នៃធាតុណាមួយឡើយ។
- III' បើ A ជាផ្នែកមួយ នៃ N ដែល $0 \in A$ ហើយបើ $x \in A$ នោះបណ្តាលឲ្យ $x^+ \in A$ នៅពេលនោះ $A = N$ ។

គេសង្កេតថា ស្វ័យស័ក្សទាំងអស់នេះ ពុំបានអះអាងថា សូន្យ ជាធាតុនៃ N តែមួយគត់ ដែលមិនមែនជាធាតុបន្ទាប់នៃធាតុណាមួយឡើយ ។ ដូច្នេះត្រូវតែបញ្ជាក់ នូវចំណុចនេះ ដោយ បង្ហាញនូវការស្នើខាងក្រោមនេះ ៖

¹ $f(A) \subset A$ សូមមើលថា $f(A)$ នៅក្នុង A

ការស្នើ(III, 10, 1).

ធាតុ សូន្យ ជាធាតុតែមួយគត់របស់ N ដែលមិននៅក្នុង $f(N)^2$ ។

បង្ហាញ

ឧបមាថាមាន ធាតុ a មួយនៅក្នុង N ដែលគេមាន $f(x) \neq a, \forall x \in N$ ។

ដូច្នេះ a មិននៅក្នុង $f(N)$ ទេ ដូច្នេះ $f(N)$ នៅក្នុង $N - \{a\} = A^3$

$$f(N) \subset A \Rightarrow f(A) \subset A \quad (1)$$

ដោយ $a \neq 0$ ដូច្នេះ $0 \in A$ (ពីព្រោះ $A = N - \{a\}$) $\Rightarrow$

$A = N$ (ដោយ (1) និង III') ។ ដូច្នេះ ផ្ទុយនឹង សមតិកម្ម (contraire aux hypothèses)

ដូចជា $A = N - \{a\}$ ជាដើម ។

របៀបថ្លែងម្យ៉ាងទៀតនៃការស្នើ (III, 10, 1)

បើ $a \in N$ ហើយ បើ $a \neq 0$ នោះមាន ធាតុ $x \in N$ មួយ ដែលឲ្យ $a = x^+$ ។

នេះយើងឃើញឡើងវិញ ដូរតែរបៀបកត់ត្រា នូវការស្នើ (III, 4, 2) ដែលបានឲ្យ

អនុសាសន៍ ដ៏សំខាន់ សម្រាប់ លេខគណិតថ្នាក់ដំបូង ។

ការថ្លែងសម្រួលនៃ ស្វ័យស័ត្យ ប៉េអាណូ អាចសន្មតថា ការអនុវត្តន៍ $f: x \rightarrow x^+$

ជា បីសេចក្តី ពី N ទៅ $N - \{0\}$ ។ ធ្វើយ៉ាងនេះ យោងជៀសវាងការពិភាក្សាដែល

ពេកចំពោះសិស្ស។

តទៅនេះ ធាតុនៃ N ហៅថា ចំនួនគត់ធម្មជាតិ (entiers naturels)។ ហើយយើងនឹង

ឃើញ នូវការកំណត់ ការគិតលេខ ជាន់ដំបូងៗ និង បង្ហាញ កម្មសិទ្ធិ របស់វា ដោយ

ប្រើតែ ស្វ័យស័ត្យប៉េអាណូ តែប៉ុណ្ណោះ ។ ការសិក្សានេះវែងបន្តិចហើយ តែមិនជា

² បានន័យថា សូន្យនៅក្នុង N តែមិននៅក្នុង $f(N)$ ។

³ យើងតាងដោយ A សំនុំ $N - \{a\}$ ។

ពិបាកខ្លាំងនោះទេ យើងគ្រាន់តែតាមដាន ពី ការស្នើមួយ ទៅការស្នើមួយទៀត
ដែលមាន តៗគ្នា តាមហេតុផល តែប៉ុណ្ណោះ (à respecter l'enchainement logique
d'un grand nombre de propositions faciles)។