៦. ការឆ្លើយឆ្លង - អនុគមន៍ - ការអនុវត្តន៍ (Correspondances, fonctions, applications)

ក/ ការឆ្លើយឆ្លង

គេឲ្យសំនុំពីរ A និង B ការឆ្លើយឆ្លងគ្នារវាង A និង B គឺកំនត់ដោយ រឺឡាស្យុង ទ្វិភាគ $R(x,y)$ រវាង ធាតុខ្លះ នៃ A និង ធាតុខ្លះនៃ B ។ ដូចជារឺឡាស្យុង « x មានរថយន្ត ម៉ាក y » ធ្វើការឆ្លើយឆ្លងរវាងមនុស្សនិងម៉ាករថយន្ត ។ រឺឡាស្យុង « បន្ទាត់ x កែង នឹង ប្លង់ y » និង « ចំណុច x នៅលើបន្ទាត់ y » កំនត់នូវការឆ្លើយឆ្លងរវាង វត្ថុខ្លះនៃ ធរណីមាត្រ ។

បើគេតាងដោយ C ការឆ្លើយឆ្លង រវាង A និង B ដោយ រឺឡាស្យុង $R(x,y)$ នោះការ ឆ្លើយឆ្លង រវាង B និង A កំនត់ដោយរឺឡាស្យុងដដែល ហៅថា ច្រាស (réciproque) នឹង រឺឡាស្យុងទីមួយ ហើយតាងដោយ C^{-1} ។ ដូច្នេះ បើ C ជា ការឆ្លើយឆ្លង រវាង ចំណុច នឹង បន្ទាត់នៅក្នុងប្លង់ កំណត់ដោយ « ចំណុច x នៅលើបន្ទាត់ y » នោះ ការឆ្លើយឆ្លង ច្រាស គឺ « បន្ទាត់ y កាត់តាម ចំណុច x » ។

បើសំនុំ A និង B តាងដោយខ្សែកោងបិទ នៅក្នុងប្លង់ ការឆ្លើយឆ្លង រវាង A និង B អាច បង្ហាញដោយ ព្រួញ ចេញពី A ហើយចប់នៅ B (មើល Fig. 4)

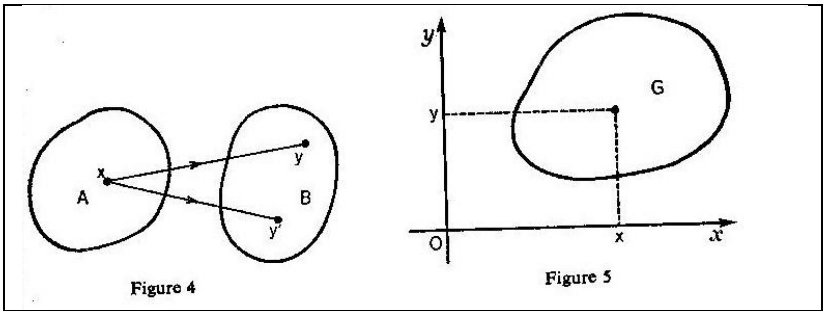

Figure 4 Figure 5

ហើយការឆ្លើយឆ្លងច្រាស កំនត់ដោយព្រួញ ចេញពី B ហើយចប់នៅ A ។ ចូរកត់សម្គាល់ថា សំនុំ A និង B នៅទីនេះ មិនចាំបាច់ត្រូវតែខុសគ្នាទេ ៖ រឺឡាស្យុងទ្វិភាគលើមួយសំនុំ កំនត់ការឆ្លើយឆ្លង ពីសំនុំនោះ ទៅសំនុំដដែល ។

ក្រាប (graphe)

ការឆ្លើយឆ្លង រវាង សំនុំ A និង សំនុំ B អាចកំនត់ដោយឲ្យនូវគូ (x,y) ទាំងឡាយ ដោយ $x \in A,\ y \in B$ ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $R(x,y)$; ហើយដោយស្វ័យស័ត្យសម្រាំង(IV) គូទាំងនោះអាចតាក់តែងផ្សំបានជាសំនុំ G ហៅថាក្រាបនៃ ការឆ្លើយឆ្លង ។

បើ A និង B ជាសំនុំនៃចំនួន គេអាចតាងក្រាប G ដោយគូរនៅលើក្រដាស អ័ក្សកូអរដោនេ Ox, Oy ហើយដោយដៅលើក្រដាស នូវចំណុចដែលមាន អាប់ស៊ីស x និង អរដោនេ y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងរីឡាស្យុង $R(x,y)$ ៖ នេះគឺការគូរក្រាបនៃ ការឆ្លើយឆ្លង (មើល Fig. 5).

គេត្រូវចាំថា G មិនមែនជាខ្សែកោង (pas nécessairement une courbe) ជានិច្ចនោះទេ ។

<u>២/ អនុគមន៍</u>

នៅក្នុងគណិតសាស្ត្រ គេគិតច្រើនតែទៅលើ ការឆ្លើយឆ្លងណា ដែល ចំពោះ x មួយនៃ A គេ<u>មានយ៉ាងច្រើន y មួយនៃ B</u> ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងរីឡាស្យុង $R(x,y)$ ។ ជាតុ y នោះ គេសំគាល់ដោយ សរសេរដូចជា $f(x)$ ឬ f_x ហើយហៅថា រូបភាពនៃ x ។ គេថា ការឆ្លើយឆ្លង $x \to y$ កំនត់នូវ អនុគមន៍ f មួយ មានអថេរ x ហើយយកតម្លៃក្នុង B ។ ដូច្នេះ រីឡាស្យុង $y = x - 1$ និង $y = (x^2 - 1)^{-1}$ កំនត់នូវអនុគមន៍[1] ដែលមាន x ជាអថេរ ។ អនុគមន៍នោះកំនត់ចំពោះ x ខ្លះ នៅក្នុងសំនុំចំនួនពិត ហើយយកតម្លៃនៅក្នុងសំនុំនោះ ដដែល ៖ គេថាជា អនុគមន៍យកចំនួនពិត (fonctions réelles) មានអថេរជាចំនួនពិត x (à variable réelle x)។ ក្រឡាផ្ទៃ នៃត្រីកោណ (aire d'un triangle)ជាអនុគមន៍យកចំនួនពិត កំនត់លើសំនុំនៃត្រីកោណ ក្នុងសំហអឺក្រីតឌីយៀង (l'ensemble des triangles de l'espace euclidien)។

[1] ដោយមិននិយាយថា « អនុគមន៍ f កំនត់ដោយរីឡាស្យុង $y = x - 1$ », គេច្រើននិយាយដើម្បីខ្លី « អនុគមន៍ $y = x - 1$ » ; នេះគឺការនិយាយដោយរំលោភ ដែលគេត្រូវជៀសវាង បើកាលណាអាចធ្វើឲ្យច្រឡំ ។ ក៏ដូចគ្នាដែរ គេមិនគប្បីនិយាយថា « អនុគមន៍ $f(x)$ » ទេ តែត្រូវថា « អនុគមន៍ f » ព្រោះថា រូបនិមិត្ត $f(x)$ សំដៅ បើនិយាយឲ្យចំ នូវរូបភាពនៃធាតុ x ។

សញ្ញាណសន្ទស្សន៍ (notion d’indice)

កាលណារូបភាព នៃ x សរសេរជា f_x គេថា f_x ជាធាតុនៃ B មានសន្ទស្សន៍ x ។ គេសរសេររបៀបនេះ កាលណា A ជាបំណែកមួយនៃ N (សំនុំចំនួនគត់)។

គ/ ការអនុវត្តន៍ (Applications)

ជាទូទៅ អនុគមន៍ មានអថេរ x មិនកំនត់គ្រប់តែ ចំនួន x នោះទេ [ដូចជាករណី អនុគមន៍ កំនត់ដោយ $y = (x^2 - 1)^{-1}$] ។ ជាតុ x ទាំងឡាយនៃ A ដែលគេអាចផ្ទ នឹង y បានដោយរីឡាស្យុង $R(x,y)$ តាក់តែងផ្សំបានជា សំនុំមួយ ដែលជាបំណែកមួយនៃ A ហើយគេហៅថា ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ f (domaine de définition de la fonction f) កំនត់ដោយរីឡាស្យុង R ។ ដូច្នេះដើម្បីកំនត់ អនុគមន៍ f គេត្រូវឲ្យដែនកំនត់ E ហើយនិងរូបភាពនៃចំណុចនីមួយៗរបស់ E ។

ដោយបារម្ភខ្លាចមិនច្បាស់ ទើបអ្នកគណិតសាស្រ្ត ច្រើនជំនួស ពាក្យ អនុគមន៍ ដោយ ពាក្យ ការអនុវត្តន៍ ។ ដោយមិននិយាយថា «អនុគមន៍ f មានតម្លៃក្នុង B ហើយមានដែនកំនត់ E » គេនិយាយដោយខ្លី ថា « ការអនុវត្តន៍ f ពី E ទៅ B » ។ បានន័យថា

ការអនុវត្តន៍ f ពី E ទៅ B គឺ ការឆ្លើយឆ្លង រវាង E និង B ដែល គ្រប់ជាតុនៃ E សុទ្ធតែមានជាតុឆ្លូនៅក្នុង B ហើយមានតែមួយគត់។

ការកត់ត្រា (notations)

f ជាការអនុវត្តន៍ ពី A ទៅ B ហើយ X ជាបំណែកមួយនៃ A ។ រូបភាពនៃជាតុទាំងឡាយរបស់ X តាក់តែងផ្សំបានជាសំនុំមួយ[2] ហៅថារូបភាពនៃ X ហើយតាងដោយ $f(X)$ ។ ផ្ទុយទៅវិញ បើ Y ជាបំណែកមួយនៃ B នោះជាតុទាំងឡាយនៃA ដែលមានរូប

[2] ដោយ ស្វ័យស័ត្យសម្រាំង(axiome de sélection)

ភាពនៅក្នុង Y តាក់តែងផ្សំបានជាសំនុំមួយ ហៅថា រូបភាពច្រាសនៃ Y (image réciproque de Y) ហើយតាងដោយ $f^{-1}(Y)$ ។ បើសំនុំ Y មានធាតុតែមួយគត់ y នោះ រូបភាពច្រាស សសេរដោយងាយជា $f^{-1}(y)$ ៖ គឺជាសំនុំនៃធាតុ $x \in A$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹង $f(x) = y$ ។ បើ A ជាផលគុណនៃពីរសំនុំ គេសរសេរដោយងាយជា $f(x,y)$ រូបភាពនៃគូ (x,y) ហើយ គេថា f ជាអនុគមន៍មាន ពីរអថេរ x,y ។

គេកត់សម្គាល់ថា បើ X ជាបំណែកមួយនៃ A ($X \subset A$) នោះ ទំនាក់ទំនង $y = f(x)$ កំនត់ ដោយការអនុវត្តន៍ ពី X ទៅ B ដែលហៅថា « ការបន្ថយ f ត្រឹម X » (restriction de f à X) ហើយតាងដោយ $f \mid X$ ។ ផ្ទុយទៅវិញ គេថា ការអនុវត្តន៍ F ជា « ការបន្តឲ្យវែង » (un prolongement) នៃការអនុវត្តន៍ f បើ f ជាការបន្ថយនៃ F ។

ជាចុងក្រោយ បើ f ជាការអនុវត្តន៍ ពី A ទៅ B ហើយ g ជាការអនុវត្តន៍ ពី B ទៅ C ការអនុវត្តន៍ផ្សំ $h = g \circ f$ គឺ ជាការអនុវត្តន៍ ពី A ទៅ C កំនត់ដោយ $h(x) = g[f(x)]$ ។

<u>និយមន័យ</u>

I. ការអនុវត្តន៍ f ពី A ទៅ B ហៅថា ស៊ៀសេចទីវ (surjective) បើ $f(A) = B$ ឬ ក៏ថា ម្យ៉ាងទៀត f ស៊ៀសេចទីវ (surjective) បើ គ្រប់ធាតុ y នៃ B មាន ធាតុ x នៃ A យ៉ាង ហោចណាស់ក៏មួយដែរ ដែលឲ្យ $f(x) = y$ ។ គេ ក៏ថាដែរ f ជា ការអនុវត្តន៍ ពី A <u>ទៅលើ</u> B[3] (f est une application de A sur B) ។

II. ការអនុវត្តន៍ f ពី A ទៅ B ហៅថា អាំងសេចទីវ (injective) បើ កាលណាទំនាក់ទំនង $f(x) = f(y)$ ឲ្យ $x = y$ [4] ឬ ក៏ថាម្យ៉ាងទៀត f អាំងសេចទីវ (injective) បើ កាលណា មានធាតុ x នៃ A យ៉ាង ច្រើនមួយ ដែលឲ្យ $f(x) = y$ (ចំពោះ $y \in B$ ដែលគេឲ្យ)[5]។

---

[3] លើ បានន័យថា យកធាតុទាំងអស់នៃ B

[4] បានន័យថា រូបភាពពីរ ដូចគ្នា នោះ ធាតុដើមនៃរូបទាំងពីរ ក៏ដូចគ្នាដែរ ។

III. ការអនុវត្តន៍ f ពី A ទៅ B ហៅថា ប៊ីសេចទីវ (bijective) បើ កាលណា f អាំងសេចទីវផង និង សៀសេចទីវទៀត ។ គឺជាការផ្គូផ្គង រវាង សំនុំ A និង សំនុំ B ដែល គ្រប់ធាតុ នៃ A ផ្គុំនឹងធាតុមួយនៃ B[6]ហើយតែមួយគត់ (à chaque élément de A correspond un élément et un seul de B ។

IV.បើ f ប៊ីសេចទីវ ពី A ទៅលើ B រីឡាស្យុង $y = f(x)$ កំនត់ នូវការអនុវត្តន៍មួយ ពី B ទៅ A ហៅថា « ច្រាស នៃ f » ដែលតាងដោយ (បើមិនមានការច្រឡំទេ) f^{-1} ។

V. បើកាលណា f ប៊ីសេចទីវ (bijective) ពី E ទៅ E គេហៅ f ថា « **ពែមុតាស្យុង** » នៃ E (permutation de E) ។ ពែមុតាស្យុងឲ្យដដែល (une permutation identique) គឺជា ពែមុតាស្យុង ដែល គ្រប់ x នៃ E ផ្គុំ នឹង x ដដែល ។

ឧទាហរណ៍

រីឡាស្យុង y = 2x+1 កំនត់នូវ ការអនុវត្តន៍អាំងសេចទីវ ពី ចំនួនគត់ N ទៅ ចំនួនគត់ N ហើយនិង ការអនុវត្តន៍ប៊ីសេចទីវ ពី ចំនួនគត់ N ទៅ សំនុំ នៃចំនួនគត់សេស ៖

$a/$ ការអនុវត្តន៍អាំងសេចទីវ: $f(x_1) = f(x_2)$ => $x_1 = x_2$?

$f(x_1) = 2x_1 + 1$; $f(x_2) = 2x_2 + 1$

$f(x_1) = f(x_2)$ ⇔ $2x_1+1 = 2x_2+1$ => $x_1 = x_2$ (ដូច្នេះយើងបាន $x_1 = x_2$) ។

b/ ការអនុវត្តន៍ប៊ីសេចទីវ:

ដោយ f អាំងសេចទីវ ដោយ $a/$ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា f ក៏សៀសេចទីវដែរ

---

[5] នៅក្នុង ចន្លោះ [-1 ; +1] $f(x) = x^2$ មិនអាំងសេចទីវទេ ពី A = [-1 ; +1] ទៅ B = [0 ; +1] ពីព្រោះ ដោយ យក $1 \in B$, $f(x) = 1$ <=> $x^2 = 1$ => $x = \pm 1 \in A$ ដូច្នេះ មាន x ដល់ទៅពីរ ។ តែ បើ គេឲ្យ A = [0 ; +1] នោះ $f(x) = 1$ <=> $x^2 = 1$ => $x = 1 \in A$ ហើយនៅពេលនេះ f អាំងសេចទីវ ។

[6] ឧទាហរណ៍ ដូច A ជាសំនុំសិស្សក្នុងថ្នាក់ណាមួយ ហើយ B ជាសំនុំឈ្មោះសិស្សទាំងនោះ (ដោយសន្មតថាសិស្សសុទ្ធតែមានឈ្មោះខុសគ្នាទាំងអស់) ឬ មួយដូចជា រថយន្ត ដែលនៅប្រើបាន ក្នុងប្រទេស និង លេខប្លាករថយន្តទាំងនោះ ។

យើងយក y ជាចំនួនគត់សេសមួយ តើយើងអាចរក x មួយបានទេ ($x \in N$) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $y = f(x)$?

$y = f(x) \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$ (1)

ដោយ y ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ (y – 1) ជាចំនួនគត់គូ ដែលឲ្យ (y – 1) ចែកនឹង 2 ដាច់ ដូច្នេះ ដោយ (1) យើងអាចរកចំនួន x មួយបាននៅក្នុង N ។

ឧទាហរណ៍ ពែមុតាស្យុង (permutation) តារាង **TAB-៦-គ**

A	a	b	c	
1	a	b	c	f_1
2	a	c	b	f_2
3	b	a	c	f_3
4	b	c	a	f_4
5	c	a	b	f_5
6	c	b	a	f_6

ឧបមាគេឲ្យសំនុំ A = { a, b, c } ហើយនិង ការអនុវត្តន៍ $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ កំនត់ ពី A ទៅ A ដោយតារាង នៅខាងឆ្វេង គឺ ៖

f_1(a) = a, f_1(b) = b, f_1(c) = c ; f_2(a) = a, f_2(b) = c, f_2(a) = b
f_3(a) = b, f_3(b) = a, f_3(c) = c ; f_4(a) = b, f_4(b) = c, f_4(a) = a
f_5(a) = c, f_5(b) = a, f_5(c) = b ; f_6(a) = c, f_6(b) = b, f_6(a) = a

យើងឃើញថា ការអនុវត្តន៍ ទាំងនោះ ជា ពែមុតាស្យុងជាតុនៃ A[7] ។

VI. ការអនុវត្តន៍ f ពីសំនុំលំដាប់ A ទៅក្នុង សំនុំលំដាប់ B ហៅថា កើន (est dite croissante) [ចុះ] (décroissante) បើ $x \geq y$ ឲ្យ $f(x) \geq f(y)$ [$x \geq y$ ឲ្យ $f(x) \leq f(y)$] ; ហៅថា កើនដោយប្រិតប្រៀប (est dite strictement croissante) [ចុះ ដោយប្រិតប្រៀប] (strictement décroissante) បើ $x > y$ ឲ្យ $f(x) > f(y)$ [$x > y$ ឲ្យ $f(x) < f(y)$] ។

អនុគមន៍ កើនរហូត ឬ ចុះរហូត ហៅថា អនុគមន៍ ម៉ូណូតូន (fonction monotone) អនុគមន៍ កើនរហូតដោយប្រិតប្រៀប ឬ ចុះរហូតដោយប្រិតប្រៀប ហៅថា អនុគមន៍ ម៉ូណូតូន ដោយប្រិតប្រៀប (fonction strictement monotone) ។

---

[7] គឺថា សំនុំ A និងសំនុំរូបភាព នៃ A ស្មើគ្នា បានន័យថា ជាតុនៅដដែល គេដូរតែ រូបភាពនៃ ជាតុដើមនីមួយៗ គឺថា ក្នុងការតម្រៀបទាំងបីជាតុនោះ (a, b, c) គេប្តូរកន្លែងវា ដូចជា abc ---- f_2 ---→ acb ជាដើម ។