៥. សំនុំលំដាប់ (Ensembles ordonnés)

តាមដែលបាននិយាយរួចមកហើយនៅ ជំពូកទី១ §7 រីឡាស្យុងសំដាប់ លើសំនុំ E ជារីឡាស្យុងទ្វិភាគ (relation binaire) តាងដោយ $\prec$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងល័ក្ខខ័ណ្ឌ ដូចតទៅ ៖

1°/ $x \in E \Rightarrow x \prec x$ (រីឡាស្យុង រ៉េផ្លិចស៊ីវ)

2°/ $x \prec y$ និង $y \prec x \Rightarrow x = y$ (រីឡាស្យុង **ប្រឆាំងធ្លុះ**)

3°/ $x \prec y$ និង $y \prec z \Rightarrow x \prec z$ (រីឡាស្យុង ត្រង់ស៊ីទីវ) ។

លំដាប់កំនត់ដោយរីឡាស្យុងនេះ ហៅថា លំដាប់ទាំងស្រុង[1] (ordre total) នៅក្នុង E បើកាលណា គេឲ្យធាតុពីរ x និង y គេបានជានិច្ច $x \prec y$ ឬ $y \prec x$ ហើយ គេថា សំនុំ E មានលំដាប់ទាំងស្រុង (l'ensemble E est totalement ordonné) ។

បើល័ក្ខខ័ណ្ឌនេះមិនបំពេញទេ នោះគេថា សំនុំ E មានលំដាប់តាមបំណែក (l'ensemble E est partiellement ordonné) ។

លើសពីនេះទៅទៀត ជាទូទៅ គេថា ធាតុពីរ x និង y អាចប្រៀបធៀបគ្នាបាន កាលណា ធាតុនោះផ្ទៀងផ្ទាត់ យ៉ាងហោចណាស់ នឹង រីឡាស្យុងណាមួយ

$x \prec y$ ឬ $y \prec x$ ។

រីឡាស្យុង $x \prec y$ អាច ជាទូទៅ ប្រកាស់ដោយនិយាយថា « x **ចំណុះ** y » (x est **sub**ordonné à y) ។ ចំពោះ រីឡាស្យុង លំដាប់ទាំងស្រុង (la relation considérée définit un ordre total) គេច្រើនប្រើពាក្យថា « x យ៉ាងច្រើនស្មើនឹង y » (x est au plus égal à y) ។

ចំពោះរីឡាស្យុងលំដាប់ផ្ទុយ (la relation d'ordre opposée) ដែលគេសរសេរ $x \succ y$ (សមមូល នឹង $y \prec x$) ទៅតាមពេល គេសម្ដែងដោយនិយាយថា «x **ត្រួត** y » (x **sur**bordonne y) ឬ « x យ៉ាងហោចណាស់ស្មើនឹង y » (est au moins égal à y) ។

ដើម្បីស្រួលយល់ ការឲ្យរីឡាស្យុងលំដាប់ លើ សំនុំ ក៏ដូចឲ្យរបៀប សម្រាប់ប្រៀប

[1] គឺថា គ្រប់ធាតុ x នៃ E សុទ្ធតែអាច រៀបតាមលំដាប់បាន ។

ធៀបនូវធាតុទាំងឡាយ នៃសំនុំនោះដែរ តែគ្រាន់តែបញ្ជាក់ថា នៅក្នុងការរៀបតាមលំដាប់នោះ គេអត់ត្រូវមាន ធាតុពីរដូចគ្នាទេ គឺថាបើ ៖

$[x < y$ និង $y < x]$ នោះត្រូវតែ(=>) $x = y$

ហើយម្យ៉ាងទៀត គេក៏មិនសន្មតថា ធាតុទាំងអស់នៃសំនុំ អាចប្រៀបធៀបគ្នាបានទាំងអស់ដែរ លើកលែងតែ ជា រីឡាស្យុងលំដាប់ទាំងស្រុង (relation d'ordre totale) ។

ឧទាហរណ៍

I. សំនុំ N នៃចំនួនគត់ ជាសំនុំលំដាប់ទាំងស្រុង (ensemble totalement ordonné) ចំពោះ រីឡាស្យុង « x តូចជាង y » ហើយជា សំនុំលំដាប់តាមបំណែក partiellement ordonné) ចំពោះ រីឡាស្យុង « x ជាភាគបែងនៃ y » (x est un diviseur de y)។

II. សំនុំ $\mathcal{P}$(E) នៃ បំណែកទាំងឡាយនៃសំនុំ E ជា « សំនុំលំដាប់តាមបំណែក » ដោយរីឡាស្យុង «នៅក្នុង » $A \subset B$ ។

តម្លៃដំឡើង តម្លៃបញ្ចុះ (majorant, minorant)

E ជាសំនុំលំដាប់ ទាំងស្រុង ឬ តាមបំណែក ដោយ រីឡាស្យុង $x \prec y$ ។ A ជាបំណែកមួយនៃ E ។ គេថា A ដំឡើង [ឬ បញ្ចុះ] កាលណាមានធាតុ a មួយនៃ E ដែល គ្រប់ $x \in A \Rightarrow x \prec a$ [ឬ $a \prec x$] ហើយគេថា a ជាតម្លៃដំឡើង [ឬ តម្លៃបញ្ចុះ] នៃ A ។

គេថាសំនុំ A ទាល់លើ ទាល់ក្រោម (A est borné) កាលណា A មានទាំង តម្លៃដំឡើង និង តម្លៃបញ្ចុះ (s'il est à la fois majoré et minoré) ។

សញ្ញាណ គោលទាល់លើ (notion de borne supérieure)

បើ រីឡាស្យុង $x \succ y$ សម្តែងថា « x ធំជាង y » តម្លៃដំឡើងទាំងឡាយនៃ A គឺជា ធាតុនៃ E ដែលធំជាងធាតុ ទាំងអស់ នៃ A ។ ហើយ តម្លៃដំឡើងនៃ A ដែលល្អជាងគេ គឺ តម្លៃដំឡើងណាដែលតូចជាងបំផុតគេ ។ ដូច្នេះយើងត្រូវរក តើក្នុងពពួកតម្លៃ

ដំឡើងទាំងឡាយនៃ A នោះមានតម្លៃដែលតូចជាងគេឬទេ ? ហើយបើសិនជាមាន តម្លៃនោះគេ ហៅថា <u>គោលទាល់លើនៃ A</u> ។

<u>និយមន័យ</u>: យើងតាងដោយ A ជាបំណែកមួយនៃ E ហើយ <u>a ជាធាតុមួយនៃ E</u> ។ គេថា a ជាគោលទាល់លើនៃ A បើ ៖

1°/ $x \in A \Rightarrow x \prec a$

2°/ គ្រប់ធាតុ y នៃ E ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់រីឡាស្យុង $y \succ x, \forall x \in A$ នោះក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងរីឡាស្យុង $y \succ a$ ដែរ ឬមួយដោយប្រើ ការកត់ត្រាជានិមិត្តរូប (notation symbolique) :

$y \in E$ និង $[\ \forall x \in A,\ y \succ x] \Rightarrow y \succ a$ ។

តាមនិយមន័យនេះ ដោយល័ក្ខខ័ណ្ឌទាំងពីរ ឃើញថា A មានគោលទាល់លើ យ៉ាង ច្រើនមួយ ។ ពីព្រោះថាបើសិនជាមានគោលទាល់លើពីរ a និង b $(a \in E, b \in E)$ នោះ យើងបាន៖

<u>ក/ a គោលទាល់លើ</u> $\Rightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \prec a$ (ដោយ 1°/) ហើយដោយ

b គោលទាល់លើ $\Rightarrow b \in E$ និង $[\ \forall x \in A,\ b \succ x\ ] \Rightarrow \boldsymbol{b} \succ \boldsymbol{a}$ (ដោយ 2°/) (A1)

<u>ខ/ b គោលទាល់លើ</u> $\Rightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \prec b$ (ដោយ 1°/) ហើយដោយ

a គោលទាល់លើ $\Rightarrow a \in E$ និង $[\ \forall x \in A,\ a \succ x\ ] \Rightarrow \boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$ (ដោយ 2°/) (A2)

ដោយ $\succ$ ជារីឡាស្យុងលំដាប់ [$\boldsymbol{b} \succ \boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$] $\Rightarrow b = a$ ។ ដូច្នេះគេ អាចនិយាយដោយច្បាស់ នូវគោលទាល់លើនៃសំនុំ A បើសិនជាមាន ហើយគេសរសេរ ដោយ $\sup A$ ។ បើរីឡាស្យុង $y \succ x$ សម្តែងថា « y ធំជាង x » គេអាច កំនត់ថា គោលទាល់លើនៃ A ជាធាតុមួយតូចជាងគេនៃ E ដែលធំជាងគ្រប់ធាតុនៃ A ហើយបើធាតុនោះនៅ <u>ក្នុង A ថែមទៀត</u> គោលទាល់លើនៃ A ជា<u>ធាតុធំជាងគេនៃ A</u> (*le plus grand* élément *de A*)។

ដោយការប្តូរគ្នារវាងសញ្ញា $\prec$ និង $\succ$ ដែលនៅក្នុងលក្ខខណ្ឌ 1°/ និង 2°/ នោះគេបានសញ្ញាណនៃ គោលទាល់ក្រោម (borne inférieure) ។

គេសរសេរគោលទាល់ក្រោមនៃ A ដោយ $infA$ ហើយរឺឡាស្យុង $y \prec x$ សម្តែងថា « yតូចជាង x » ។ គោលទាល់ក្រោមនៃ A ជាធាតុមួយធំជាងគេនៅក្នុង E ដែលតូចជាងគ្រប់ធាតុនៃ A ។

<u>ឧទាហរណ៍</u>

I. ឧបមា E ជាសំនុំនៃចំនួនគត់ មិនសូន្យ មានលំដាប់តាមបំណែក (ordre partiel) ដោយរឺឡាស្យុង « x ជាតួចែកនៃ y » ។ គោលទាល់លើ នៃ សំនុំ A តាក់តែងផ្សំដោយ n ធាតុ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ គឺ PPCM (ពហុគុណរួមតូចបំផុត) នៃ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ។ ហើយ គោលទាល់ក្រោម នៃ សំនុំ A គឺ PGCD (តួចែករួមធំបំផុត)នៃ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ។ ជាទូទៅគោលទាំងពីរនេះ មិននៅក្នុង A ទេ ។

II. បើ E ជាសំនុំ N នៃចំនួនគត់ មានលំដាប់ធម្មតា $x \leq y$ ។ បើ A ជាសំនុំ នៃចំនួន $x_1, x_2, \ldots, x_n$នោះ គោលទាល់លើនៃ A គឺ ចំនួនណាដែលធំជាងគេក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនោះ ហើយគោលទាល់ក្រោម គឺ ចំនួនដែលតូចជាងគេ ។ នៅទីនេះ គោលទាំងពីរនៅក្នុង A ។ តែបើសិនជា A = N វិញនោះ ឬក៏ A ជាសំនុំនៃចំនួន <u>គត់គូ</u> នោះ A មិនមាន គោលទាល់លើទេ ហើយគោលទាល់ក្រោម គឺ សូន្យ ។

III. សំនុំ $\mathcal{P}$(X) នៃបំណែក របស់សំនុំ X ជាសំនុំមានលំដាប់តាមបំណែក (ordre partiel) ($\mathcal{P}$(X) est partiellement ordonné) ដោយរឺឡាស្យុង $A \subset B$ (A នៅក្នុង B) ។ ដូច្នេះ បំណែក A មួយ [A$\in$ $\mathcal{P}$(X)] ដែលតាក់តែងដោយសំនុំរង $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ នៃ X នោះ មានគោលទាល់លើគឺ $\cup_{i=1}^{n} A_i$ និងគោលទាល់ក្រោមគឺ $\cap_{i=1}^{n} A_i$ ។ បានន័យថា ៖ $\cap_{i=1}^{n} A_i \subset A \subset \cup_{i=1}^{n} A_i$ ។

<u>ចន្លោះ</u>

គេឲ្យ E សំនុំ មានលំដាប់ទាំងស្រុង (ordre total) ដោយរីឡាស្យុង កំនត់ដោយ $x \le y$; ហើយ $x < y$ ជារីឡាស្យុង វិសមភាពដាច់ខាត (relation d'inégalité stricte) ដែលសមមូល និង [$x \le y$ និង $x \neq y$] ។ គេហៅថា ចន្លោះបើក មានចុង a,b គឺ សំនុំធាតុនៃ E ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $a < x < b$ ហើយគេសរសេរ $]a,b[$ ។ ក៏ដូចគ្នាដែរ ចន្លោះបិទ មានចុង a,b គឺ សំនុំធាតុនៃ E ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $a \le x \le b$ ហើយគេសរសេរ $[a,b]$ ។

គេក៏កំនត់ ចន្លោះបើក អនន្តខាងឆ្វេង $]\leftarrow a[$ ដោយវិសមភាព $x < a$, ហើយ និង ចន្លោះបើក អនន្តខាងស្តាំ $]a \rightarrow[$ ដោយវិសមភាព $x > a$ ។ ជាទីបញ្ចប់ គេកំនត់ ចន្លោះអនន្ត $]\leftarrow a]$ និង $[a \rightarrow[$ រៀងៗខ្លួន ដោយវិសមភាព $x \le a$ និង $x \ge a$ ។

<u>សង្កេត</u>

តាមពិត គេប្រើនិយមន័យទាំងនេះ តែនៅពេលដែលសំនុំ E ជាសំនុំនៃ**ចំនួនពិត** មានលំដាប់តាមរីឡាស្យុងលំដាប់ធម្មតា ដែលយើងធ្លាប់ប្រើ ។ តែសញ្ញាណចន្លោះនេះ ក៏រៀបចំទៅរកសញ្ញាណដ៏សំខាន់ទៅពេលខាងមុខគឺ សញ្ញាណ រចនាសម្ព័ន្ធ **តូប៉ូលូស៊ីក**នៅលើសំនុំមួយ (notion de structure topologique sur un ensemble) ។ យើងនឹងឃើញថា សញ្ញាណជាគ្រឹះ នៃ ការរួម (la convergence) និងការជាប់ (la continuité) អាចកំនត់បាន ដោយប្រើ កម្មសិទ្ធិនៃរង្វាស់ត្រឹមត្រូវ (des propriétés métriques précises) តែវិធីនេះ រៀងធ្ងន់ទៀតផង ឬមួយ ដោយរបៀបងាយយល់ ដោយប្រើ **វ័រស៊ីណា** (voisinage)[2] ។

យើងនឹងឃើញនៅពេលខាងមុខនូវសញ្ញាណនេះដោយទ្រួសៗ ដោយគេកំនត់រចនាសម្ព័ន្ធតូប៉ូលូស៊ីក ដែលថា វ័រស៊ីណានៃធាតុ x ណាមួយ គឺ<u>សំនុំទាំងឡាយ</u> ដែល មាន<u>ចន្លោះបើក</u> ហើយនៅក្នុង<u>ចន្លោះបើកនោះ</u> មាន x (en prenant pour voisinage d'un élément quelconque x les ensembles qui contiennent un intervalle ouvert contenant x) ។ សំនុំដែលមានរចនាសម្ព័ន្ធតូប៉ូលូស៊ីក ហៅថា **លំហ** (espace) ហើយ ធាតុរបស់លំហ ហៅថា **ចំណុច** (les points) ។

[2] វ័រស៊ីណា ជាភាសាបារាំង តាមន័យធម្មតា គឺ អ្នកជិតខាង អ្នកដែលមានផ្ទះនៅជិតផ្ទះយើង ។ ហើយ វ័រស៊ីណា នៃ x គឺ សំនុំ<u>ដែល</u>មានចន្លោះបើក<u>ដែល</u>មាន x។