4. បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន (les cardinaux finis)

និយមន័យ-I

បកតិសំខ្យា a មួយ មានព្រំដែន (គឺមិនទៅដល់អនន្ត) កាលណា a បំពេញលក្ខណៈ $a+1 \neq a$ ហើយ សំនុំ មួយ មានព្រំដែន ឬ មិនមានព្រំដែន[1] ទៅតាម បកតិសំខ្យា របស់សំនុំនោះ មានព្រំដែន ឬ មិនមានព្រំដែន ។ បកតិសំខ្យា មានព្រំដែន ហៅថា ចំនួនគត់ធម្មតា **(nombres entiers naturels)** ។

និយមន័យនេះ ជាដំបូង គួរឲ្យភ្ញាក់ ត្រូវនឹងគំនិតដែលថា វត្ថុតែមួយ គឺមើលមិនឃើញទេ នៅចំពោះមុខវត្ថុដ៏ច្រើនឥតគណនា ។

ការស្មើ (III, 4, 1)

ទំនាក់ទំនង "a ជា បកតិសំខ្យាមួយ មានព្រំដែន" **មានន័យស្មើនឹងថា** "$a+1$ ជាបកតិសំខ្យាមួយ មានព្រំដែន" ។

ដោយយក **ការស្មើ (III, 3, 5)** មកប្រើ $a = b <=> a+1 = b+1$

ដោយ យក $b = a + 1$ យើងបាន ៖ $a = a+1 <=> a+1 = (a+1)+1$ ។

<u>ឧទាហរណ៍ នៃ បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន</u>

ទំនាក់ទំនង $0 \neq 1$ ដែលបានពីមុននោះ បង្ហាញថា សូន្យ ជា បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន ក៏ដូច បកតិសំខ្យា 1, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, …. ដូច្នេះ ចំពោះ បកតិសំខ្យាទាំងអស់ ដែល បានមក [អំពី 0 បូកនឹង 1] ហើយ [បូកនឹង 1 ម្តងទៀត] ដដែលៗ តមក ។ យើង ទទួលយក ជា ស្វ័យស័ត្យ (nous admettrons comme axiome) ថា បកតិសំខ្យា មានព្រំដែន អាចបានដោយ របៀបនេះ ។ តែ ស្វ័យស័ត្យនេះ នឹងថ្លែង ឲ្យបានច្បាស់

---

[1] ដោយការសិក្សាតទៅនេះ គេថា សំនុំមួយមានព្រំដែន កាលណា សំនុំនោះ ពុំមាន ប៊ីសេចស្យុង លើផ្នែកណាមួយ របស់ខ្លួន ក្រៅតែពីខ្លួនឯងតែម្តង ។

និង អាចប្រើប្រាស់បាន ដូចតទៅនេះ ៖

ស្វ័យស័ត្យ នៃ អនន្ត (Axiome de l'INFINI).

បកតិសំខ្យាមានព្រំដែនទាំងអស់ ផ្សំបានជាសំនុំមួយ ។

ស្វ័យស័ត្យថ្មីនេះ អាចឲ្យយើងយក ពាក្យក្នុងទ្រឹស្តីសំនុំ មកប្រើបានចំពោះ **ចំនួនគតធម្មតា** ។ ជាពិសេស អាចឲ្យយើងថ្លែង គោលការណ៍ រេគារ៉េង់ (principe de récurrence) ដោយច្បាស់លាស់ដូចខាងក្រោមនេះ[2] ៖

ការថ្លែងមួយទៀត របស់គោលការណ៍ រេគារ៉េង់

បើ N ជាសំនុំនៃចំនួនគត់ធម្មតា ហើយបើ A ជាផ្នែកមួយនៃ N ។

បើ $0 \in A$ និង $a \in A \Rightarrow a+1 \in A$ នៅពេលនោះ $A = N$ ។

ការកត់ត្រា (Notations)

នៅទីនេះ យើងសន្មត ថា សូន្យ នៅក្នុងសំនុំ នៃចំនួនគត់ធម្មតា ហើយយើង តាំងដោយ $\mathrm{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2} \;\ldots\ldots\ldots, \boldsymbol{n} \;\ldots\ldots\}$ សំនុំនោះ ។ តែនៅក្នុងសំនួរខ្លះ គេត្រូវយកតែ ចំនួនគត់ធម្មតា ខុសពី សូន្យ ហើយគេតាំងដោយ N^* សំនុំនោះ។ យើង នឹងតំកល់ នូវកម្មសិទ្ធិ ជាលក្ខណៈនៃ ចំនួននៅក្នុងសំនុំ N^* នេះ ដែលត្រូវការ ជាញយនៅខាងមុខ (ជាពិសេស កាលណាយើងសិក្សា ពី វិទ្យាស្សុងលំដាប់ នៅលើ N) ។

ការស្នើ (III, 4, 2)

ដើម្បី a ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន មិនសូន្យ នោះត្រូវតែ (il faut) និងគ្រាន់តែ (et il suffit) គេអាចរកបាននូវ បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន x មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

$a = x + 1$ ។

[2] គេឆ្លង ពី ការថ្លែងមួយ ទៅការថ្លែងមួយទៀត ដោយ តាំង A ជាសំនុំនៃបកតិសំខ្យាមានព្រំដែន ដែលបំពេញលក្ខណ្ឌ របស់ទំនាក់ទំនង R ។

1/ លក្ខណ្ឌត្រូវតែ (condition nécessaire)

x បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន
$a = x + 1$
→ a ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន មិនសូន្យ

$a = x + 1 \Rightarrow a \neq 0$ ដោយ **ការស្នើ** **(III, 3,** 3)

2/ លក្ខណ្ឌគ្រាន់តែ (condition suffisante)

a ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន មិនសូន្យ => អាចរក x បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a = x + 1$ ។

យើងតាំងដោយ A សំនុំមិនទទេ $(A \neq \emptyset)$ ដូច្នេះ A យ៉ាងហោចណាស់ មានធាតុ $\propto$ មួយដែរ ។ ដូច្នេះ យើងតាង $A = \{\propto\} \cup A'$ ។ សំនុំ A' អាចទទេ តែ A' មិនជាន់នឹង $\{\propto\}$ ទេ ។ ដូច្នេះ $card(A) = card[\{\propto\} \cup A'] = card(\{\propto\}) + card(A')$

ឬ $card(A) = 1 + card(A')$ => ដូច្នេះ $a = card(A)$ ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន មិនសូន្យ នោះគេមាន បកតិសំខ្យា $x = card(A')$ ដែលឲ្យ $a = 1 + x$ ។ ដូច្នេះ x មានព្រំដែន ដោយ **ការស្នើ** **(III, 4,** 1) ។

យើងអាច ធ្វើការដេញរកហេតុផល ដោយ ការប្រកែកនូវផល (raisonnement par absurde) គឺថា ឧបមា [3] $\forall x \in N,\ a \neq x + 1$ ហើយដល់ទីបញ្ចប់ យើងត្រូវទៅដល់ការប្រកែកនៃហេតុ តែដោយហេតុគេឲ្យ ដូច្នេះយើងមិនអាចប្រកែកហេតុនោះបានទេ ។

---

[3] ចូរចាំថា នៅក្នុង គណិតសាស្ត្រ ការប្រកែក របស់ $\exists x \in N$ គឺ $\forall x \in N$ ។
ហើយការប្រកែក របស់ $=$ គឺ $\neq$ ។ $\exists x \in N$ មានន័យថា យ៉ាងហោចណាស់ មាន x មួយ នៅក្នុង N ។
ដូច្នេះ ចំពោះ $\exists x \in N$ ដែលឲ្យ $a = x + 1$ ដោយប្រកែកទៅជា
$\forall x \in N,$ គេត្រូវបាន $a \neq x + 1$ ។

ដូច្នេះ បើយើងថា $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{x}+\mathbf{1}$ តើវានឹងផ្តល់លទ្ធផលដូចម្តេច?

យើងតាងដោយ A = N – {a} **(1)**

ដោយ a មិនសូន្យ ហើយ $0 \in N$ ដូច្នេះ ដោយ **(1)**, $0 \in A$ ហើយ $\forall x \in N,\ x+1 \in A$

(ពីព្រោះ $x+1 \neq a$ ហើយ សំនុំ A និង N ខុសគ្នាតែធាតុ a មួយប៉ុណ្ណោះ) ។

ដូច្នេះ A ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង គោលការណ៍ រេការ៉ង់ => $A = N$ ដែលខុស ពីព្រោះ **(1)** ។

<u>អនុសាធ្យ (Corollaire)</u>

ការអនុវត្តន៍ $x \longrightarrow x+1$ ជា ប៊ីសេចស្យុង ពី N ទៅ N^* ។

មុននឹងពន្យល់អនសាធ្យនេះ ខ្ញុំសូមធ្វើការសង្កេតដូចតទៅនេះ ៖

ដើម្បី បញ្ជាក់ថា ការអនុវត្តន៍ f ប៊ីសេចទីវ ត្រូវ f អាំងសេចទីវផង និង សៀសេចទីវផង ។

ចំពោះ **ការស្នើ (III, 3,** 5) $a+1=b+1 \ => \ a=b$ មានន័យ ដូចជាថា

ការអនុវត្តន៍ $f:\ N \longrightarrow N$

$x \longrightarrow x+1$ អាំងសេចទីវដែរ ។

ពីព្រោះតាមនិយមន័យ អាំងសេចទីវ គេថា f អាំងសេចទីវដែរ ពី X ទៅ Y

កាលណា $[x1 \neq x2 \ => \ f(x1) \neq f(x2)]$ នេះក៏ដូចជាថា ដោយការប្រកែក

$\{non\,[f(x1) \neq f(x2)] \ => non[x1 \neq x2]\} \Leftrightarrow \{[f(x1) = f(x2)] => [x1 = x2\}]\}$ ។

ដោយការសង្កេតនេះ ការអនុវត្តន៍ $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}+\mathbf{1}$ អាំងសេចទីវ ពី N ទៅ N^*

ដោយប្រើ ការស្នើ (III, 3, 5) ។

ដោយប្រើ **ការស្នើ (III, 4,** 2) និងនិយមន័យ សៀសេចទីវ នោះយើងឃើញថា

ការអនុវត្តន៍ $x \longrightarrow x+1$ សៀសេចទីវ ពី N ទៅ N^* ដែរ ។ ពីព្រោះថា

តាម **ការស្នើ (III, 4,** 2) មានន័យថា ៖ $\forall a \in N^*$ គេមាន $x \in N$ ដែលឲ្យ $a = x+1$

$f:\ N \longrightarrow N^*,\ f(x) = x+1.$

$x------ \quad a$ ដែលឲ្យ $a = x+1$ ។

ដូច្នេះ ការអនុវត្តន៍ $x \;----\to\; x+1$ ប៊ីសេចទីវ ពី N ទៅ N^* ។

<u>**គំនិតរបស់ខ្ញុំ**</u>

នេះជាគំនិតរបស់ខ្ញុំទេ លោកអ្នកអាចលោតផ្នែកនេះ ទៅមេរៀននៅផ្នែកបន្ទាប់បាន ។

យើងមើលតាមនិយមន័យ ឃើញថា N មាន ជាតុ 0 ហើយ N^* ឥតមានជាតុ 0 ទេ ។

តែ ស្រាប់ តែមាន ប៊ីសេចស្យុង រវាង N និង N^* ។ នេះមកអំពី អ្វី?

ថ្វីបើ N និង N^* ខុសគ្នាតែ ជាតុ 0 មួយប៉ុណ្ណោះ ក្រៅពីនោះមានជាតុដូចគ្នាទាំងអស់ ។

តែ សំនុំទាំងពីរនេះមិនធម្មតាទេ គេមានជាតុដ៏ច្រើនអនេក ពីព្រោះគេសន្មតថា

បើ $\boldsymbol{a}$ នៅក្នុងសំនុំ $\boldsymbol{N}$ នោះ $\boldsymbol{a+1}$ ក៏នៅក្នុងសំនុំ $\boldsymbol{N}$ ដែរ ។

បើយើងបែរ រឿងក្នុងជីវិតវិញ a បូកនឹង 1 មិនច្រើនទេ 1 នោះ ។ តែដល់បូក បន្ត 1 ហើយ 1ទៀត នោះអាចច្រើនរហូតដល់រាប់មិនអស់ ដូច សំនុំ N ដែលមានជាតុច្រើនអនេកអញ្ចឹង ។ ដូច្នេះ កុំមើលងាយ ពាក្យចាស់លោកថា « **តក់ៗ ពេញបំពង់** » (ដូចទឹកត្នោត) ។ ម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ N និង N^* ខុសគ្នាដោយជាតុ 0 មែនពិត តែដោយមានជាតុច្រើនអនេក នោះគេមើលមិនឃើញទេ ជាតុតែមួយនោះ ។ ដូចគេ ជាអ្នកមានប្រាក់ច្រើនរាប់លានរាប់កោដិ ហើយយើងមានតែ មួយពាន់ នោះគេមើលយើងមិនឃើញទេ កុំតូចចិត្តអី ខំតទៅទៀតទៅ ។ តែបើប្រៀបធៀបនឹងការចេះដឹងវិញ យើងចេះមែនពិត តែអាចមានគេចេះច្រើនជាងយើង ដូច្នេះយើងគប្បីដាក់ខ្លួនប្រសើរជាង ។ ហើយក៏មានសុភាសិតខ្មែរយើងមួយថា « **ងើយវាស្កក អោនវាដាក់គ្រាប់** » (នេះលោកប្រៀបធៀបទៅនឹងដើមស្រូវក្នុងស្រែ) ។

ខ្ញុំសូមជូន ឧទាហរណ៍ ចំពោះ ការអនុវត្តន៍ អាំងសេចទីវ និង សៀសេចទីវ ៖

ខ្ញុំតាំងដោយ A សំនុំនៃប្រជាជននៅក្នុងភូមិកំណើតខ្ញុំ ដែលមាន ក្មេងប្រុស ក្មេងស្រី កម្លោះ ក្រមុំ មនុស្សមានប្ដីប្រពន្ធ ស្រីមេមាយ ប្រុសពោះមាយ ជាដើម។

នៅក្នុង A (ភូមិខ្ញុំ) នោះ ខ្ញុំតាងដោយ **X សំនុំ នៃប្តី** ហើយ **Y សំនុំនៃប្រពន្ធ**

ហើយ f ការអនុវត្តន៍ ពី X ទៅ Y ។ ដូច្នេះ $X \subset A$ ហើយ $Y \subset A$ ។

$$X \; ----f----\rightarrow \; Y$$
$$x \quad --f--\rightarrow \quad y$$

យើងសន្មត ថា ប្រុសម្នាក់ មានប្រពន្ធតែមួយ ហើយ ស្រីម្នាក់មានប្តីតែមួយ

ហើយអ្នកទាំងពីរ រស់នៅជាមួយគ្នានៅក្នុងភូមិ A ។

1/ f អាំងសេចទីវ បានន័យថា ៖

$[\, x1 \neq x2 \;\; => \;\; f(x1) \neq f(x2)$ ឬ $y1 \neq y2 \,] \Leftrightarrow$

[ប្តី ពីរ ផ្សេងគ្នា => ស្រីជាប្រពន្ធ ក៏ ផ្សេងគ្នាដែរ]

2/ f សឺរ្យសេចទីវ បានន័យថា ៖

$\forall y \in Y, \;\; \exists\, x \in X$ ដែលឲ្យ $f(x) = y$ $\Leftrightarrow$ បើគេយក ប្រពន្ធណាក៏ដោយនៅក្នុង

សំនុំ Y នោះគេអាចរកប្តីរបស់អ្នកនោះ

នៅក្នុងសំនុំ X បានជានិច្ច ។ **(ចប់)**

===

ឥឡូវនេះ ខ្ញុំ ត្រឡប់មក មេរៀនយើងវិញ

យើងឃើញថាមាន ប៊ីសេចស្យុង ពី N ទៅ N^* ។

ដូច្នេះ យើងអាចទាញ លទ្ធផល បានជា : $\boldsymbol{card(N) = card(N^*)}$

ហើយដោយម្យ៉ាងទៀត $card(N) = card(N^*) + 1$ នោះយើងអាចថ្លែងថា ៖

ការស្នើ (III, 4, 3)

N ជាសំនុំ អនន្ត (N est un ensemble infini.)

ពីព្រោះ ៖ $card(N) = card(N^*) + 1$ ហើយដោយ : $\boldsymbol{card(N^*) = card(N)}$

ដូច្នេះ $card(N) = card(N) + 1$ ដែល មិនអាចមាន ចំពោះ $card(N)$ ជា

បកតិសំខ្យា មានព្រំដែន ។ ដូច្នេះ ត្រូវតែ N ជាសំនុំអនន្ត ។

ការថ្លែងម្យ៉ាងទៀត ចំពោះស្វ័យសត្យនៃអនន្ត (Autre énoncé de l'axiome de l'Infini)

យើងទើបនឹងឃើញថា ស្វ័យសត្យនៃអនន្ត សន្មតនូវផលវិបាក ថាមាន សំនុំអនន្ត (l'existence d'un ensemble infini) ។ ប្រាស់មកវិញ យើងអាចពន្យល់ថា ដោយមាន សំនុំអនន្ត នោះបណ្ដាលឲ្យមាន ស្វ័យស័ត្យនៃអនន្ត ។ ដូច្នេះយើងអាចជំនួសការថ្លែងនូវ ស្វ័យស័ត្យនៃអនន្ត ដោយ ការថ្លែងសមមូលថា ៖ **« សំនុំអនន្តមាន »** (Il existe un ensemble infini) ។ ហើយមកពីនេះបានជាមានឈ្មោះដែលគេឲ្យថា ស្វ័យស័ត្យ « នៃអនន្ត » ។

បូក និង គុណ នៃបកតិសំខ្យាមានព្រំដែន

យើងមើលទៅដូចជាសំដែរ ដោយថា បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន បូក នឹងគ្នា ឬ គុណនឹងគ្នា នោះបានជា បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន ។ ដោយគោលការណ៍ រេគារ៉ង អាចឲ្យយើងពន្យល់ការសំនេះ ដោយតឹងរ៉ឹងបាន ។

ការស្នើ (III, 4, 4)

ដើម្បីឲ្យ ផលបូក $a+b$ នៃ បកតិសំខ្យាពីរ a និង b មានព្រំដែន នោះ ត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ a និង b ទាំងពីរ មានព្រំដែន ។

1/ លក្ខណ្ឌត្រូវតែ (condition nécessaire)

a និង b បកតិសំខ្យា

a និង b ទាំងពីរ មានព្រំដែន => $(+b)$ មានព្រំដែន (1) ។

បង្ហាញ ៖ យើងនឹងបង្ហាញ ដោយ រេគារ៉ង លើ (1) ។

$b \in N$ យើងទុកនៅដដែល ហើយយើង ឲ្យ a យកចំនួន តាំង ពី $0, 1, 2, \ldots\ldots, a$

បំណងយើងគឺ បង្ហាញថា (1) ត្រូវ ចំពោះ គ្រប់ចំនួន a ទាំងអស់ ។

យើងតាងដោយ A សំនុំនៃធាតុ a ដែលឲ្យ (1) ត្រូវ គឺថា $(+b)$ **មានព្រំដែន ។**

-ចំពោះ $a = 0$, យើងបាន ៖ $0 + b = b$ (មានព្រំដែន ដោយសម្មតិកម្ម) ដូច្នេះ **(1) ត្រូវ**

=> $0 \in A$ ។ ហើយយើងសន្មតថា **(1) ត្រូវ** រហូតដល់ $a = a$ គឺថាយើងបាន

<u>$a \in A$ និង $(a + b)$ មានព្រំដែន</u> ។ ឥឡូវយើងត្រូវបង្ហាញថា ចំពោះ $a = a + 1$, **(1)** នៅតែត្រូវដដែល ។

-ចំពោះ $a = a + 1$, **(1)** ទៅជា ៖ $(a + 1) + b = (a + b) + 1$

ដោយយើងបានសន្មតថា $(a + b)$ មានព្រំដែន នោះតាម <u>**ការស្មើ (III, 4,** 1</u>

$(a + b) + 1$ ក៏មានព្រំដែនដែរ ។ ដូច្នេះ $(a + 1) \in A$ ។ ដូច្នេះ យើងឃើញថា

$a \in A$ => $(a + 1) \in A$ ដូច្នេះ $A = N$ ។

នៅទីបញ្ចប់ ៖ $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{N}$ និង $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N}$ => $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{N}$ ។

<u>2/ លក្ខណ្ឌគ្រាន់តែ (condition suffisante)</u>

a និង b បកតិសំខ្យា

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ មានព្រំដែន => [$\boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{b}$ **មានព្រំដែន** ⇔ $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{N}$ និង $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N}$ **]**

<u>បង្ហាញ</u> ក្នុងការបង្ហាញនេះ យើងប្រើ **ការស្មើ (III, 4,** 1)

$(a + b)$ មានព្រំដែន => $(a + b) + 1 = (a + b + 1)$ មានព្រំដែន =>

$(a + b + 1) + 1 = (a + 1) + (b + 1)$ មានព្រំដែន ។

ដូច្នេះ $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ **មានព្រំដែន => $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{1}) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{1})$ មានព្រំដែន** (2)

ក៏ដូចជាយើងថា បើយើងតាងដោយ A និងដោយ B សំនុំ ដែល $a \in A$ និង $b \in B$

នោះ គេបាន $(a + b)$ មានព្រំដែន ។ ទំនាក់ទំនង (2) មានន័យថា ៖

$a \in A$ និង $b \in B$ => $(a + 1) \in A$ និង $(b + 1) \in B$ ដូច្នេះ $\boldsymbol{A = N}$ និង $\boldsymbol{B = N}$

នេះតាម ស្វ័យស័ត្យ នៃ អនន្ត (Axiome de l'INFINI) ។

នៅទីបញ្ចប់ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\in \boldsymbol{N}$ => $\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{N}$ និង $\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{N}$ ។

<u>ការស្នើ (III, 4, 5)</u>

$\boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{b}$ ជាបកតិសំខ្យា ។ ផលគុណ $\boldsymbol{ab}$ មានព្រំដែន កាលណា $\boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{b}$ ទាំងពីរ មានព្រំដែន ។

ដោយយើងទុក ជាតុ $b\in N$ មិនឲ្យកំរើក ហើយយើងតាងដោយ A សំនុំ នៃបកតិសំខ្យា a ដែលមានព្រំដែន ហើយដែលឲ្យ ផលគុណ ab មានព្រំដែន ។

ដូច្នេះ $0\in A$ ពីព្រោះ $0\times b=0$ (មានព្រំដែន តាមនិយមន័យរបស់ សូន្យ)

ដូច្នេះ បើ ab មានព្រំដែន ហើយដោយ $b\in N$ ក៏មានព្រំដែនដែរ ដូច្នេះ តាម ការស្នើ (III, 4, 4) $ab+b=(a+1)b$ ក៏មានព្រំដែន ដែរ ។

ដូច្នេះ $a\in A$ => $(a+1)\in A$ ដូច្នេះតាម គោលការណ៍រេគារ៉ង់ $A=N$ ។

<u>ការស្នើ (III, 4, 6)</u> (នេះជាការពង្រីក នៃការស្នើ (III, 4, 5))

បើ $\boldsymbol{a}$ ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន ហើយ $\boldsymbol{b}$ និង $\boldsymbol{c}$ ជាបកតិសំខ្យាទូទៅ ដែលបំពេញ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ នោះ គេបាន $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ ។

យើងធ្វើការបកស្រាយ ដោយប្រើ គោលការណ៍ រេគារ៉ង់ លើ a ។ យើងតាងដោយ A សំនុំ នៃបកតិសំខ្យា a មានព្រំដែន ដែលបំពេញ $a+b=a+c$ => $b=c$ ។

ជាដំបូងយើងឃើញថា $0\in A$ ពីព្រោះ $0+b=0+c$ => $b=c$

ឥឡូវយើងសន្មតថា យើងមាន a មានព្រំដែន ដែលបំពេញ

[$a+b=a+c$ => $b=c$] **(1)**

ហើយយើងត្រូវបង្ហាញថា **(1)** នេះ ក៏ត្រូវចំពោះ $(a+1)$ ដែរ គឺ៖

$$(a+1)+b=(a+1)+c \implies b=c$$

ឥឡូវយើងចេញដំណើរពី

$(a+1)+b = (a+1)+c$ (2)

ដោយប្រើ លក្ខណៈផ្តុំ និង ត្រលប់ យើងអាចសរសេរ (2) ទៅជា ៖

$(a+b) + 1 = (a+c)+1$ ហើយដោយប្រើ ការស្មើ (III, 3, 5) យើងបាន

$(a+b) = (a+c)$ => $b = c$ ដោយសំអាងលើ **(1)** ។

ដូច្នេះ $(a+1)+b = (a+1)+c$ => $b=c$ ។ ដូច្នេះ $A = N$ ។