5. វិធីសង - ទំនាក់ទំនងលំដាប់ លើ N (Soustraction. Relation d’ordre sur N.)

និយមន័យ

***a* និង *b* តាងជាបកតិសំខ្យាមានព្រំដែន។ គេថា *a* ធំជាង *b* ហើយគេសរសេរ $a \geq b$ ឬ $b \leq a$ បើកាលណាមាន បកតិសំខ្យា *c* ដែលឲ្យ $a = b + c$ ។**

ដូច្នេះតាម ការស្នើ (III, 4, 4) និង ការស្នើ (III, 4, 6) បកតិសំខ្យា c ត្រូវ មានតែមួយ ហើយមានព្រំដែនទៀត ៖ គេថា c គឺ ការខុសគ្នា (la différence) រវាង a និង b ហើយគេ សរសេរ $c = a - b$ ។

នៅពេលនេះ យើងអាចថ្លែង ចំពោះការស្នើ (III, 4, 2) ថាគេគ្មាន ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a ឯណាដែល បំពេញ $0 < a < 1$ (**ទំនាក់ទំនង** $b < a$ <=> $b \leq a$ និង $b \neq a$) ។ ហើយជាទូទៅ យើងមានការស្នើតទៅនេះ ដែលគេច្រើនប្រើនៅ លេខគណិត (arithmétique) ៖

ការស្នើ (III, 5, 1)

ទំនាក់ទំនង $a > b$ ស្មើនឹង $a \geq b + 1$ ។

$a > b$ => គេមាន $c \neq 0$ ដែលឲ្យ $a = b + c$ ហើយ ដោយ ការស្នើ (III, 4, 2) គេមាន x ដែលឲ្យ $c = x + 1$ ។ ដូច្នេះគេបាន $a = b + c = b + x + 1 = (b + 1) + x$

$a = (b + 1) + x$ => $a \geq b + 1$ ។

ផ្ទុយទៅវិញ បើ $a \geq b + 1$ តាមនិយមន័យខាងលើ គេមាន x ដែលឲ្យ $a = b + 1 + x$ ឬ $a = b + (x + 1)$ => [$a \geq b$ និង $a \neq b$] ⇔ $a > b$ ។

ការស្នើ (III, 5, 2)

ទំនាក់ទំនង $b \leq a$ កំណត់ លំដាប់ទាំងមូល (définit un ordre total sur N) លើ *N*។

ដើម្បីបង្ហាញថាជា រីឡាស្យុងលំដាប់ទាំងមូល ត្រូវបង្ហាញថា គ្រប់ធាតុនៃ N ទំនាក់ទំនង $b \le a$ វា រេផ្លិចស៊ីវ ត្រង់ស៊ីទីវ និង ប្រឆាំងឆ្លុះ ។

1/ ទំនាក់ទំនង $a = a + 0$ បង្ហាញថា រីឡាស្យុងនេះ រេផ្លិចស៊ីវ

2/ $a \ge b$ និង $b \ge c$ តើនាំឲ្យ $a \ge c$ ឬទេ ?

$a \ge b$ => គេអាចរក $d \in N$ ដែលឲ្យ $a = b + d$ (1)

$b \ge c$ => គេអាចរក $e \in N$ ដែលឲ្យ $b = c + e$ (2)

ដោយ (1) និង (2) យើងបាន ៖ $a = b + d = (c + e) + d = c + (e + d)$

$a = c + (d + e)$ => $a \ge c$ ដូច្នេះ រីឡាស្យុងនេះ ត្រង់ស៊ីទីវ

3/ $a \ge b$ និង $b \ge a$ តើនាំឲ្យ $a = b$ ឬទេ ?

$a \ge b$ => គេអាចរក $c \in N$ ដែលឲ្យ $a = b + c$ (3)

$b \ge a$ => គេអាចរក $d \in N$ ដែលឲ្យ $b = a + d$ (4)

ដោយ (3) និង (4) យើងបាន ៖ $a = b + c = (a + d) + c = a + (c + d)$

$a = a + (c + d)$ => $(c + d) = 0$ ដោយប្រើ ការស្នើ (III, 4, 6)

$c + d = 0$ => $c = 0$ និង $d = 0$ ដោយប្រើ ការស្នើ (III, 3, 3) ដូច្នេះ រីឡាស្យុងនេះ ប្រឆាំងឆ្លុះ ។

ដើម្បីនឹងបង្ហាញថាជា **លំដាប់ ទាំងមូល លើ N** យើងប្រើគោលការណ៍ រេគារ៉ង់ ហើយ ប្រើ ការស្នើ (III, 4, 6) ។ ដូចយើងឃើញរួចមកហើយ គេប្រើគោលការណ៍ រេគារ៉ង់ នៅពេលណា ? ឆ្លើយនៅពេលដែលគេចង់បង្ហាញថា រូបមន្តអ្វីមួយ ដែលមាន អថេរជាចំនួនគត់ យើងចង់បង្ហាញថា រូបមន្តនោះត្រូវ គ្រប់ចំនួន a ទាំងអស់នៅក្នុង N ។ តើត្រូវធ្វើរបៀបណា ដើម្បី ថា រូបមន្តនោះត្រូវ គ្រប់ចំនួន a ទាំងអស់នៅក្នុង N ? របៀបគឺគេតាំង សំនុំ A មួយ ដែលមានធាតុសុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងរូបមន្តនោះ ហើយមុន

ដំបូងយើងបង្ហាញ ថា $A \neq \emptyset$ ដូចជា $0 \in A$ ឬក៏ $1 \in A$ ជាដើម ។ បន្ទាប់មក ដោយសន្មត ថា $a \in A$ នោះយើងត្រូវបង្ហាញថា $(a+1) \in A$ ។ ដូច្នេះ តាមស្វ័យស័ត្យ យើងអាចសន្និដ្ឋានថា $A = N$ ។ ដែលមានន័យថា រូបមន្តត្រូវទាំងមូល លើ N ។

ឥឡូវយើងត្រឡប់មក ការបបង្ហាញថា **<u>លំដាប់ ទាំងមូល លើ N</u>** ។

យើងតាងដោយ A សំនុំដែលមានធាតុ a នៃ N ប្រៀបបាននឹងធាតុឯទៀតៗ គឺ ថា បើ $b \in N$ នោះ គេបាន $a \geq b$ ឬ $b > a$ ។ យើងឃើញថា $0 \in A$ (ដូច្នេះ $A \neq \emptyset$) ម្យ៉ាងទៀត $a \geq b \Rightarrow a+1 \geq b$ ហើយ $b > a \Rightarrow b \geq a+1$ ។ ដូច្នេះ $a \in A \Rightarrow a+1 \in A$ ហើយតាមគោលការណ៍ វេការ៉េង $A = N$ ។

<u>កម្មសិទ្ធិ នៃ វិសមាមាត្រ (Propriétés des inégalités)</u>

ដោយហេតុថា លំដាប់កំណត់លើ N ជាលំដាប់ទាំងមូល នោះ គេអាចទាញយកផលវិបាកដោយងាយ ដូចតទៅ ដែលហៅថា « **កម្មសិទ្ធិនៃ វិសមាមាត្រ** » ហើយដែលសំខាន់យ៉ាងខ្លាំងចំពោះ សិស្ស ក្នុងការប្រើប្រាស់ ។

<u>ការស្នើ (III, 5, 3)</u>

ទំនាក់ទំនង $a \geq b$ មានន័យស្មើគ្នានឹង $a + c \geq b + c$

ហើយ $a > b$ **មានន័យស្មើគ្នានឹង** $a + c > b + c$ ។

<u>ការស្នើ (III, 5, 4)</u>

បើ $c \neq 0$ ទំនាក់ទំនង $a \geq b$ មានន័យស្មើគ្នានឹង $ac \geq bc$

ហើយ $a > b$ **មានន័យស្មើគ្នានឹង** $ac > bc$ ។

តាមនិយមន័យ $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$ និង $ac \geq bc$

ហើយក៏ដូចគ្នាដែរ $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ និង បើ $(c \neq 0)$ $ac > bc$ ។

ការផ្ទុយទៅវិញ បង្ហាញដោយ <u>មិនសមហេតុសមផល</u> ដោយសង្កេតថា

$$non\,(\,y\ \geq x)\ <=>\ \ y < x$$

នេះជារបៀបបង្ហាញ ដែលក្នុងភាសាដឹងដោយការពិភាល់ (langage intuitif) គេថា ការសង្កេតគ្រប់ករណី ដែលអាចមានទាំងអស់ (examen de tous les cas possibles)។

ដូចជាឧទាហរណ៍នៅទីនេះគឺ ៖

ក្នុងការស្នើ (III,5,4) មានពីរ ផ្នែក ផ្នែកទី ១ គឺ

បើ $c \neq 0$ ទំនាក់ទំនង $a \geq b$ => $ac \geq bc$ (1)

ហើយផ្នែកទី ២ ដែលផ្ទុយពីផ្នែកទី ១ គឺ

បើ $c \neq 0$ ទំនាក់ទំនង $ac \geq bc$ => $a \geq b$ (2)

ឥឡូវនេះ យើងចង់បង្ហាញ (2) ដោយប្រើការប្រកែក ឬ បង្ហាញដោយ មិនសមហេតុសមផល ។ យើងថា ការអះអាង (2) នេះខុស គឺថា $non(\,a\ \geq b\,)$ ។

$non(a \geq b)$ => $a < b$ => ដោយ $(c\ \neq 0\,)$ => $\boldsymbol{ac} < bc$ [ដោយប្រើ (1) នៃ ការស្នើ (III, 5, 4)] ដែលខុសពី សម្មតិកម្ម នៃ (2) ។ ដូច្នេះ មានតែ $a\ \geq b$ ។

គឺថាការប្រកែក $non(\,a\ \geq b\,)$ នោះមិនត្រូវទេ ។