

II-5. ប្រភាគ អាណាមូនីក (un rapport anharmonique) បានដោយចំនួនពិតបួន

a, b, c, d ខុសពីគ្នានោះ គឺជាចំនួន $r(a, b, c, d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ ដោយ r ជាអនុគមន៍
មាន អថេរ (a, b, c, d) ។

a/ បង្ហាញ រឿងស្បង់ $r(a, b, c, d) + r(a, c, b, d) = 1$

b/ គេតាងដោយ $k = r(a, b, c, d)$ ។ ចូររក សំនុំនៃចំនួន

$$h(p) = r[p(a), p(b), p(c), p(d)]$$

ដោយ p សំដៅ ព័ត៌មានស្បង់ណាមួយ នៃ $\{a, b, c, d\}$ ។ [គេនឹងប្រើលទ្ធផលនៅ
ក្នុងចំណោម II-4 ដើម្បីបង្ហាញថាគេ អាចកំរិតត្រឹមតែ ករណី $p(a) = a$]

c/ តើមានចំនួន $k = r(a, b, c, d)$ ណាខ្លះ ដែលធ្វើឲ្យសំនុំ នៃចំនួន $h(p)$ មានជាតុខុសពីគ្នា
តិចជាងប្រាំមួយ ហើយ ចូរឲ្យនូវធាតុទាំងនោះ ។

----- ចម្លើយ -----

មុននឹងឆ្លើយ ខ្ញុំសូមទាញអារម្មណ៍ នូវអនុគមន៍ ដែលមាន អថេរ លើសពីមួយ ដូចជា

$$f(x, y) = 2x + 5y \text{ ជាដើម ។}$$

ជាដំបូង ត្រូវកត់សំគាល់ថាគូ (x, y) មិនដូចគ្នា (y, x) ទេ ។ បើអថេរ មិនដូចគ្នា ដូច្នេះ

ជាទូទៅ រូបភាពនៃ អថេរ ដោយអនុគមន៍ ក៏មិនដូចគ្នាដែរ គឺថា $f(x, y)$ និង $f(y, x)$

មិនដូចគ្នា ។ ដូចក្នុងឧទាហរណ៍នេះ

$$f(x, y) = 2x + 5y \Rightarrow \text{ចំពោះអនុគមន៍ } f \text{ អថេរមួយ គុណនឹង } 2 \text{ ហើយអថេរទីពីរ គុណនឹង}$$

$$5 \text{ ដូច្នេះ } f(y, x) = 2y + 5x \quad ។$$

a/ បង្ហាញ រឿងស្បង់ $r(a, b, c, d) + r(a, c, b, d) = 1$

$$\text{តាមនិយមន័យ} \quad r(a, b, c, d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \quad (1) \quad \text{ឲ្យ ៖}$$

$$r(a, b, c, d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

$$r(a, c, b, d) = \frac{b-a}{b-c} : \frac{d-a}{d-c} = \frac{(b-a)(d-c)}{(b-c)(d-a)}$$

$$\text{ដូច្នេះ } r(a, b, c, d) + r(a, c, b, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} + \frac{(b-a)(d-c)}{(b-c)(d-a)} = \frac{(c-a)(d-b) - (b-a)(d-c)}{(c-b)(d-a)} = 1$$

b/ ចូររក សំនុំនៃចំនួន $h(p)$ ដោយ $h(p) = r[p(a), p(b), p(c), p(d)]$ (2)

p ជា ពែមុតាស្យុង នៃបួនចំនួន a, b, c, d

បើយើងតាង $a' = p(a)$, $b' = p(b)$, $c' = p(c)$, $d' = p(d)$ នោះ

$h(p) = r(a', b', c', d')$ ហើយរកចំនួនទាំងឡាយនៃ $h(p)$ គឺ រកចំនួន នៃ ប្រភាគ

$r(a', b', c', d')$ ចំពោះ ពែមុតាស្យុងទាំងឡាយនៃចំណុច A, B, C, D ដែលមានអាប់ស៊ី

a', b', c', d' ។ ដោយ ពែមុតាស្យុងនៃចំណុច A, B, C, D មានទាំងអស់ 24 នោះយើង

ត្រូវគណនា $r(a', b', c', d')$ 24 ដងដែរ ។ តែដោយ ការសង្កេតចុងក្រោយនៅក្នុង

ចម្លើយនៃចំណោទ II-4 ចំពោះអនុគមន៍ r នេះ យើងគ្រាន់តែរក $r(a', b', c', d')$

ចំពោះតែ ពែមុតាស្យុង ដែលមានតួអក្សរដើម A គ្រប់គ្រាន់ហើយ គឺថា

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} ABCD \\ ABDC \\ ACBD \\ ACDB \\ ADBC \\ ADCB \end{array} \right.$$

ចំពោះពែមុតាស្យុង ABCD យើងគណនា $r(a, b, c, d)$ (p1)

ចំពោះពែមុតាស្យុង ABDC យើងគណនា $r(a, b, d, c)$ (p2)

ចំពោះពែមុតាស្យុង ACBD យើងគណនា $r(a, c, b, d)$ (p3)

ចំពោះពែមុតាស្យុង ACDB យើងគណនា $r(a, c, d, b)$ (p4)

ចំពោះពែមុតាស្យុង ADBC យើងគណនា $r(a, d, b, c)$ (p5)

ចំពោះពែមុតាស្យុង ADCB យើងគណនា $r(a, d, c, b)$ (p6)

តែដោយលទ្ធផល នៃសំនួរ a/ គឺ $(p1) + (p3) = 1$ (ដោយទុកអក្សរខាងចុងនៅដដែល

ហើយប្តូរគ្នាតែអក្សរនៅកណ្តាល) នោះ យើងក៏បាន $(p2) + (p5) = 1$ ហើយនិង

$(p4) + (p6) = 1$ ។ ដូច្នេះ យើងគណនាតែ $(p1)$ $(p2)$ $(p4)$ ហើយបន្ទាប់ មក ដើម្បីរក $(p3)$

យើងយក $(p3) = 1 - (p1)$ ។

ដោយយក $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ នោះយើងបាន៖

$$(p1) \ r(a,b,c,d) = r(1,2,3,4) = \frac{3-1}{3-2} : \frac{4-1}{4-2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$(p2) \ r(a,b,d,c) = r(1,2,4,3) = \frac{4-1}{4-2} : \frac{3-1}{3-2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$(p3) \ r(a,c,b,d) = r(1,3,2,4) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$(p4) \ r(a,c,d,b) = r(1,3,4,2) = \frac{4-1}{4-3} : \frac{2-1}{2-3} = \frac{3}{1} \times \frac{-1}{1} = -3$$

$$(p5) \ r(a,d,b,c) = r(1,4,2,3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(p6) \ r(a,d,c,b) = r(1,4,3,2) = 1 - (-3) = 4 \text{ ។}$$

ដូច្នេះ បើយើងតាងដោយ H ជាសំនុំនៃ ចំនួន $h(p)$ យើងបាន

$$H = \left\{ \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3}, -3, \frac{1}{4}, 4 \right\} \text{ ។}$$

c/ តើមានចំនួន $k = r(a,b,c,d)$ ណាខ្លះ ដែលធ្វើឲ្យសំនុំនៃចំនួន $h(p)$ មានធាតុតិចជាង 6

ឧសគ្គា

យើងឃើញហើយថា សំនុំ H មានចំនួនធាតុ 6 ឧសគ្គាទាំងអស់ ដើម្បីចំនួននោះតិចជាង

6 ទាល់តែ មានធាតុពីរមានតម្លៃស្មើគ្នា ។ ដោយសំនួរ a/ យើងឃើញវិទ្យាស្យង

$r(a,b,c,d) + r(a,c,b,d) = 1$ ។ បើវិទ្យាស្យង $r(a,b,c,d)$ និង $r(a,c,b,d)$ ស្មើគ្នានោះយើងនឹងបាន

សំនុំ H មានចំនួនធាតុតិចជាង 6 ។

$$r(a,b,c,d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

$$r(a,c,b,d) = \frac{b-a}{b-c} : \frac{d-a}{d-c} = \frac{(b-a)(d-c)}{(b-c)(d-a)}$$

$$r(a,b,c,d) = r(a,c,b,d) \Leftrightarrow \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{(b-a)(d-c)}{(b-c)(d-a)} \Rightarrow$$

$$(c-a)(d-b) + (b-a)(d-c) = 0$$

ដោយបំបែកកន្សោមពិជគណិត ជាផលគុណកត្តា យើងបាន៖

$$d(b+c) - a(-2d+c) + b(a-2c) = 0 \quad (3)$$

ដើម្បីឲ្យ កន្សោមពិជគណិត (3) ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ច លុះត្រាតែយើងយក ៖

$$b+c = 0, \quad -2d+c = 0 \quad \text{និង} \quad a-2c = 0$$

$$a-2c = 0 \Rightarrow a = 2c \quad \text{យើងយក} \quad c = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$-2d+c = 0 \Rightarrow 2d = c = 2 \Rightarrow d = 1$$

$$b+c = 0 \Rightarrow b = -c \Rightarrow b = -2$$

ដូច្នេះ បើយើងយក ៖ $a = 4, b = -2, c = 2, d = 1$ នោះ H មានធាតុតិចជាង 6 ។

តើ ធាតុទាំងនោះ គឺអ្វីខ្លះ ?

យើងត្រូវគណនា $(p1), (p2), (p3), (p4), (p5), (p6)$ ម្តងទៀតដោយប្រើចំនួន a, b, c, d

ថ្មីនេះ ៖

$$(p1) \ r(a,b,c,d) = r(4,-2,2,1) = \frac{2-4}{2+2} : \frac{1-4}{1+2} = \frac{-2}{4} \times \frac{3}{-3} = \frac{1}{2}$$

$$(p2) \ r(a,b,d,c) = r(4,-2,1,2) = \frac{1-4}{1+2} : \frac{2-4}{2+2} = \frac{-3}{3} \times \frac{4}{-2} = 2$$

$$(p3) \ r(a,c,b,d) = r(4,2,-2,1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(p4) \ r(a,c,d,b) = r(4,2,1,-2) = \frac{1-4}{1-2} : \frac{-2-4}{-2-2} = \frac{-3}{-1} \times \frac{-4}{-6} = 2$$

$$(p5) \ r(a,d,b,c) = r(4,1,-2,2) = 1 - 2 = -1$$

$$(p6) \ r(a,d,c,b) = r(4,1,2,-2) = 1 - 2 = -1$$

$$\text{ដូច្នេះ សំនុំ } H = \left\{ \frac{1}{2}, 2, -1 \right\} \quad \text{។}$$

===== ចប់ =====