4.លីមីត នៃ អនុគមន៍ - ភាពជាប់គ្នា (Limite de fonctions. Continuité)

តទៅនេះ យើងតាងដោយ f អនុគមន៍នៃចំនួន មាន x ជា អថេរ នៃចំនួន (x *est une variable numérique*) គឺថា ជាការអនុវត្តន៍ ពីផ្នែកមួយនៃ R ទៅក្នុង R ។ ជាពិសេស ដោយនិយមន័យ II និង III នៃ §2 យើងបាន និយមន័យ ដូចតទៅ ៖

និយមន័យ-I

f ជាអនុគមន៍ នៃចំនួន មាន x **ជាអថេរនៃចំនួន កំណត់លើចន្លោះបើកដែលមាន ចំណុច** x_0 **នៅក្នុងនោះ លើកលែងតែត្រង់ចំណុច** x_0 **តែម្តង ហើយគេតាង** y_0 **ជាចំនួនពិត មួយ ។ គេថា** $f(x)$ ខិតទៅជិត y_0 **កាលណា** x ខិតទៅជិត x_0 **បើចំពោះ ចំនួន** $\varepsilon > 0$ ណាមួយដែលគេឲ្យ **នោះគេបាន ចំនួនផ្លូ** $h > 0$ **មួយ ដែលទំនាក់ទំនង**

$|x - x_0| \le h$ និង $x \ne x_0$ => $|f(x) - y_0| \le \varepsilon$ ។

និយមន័យ-II

f ជាអនុគមន៍ នៃចំនួន មាន x **ជាអថេរនៃចំនួន កំណត់លើចន្លោះបើកដែលមាន ចំណុច** x_0 **នៅក្នុងនោះ ។ គេថា អនុគមន៍** f ជាប់ត្រង់ចំណុច x_0 **បើចំពោះ ចំនួន** $\varepsilon > 0$ ណាមួយដែលគេឲ្យ **នោះគេបាន ចំនួនផ្លូ** $h > 0$ **មួយ ដែល វិសមភាព**

$|x - x_0| \le h$ => $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ ។

ឧទាហរណ៍

$1°$ អនុគមន៍ អាហ្វីន (*fonction affine*) $y = ax + b$ គឺជាប់គ្រប់ចំណុច ចំពោះចំនួនពិតមិនប្រែប្រួល a, b ណាក៏ដោយ ។ ពីព្រោះ វិសមភាព $|x - x_0| \le \frac{\varepsilon}{a}$ [1] =>

[1] ដោយ ε គេឲ្យ ដូច្នេះចំនួន h ដែលរកបានគឺ $h = \frac{\varepsilon}{a}$ (បើ $a \ne 0$) ។ តែបើ $a = 0$ នោះ y ទៅជា $y = b$ ដែលជា អនុគមន៍ មិនប្រែប្រួល ហើយ $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ ។

$|f(x) - f(x_0)| = |(ax+b) - (ax_0+b)| = |a(x - x_0)| \leq a\left(\frac{\varepsilon}{a}\right) = \varepsilon$ ។

2° អនុគមន៍ $\frac{x^2-1}{x-1}$ កំណត់ ចំពោះ $x \neq 1$ ហើយខិតទៅជិត 2 កាលណា x ខិតទៅជិត 1 (ពីព្រោះ ចំពោះ $x \neq 1$ គេបាន $y = x+1$) ។

3° អនុគមន៍ $y = |x|^{\frac{1}{2}}$ គឺ ជាប់ គ្រប់ចំណុច ទាំងអស់ ៖

(a) នៅចំណុច គល់ ពីព្រោះ $|x| \leq \varepsilon^2$ => $|x|^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$ ។

(b) នៅចំណុច $x_0 \neq 0$ ពីព្រោះ $|x - x_0| \leq \varepsilon |x_0|^{\frac{1}{2}}$ =>

$$\left|\, |x|^{\frac{1}{2}} - |x_0|^{\frac{1}{2}} \,\right| = \frac{\big||x|-|x_0|\big|}{|x|^{\frac{1}{2}} + |x_0|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|x - x_0|}{|x_0|^{\frac{1}{2}}} \leq \varepsilon \text{ ។}$$

4° អនុគមន៍ $y = \frac{1}{x}$ ជាប់ ត្រង់ x_0 បើ $x_0 \neq 0$ ។ ពីព្រោះ បើកាលណាគេតាងដោយ h ជាចំនួន ដែលតូចជាងគេ ក្នុងចំណោម នៃ ពីរចំនួន $\frac{1}{2}|x_0|$ និង $\frac{\varepsilon}{2}{x_0}^2$ នោះវិសមភាព

$|x - x_0| \leq h$ => $|x| \geq \frac{1}{2}|x_0|$ ហើយ

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{|xx_0|} \leq \frac{|x - x_0|}{\frac{1}{2}|x_0||x_0|} = \frac{2|x-x_0|}{|x_0|^2} \leq \varepsilon \text{ ។}$$

5° យើងនឹង ឃើញនៅ §11 ថា អនុគមន៍ $y = \frac{\sin x}{x}$ គឺ កំណត់និងជាប់ ចំពោះ $x \neq 0$ ហើយ ខិតទៅជិត 1 កាលណា x ខិតជិត សូន្យ ។ ដូច្នេះ គេបាន អនុគមន៍ f មួយ ជាប់ គ្រប់ចំណុច ដោយតាំងថា ៖ $f(0) = 1$ និង $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ចំពោះ $x \neq 0$ ។

<u>ការសង្កេត សំខាន់</u>

បើអនុគមន៍ f កំណត់ត្រង់ចំណុច x_0 នោះចំនួន y_0 ដែលនិយាយក្នុងនិយមន័យ-I មិនមែនជាចាំបាច់ ស្មើនឹង $f(x_0)$ ទេ ។ ដូចយើងឃើញស្រាប នៅឧទាហរណ៍ 5°

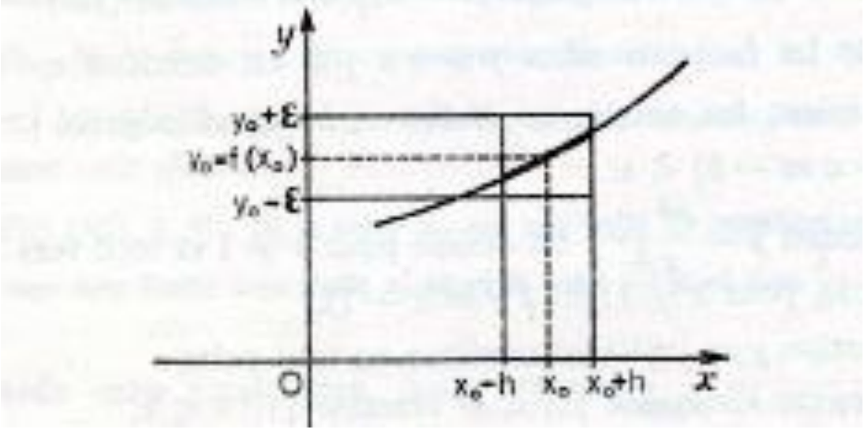
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ត្រង់ $x = x_0 = 0$ នោះយើងពុំ អាច ជំនួស x ដោយ 0 បានទេ តែគេ សន្មតថា $f(0) = 1$ ។

ការបកស្រាយតាមធរណីមាត្រ

ដោយ បកស្រាយតាមធរណីមាត្រ នូវនិយមន័យ-II យើងបានការថ្លែង ដែលងាយយល់ ដូចតទៅនេះ ៖

និយមន័យ-II-bis

គេថា អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច x_0 បើចំពោះ ចន្លោះបិទ J មានផ្ចិត $f(x_0)$ ហើយ មានប្រវែងមិនសូន្យ នោះគេអាចផ្គូនឹង ចន្លោះ I មួយមានផ្ចិត x_0 ហើយមានប្រវែងមិន សូន្យ ដែល ទំនាក់ទំនង $x \in I$ => $f(x) \in J$ ។

	ទោះជា $\varepsilon > 0$ នោះ តូច ស្មើនឹង សរសៃ សក់ក៏ដោយ ក៏ $y_0+\varepsilon$ នៅតែមិនស្មើនឹង y_0 ។
Figure-1	

និយមន័យនេះ ធ្វើឲ្យយើងខិតជិតមកខាងទស្សនៈ តូប៉ូលូស៊ីក (point de vue topolo-gique) ហើយយើងអាចបកស្រាយដោយងាយលើក្រាបនៃអនុគមន៍ f (មើល figure-1) ៖ គេអាចថាមាន ផ្ទមួយ ដែលជាផ្នែកនៃក្រាប មានចំណុច $[x_0, f(x_0)]$ នៅក្នុងនោះ ហើយផ្ទនោះ ក៏នៅក្នុង រូបរាងបួនជ្រុងទ្រវែងមួយ ដែលទំហំទាំងពីរ (បណ្តោយនិងទទឹង) អាចធ្វើឲ្យតូចតាមតែចិត្តគេចង់បាន (*un rectangle dont les dimensions sont aussi petites que l'on veut*) ។

ក្នុងទីបំផុត បើគេសង្កេតថា ចំពោះ <u>ចន្លោះបើក</u>មួយ ដែលមាន ចំណុច x_0 [ឬ y_0] នៅក្នុងនោះ ក៏មានជានិច្ចនូវ <u>ចន្លោះបិទ</u>មួយ ប្រវែងមិនសូន្យ មានចំណុចនោះជាផ្ចិត នោះយើងឃើញថា និយមន័យ-II-bis ក៏សមមូលនឹង ៖

<u>**និយមន័យ-II-ter.**</u>

គេថា អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច x_0 បើចំពោះ ចំនួនពិតមួយគូ a, b ដែលបំពេញ $a < f(x_0) < b$ នោះគេអាចផ្គូនឹង ចំនួនពិតមួយគូ α, β ដែល $\alpha < x < \beta$ នោះផ្តល់ឲ្យ $a < f(x) < b$ ។

និយមន័យ-*II-ter* នេះអាចឲ្យយើងបង្ហាញដោយងាយថា អនុគមន៍ច្រាស នៃអនុគមន៍ជាប់ គឺជាអនុគមន៍ជាប់ ។ យើងសង្កេតថា និយមន័យនេះ អាចពង្រីកទៅដល់អនុគមន៍កំណត់លើ សំនុំ មានលំដាប់ទាំងមូល (*définie sur un ensemble totalement ordonné*) ហើយយកតម្លៃ ក្នុង សំនុំមានលំដាប់ទាំងមូល។

<u>លីមីតខាងស្តាំ និង ខាងឆ្វេង (limite à droite et à gauche).</u>

<u>**និយមន័យ-III.**</u>

f អនុគមន៍ កំណត់លើ សំនុំមួយដែលនៅក្នុងនោះ មានចន្លោះបើក $]a, b[$ ។ គេថា $f(x)$ ខិតជិត ចំនួនពិត c កាលណា x ខិតជិត a ដោយចំនួនលើ

[ឬ x ខិតជិត b ដោយចំនួនក្រោម] (*x tend vers a par valeurs supérieures* [*resp.x tend vers b par valeurs inférieures*]

បើ កាលណាគេឲ្យ ចំនួន $\varepsilon > 0$ ណាមួយក៏ដោយ ក៏គេនៅតែអាចរកបាន ចំនួនជាតួ $h > 0$ ដែលចំពោះ $a < x < a + h$ [ឬ $b - h < x < b$] នោះគេបាន $|f(x) - c| < \varepsilon$ ។ នៅពេលនោះ គេថា c ជាលីមីត ខាងស្តាំ [ឬ ខាងឆ្វេង][2] នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច a [ឬ ត្រង់ចំណុច b] ។

លីមីត បែបនេះ គេប្រហែលជា ជួបញឹក ពីព្រោះជាការធម្មតាទេ ដែលគេរក លីមីតនៅត្រង់បង្គោលខណ្ឌ (aux bornes d'un intervalle) នៃចន្លោះ ចំពោះអនុគមន៍ ដែលកំណត់ នៅក្នុងចន្លោះនោះ។

ឧទាហរណ៍

1°/ អនុគមន៍ $y = \frac{|x|}{x}$ កំណត់ ចំពោះ $x \neq 0$ ហើយខិតជិត $+1$ កាលណា x ខិតជិតសូន្យ ដោយ x នៅតែធំជាង សូន្យ (គឺ $x > 0$) ។ ហើយ អនុគមន៍ $y = \frac{|x|}{x}$ ដដែលនេះ ខិតជិត -1 កាលណា x ខិតជិត សូន្យ ដោយ x នៅតែ តូច ជាង សូន្យ (គឺ $x < 0$) ។

2°/ អនុគមន៍ $y = \sqrt{x}$ ខិតជិតសូន្យ កាលណា x ខិតជិតសូន្យដោយតម្លៃលើ ។ ពីព្រោះ វិសមភាព $0 \leq x < \varepsilon^2 \Rightarrow |y| < \varepsilon$ ។ ដោយអនុគមន៍ នេះ មិនកំណត់ ចំពោះ $x < 0$ ដូច្នេះ យើងអាចថាដោយគ្មាន ភាពមិនច្បាស់ ថា អនុគមន៍នេះ ជាប់ នៅចំណុច $x = 0$ (ដូច្នេះ ជាប់ គ្រប់ចំណុច)។

ជាទូទៅ អនុគមន៍ f កំណត់ លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ ជា អនុគមន៍ ជាប់ លើចន្លោះនោះ បើកាលណា f ជាប់ លើចន្លោះ បើក $]a, b[$ និង មាន $f(a)$ ជាលីមីត ខាងស្តាំត្រង់ a

---

[2] ស្តាំ ឬ ឆ្វេង ដោយធៀបទៅនឹង របស់អ្វីមួយ។ ដូចជាយើងថា ដៃស្តាំ ដោយយើង ធៀបដៃយើងទៅនឹងដងខ្លួន ។ ទៅទីនេះ របស់ដែល ខិតជិត គឺ x។ ហើយ x ខិតជិត a តែនៅតែធំជាង a ដូច្នេះ x នៅខាងស្តាំ a $(a < x < a + h)$ ។

ហើយ $f(b)$ ជាលីមីត ខាងឆ្វេង[3] ត្រង់ b ។

<u>លីមីតជាទូទៅ (Limites généralisées).</u>

ក៏ដូចស៊ីតដែរ យើងអាចសន្មត នូវចំនួនពិតប្រឌិត (*les nombres réels fictifs*) $+\infty$ និង $-\infty$ ជាលីមីត ដែលអាចនឹងមាន ដូចអនុគមន៍ដែរ។ ចំនួនទាំងពីរនេះ ដែលមានតែ សម្រាប់តែ រចនាសម្ព័ន្ធ នៃលំដាប់ ក្នុង R (*pour la seule structure d'ordre de R*) គឺនៅក្នុងនិយមន័យ (II-ter) ដែលតម្រង់ទៅលើរចនាសម្ព័ន្ធនេះ ដែលយើងនឹងប្រើ ដើម្បីពង្រីកនិយមន័យនេះ។ ដើម្បីកុំឲ្យវែង ដោយត្រូវ ពិនិត្យគ្រប់ករណីនោះ យើងកម្រិតត្រឹមតែ និយមន័យ ដូចតទៅ ៖

<u>និយមន័យ-IV.</u>

f អនុគមន៍ កំណត់លើ ចន្លោះ មួយ មានប្រវែងខាងស្តាំ មិនមានលីមីត។ គេថា $f(x)$ ខិតជិត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ បើ កាលណាគេឲ្យ ចំនួន B មួយមក នោះគេអាចរកចំនួន A ជាគូ ដែល វិសមភាព $x > A \Rightarrow f(x) > B$ ។

តែត្រូវសង្កេតថា អាចមាន « បីចំណុច នៃលីមីត » ចំពោះ អថេរ x គឺ លិមីតមានទីបញ្ចប់ x_0 , $+\infty$ និង $-\infty$ ហើយក៏មាន « បីប្រភេទនៃលីមីត » ចំពោះ អនុគមន៍ $f(x)$ ដែរ គឺលីមីត មានទីបញ្ចប់ y_0 , $+\infty$ និង $-\infty$ ។ ដូច្នេះ ករណីទាំងអស់ $3\times 3 = 9$ ករណីដែលត្រូវពិនិត្យ ហើយក៏មាន 9 និយមន័យដែលត្រូវថ្លែង ។

<u>ការពង្រីក (Extension).</u>

[3] ចំពោះ ចន្លោះបើក $]a,b[$ យើងឃើញ x ខិតទៅជិត b ដោយនៅខាងឆ្វេង b ។ ពី ព្រោះ x ត្រូវនៅ ក្នុង ចន្លោះ $]a,b[$ ដែលជា ដែនកំណត់នៃ អនុគមន៍ f ។

យើអាចពង្រីក សញ្ញាណនៃ លីមីត ដល់ករណីដែលអនុគមន៍ f មិនកំណត់នៅលើចន្លោះ តែកំណត់តែចំពោះ ចំនួនខ្លះ នៃ x តែប៉ុណ្ណោះ (ឧទាហរណ៍ដូចជា ចំនួនសនិទាន) ៖ យើងគ្រាន់តែ យកនិយមន័យ (II) នៃ §2 ដោយយក E គឺ សំនុំទាំងឡាយដែល f កំណត់ (សំនុំនោះ មាន ជានិច្ច នូវប្រវែង $d(x,y) = |x-y|$) ។ តែក៏ត្រូវ ពប់យក ការសង្កេត (4°) ដែលបន្តពីនិយមន័យនោះ។ លីមីត នៃ f អាចកំណត់បានតែចំពោះ ចំណុច ដែល មិនមែន ជាចំណុចឯកោ គឺចំណុចនៅដាច់តែឯង (point isolé) នៃ E ។

ជាពិសេស យើងអាច ចាត់ទុក តួជាទូទៅ x_n នៃស៊ីត គឺជា អនុគមន៍ ដែលមាន អថេរ n កំណត់លើ សំនុំ N នៃចំនួនគត់ ។ ហើយ សញ្ញាណ « លីមីតនៃស៊ីត x_n » ក៏អាចលាយឡំគ្នា ជាមួយនិង សញ្ញាណ « លីមីត នៃអនុគមន៍ x_n កាលណា n ខិតជិតទៅរក $+\infty$ » ។ ដូច្នេះ លីមីតនៃស៊ីត លេចឡើងដូចជា ករណីពិសេស នៃលីមីតជាទូទៅ នៃអនុគមន៍ (*Les limites de suites apparaissent donc comme un cas particulier des limites généralisées de fonctions*) ។

<u>លក្ខណវិនិច្ឆ័យក្នុង ការប្រើប្រាស</u>

នៅ កថាខណ្ឌតទៅនេះ យើងនឹងថ្លែងនូវ ក្បួនផ្សេងៗ ដែលអាចឲ្យ គណនា បានច្រើនសន្ធឹកនូវ លីមីត។ តែយើងអាចថ្លែងឥឡូវនេះ នូវលទ្ធផលមួយ ដែល អាចបង្ហាញបានភ្លាម ហើយដែលគេច្រើនប្រើ ៖

<u>ការស្នើ-VII-4-1.</u>

បើកាលណា អនុគមន៍ $g(x)$ និង $h(x)$ មាន លីមីតដូចគ្នា y_0 កាលណា x ខិតជិត x_0 ហើយបើ អនុគមន៍ f បំពេញ $g(x) \le f(x) \le h(x)$ នោះ $f(x)$ ក៏ខិតជិត y_0 ដែរ កាលណា x ខិតជិត x_0 ។

ត្រឡប់មក អនុគមន៍ វ៉ិច ទ័រ យែល (*Retour aux fonctions vectorielles*).

យើងតាងដោយ $F^1(t),\ F^2(t), \ldots\ldots, F^n(t)$ នូវ n កុមប៉ូសង់ នៃ អនុគមន៍ វ៉ិចទ័រយែល $F(t)$ កំណត់នៅលើ ផ្នែកមួយនៃ R ហើយយកចំនួន នៅក្នុង R^n ។ ហើយបើយើងតាងដោយ $\|X\| = [\sum(X^i)^2]^{1/2}$ ជា ន័ម (norme) (ឬ ប្រវែង) អឺគ្លីតឌីយៀង នៃ វ៉ិចទ័រ $X \in R^n$ មានកុមប៉ូសង់ X^i នោះគេបាន ចំពោះ ចំនួន p ណាមួយ នៃ ចំនួន $(p = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n)$ នូវ វិសមភាពពីរដាន់ ៖

$$\|F^p(t) - X^p\| \leq \|F(t) - X\| \leq \sum_{i=1}^{n}\|F^i(t) - X^i\| \quad ។$$

ដោយ ប្រើ ការស្នើ-$VII - 4 - 1$ យើងទាញបានដោយងាយនូវ លទ្ធផលដូចតទៅ ៖

ការស្នើ-VII-4-2.

ដើម្បី អនុគមន៍ វ៉ិចទ័រយែល $F(t)$ ដែលយកចំនួន នៅក្នុង R^n ខិតជិតទៅរក ជាតុ $X = (X^1, X^2, \ldots.., X^n)$ នៃ R^n កាលណា t ខិតជិតទៅរក t_0 នោះត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ ចំពោះ ចំនួនទីមួយៗ នៃ p $F^p(t)$ ខិតជិតទៅរក X^p កាលណា t ខិតជិតទៅរក t_0 ។

អនុសាធ្យ (Corollaire).

ដើម្បីឲ្យ អនុគមន៍វ៉ិច ទ័រយែលមួយ ដែលយកចំនួនក្នុង R^n ជាអនុគមន៍ជាប់ នោះត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ កុមប៉ូសង់ ទីមួយៗ ជាអនុគមន៍ ជាប់ ។

ការស្នើទាំងពីរនេះ អាចនាំឲ្យការសិក្សាអំពី អនុគមន៍វ៉ិចទ័រយែល តូចតាច (*des fonctions vectorielles élémentaires*) មកជាការសិក្សា នូវអនុគមន៍នៃចំនួន (*des fonctions numériques*)។