3. លីមីត នៃ ស៊ីត នៃ ចំនួនពិត (Limite de suites de nombres réels).

នៅលើ បន្ទាត់នៃចំនួន (*la droite numérique*) R យើងនឹងកំណត់ជានិយមន័យ ថាចម្ងាយ រវាង ចំនួនពិត ពីរ x និង y គឺ តម្លៃ អាប់សូលុយ (*la valeur absolue*) នៃ ចំនួន $|x-y|$ គឺថា $d(x,y) = |x-y|$ គឺជា ចម្ងាយ រវាងចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x,\ y$ នៅលើ បន្ទាត់ធរណីមាត្រ ។ ដើម្បីបង្ហាញថា អនុគមន៍ $|x-y|$ បំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $D_1,\ D_2, D_3$ ដែលបានថ្លែងនៅ កថាខ័ណ្ឌមុននេះ យើងមិនចាំបាច់ធ្វើ ការបកស្រាយតាម ធរណីមាត្រ ទេ ។ ដោយ ការអនុវត្តន៍ករណីនេះ មកលើ និយមន័យ-I នៃកថាខណ្ឌពីមុន នោះយើងបាននិយមន័យដូចតទៅនេះ៖

<u>និយមន័យ-I</u>

គេថា ស៊ីត (x_n) នៃចំនួនពិត ខិតទៅជិតចំនួនពិត x នោះបើកាលណា គេឲ្យចំនួនពិត $\varepsilon > 0$ ណាមួយក៏ដោយ នោះគេអាចរក ចំនួនគត់ p មួយបាន ដែលចំពោះ $n \ge p$ គេ ដឹងថា $|x - x_n| \le \varepsilon$ ។

បើគេសរសេរ ដោយប្រើ រូបនិមិត្ត (symboles) $\forall\varepsilon$ និង $\exists p$ នោះយើងអាចសរសេរថា ៖

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists p$ ***ដែល*** $n \ge p \quad \Rightarrow \quad |x - x_n| \le \varepsilon$ ***(ដោយ*** $\varepsilon \in R$, $p \in N$***)។***

ដោយបកស្រាយ និយមន័យនេះ តាមពាក្យធរណីមាត្រ យើងបាននិយមន័យដូចតទៅ ៖

<u>និយមន័យ-II</u>

គេថា ស៊ីត (x_n) នៃចំនួនពិត ខិតទៅជិតចំនួនពិត x បើកាលណា ទោះជាគេឲ្យ ចន្លោះបិទ I ដែលមានផ្ចិត x មានប្រវែងមិនសូន្យ យ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏គេនៅតែអាច រកចំនួនគត់ p មួយបាន ដែលវិសមភាព $n \ge p$ បណ្តាលឲ្យ $x_n \in I$ ។

និយមន័យនេះ ដែលសម្បូណ៌ដោយរូបប្រៀប នាំឲ្យយើងកាន់តែខិតជិតទៅ ទស្សនៈ តូប៉ូឡូស៊ីក ។ ហើយយើងក៏ឃើញថា យើងអាចបាននិយមន័យ ដែលសមមូល ដោយជំនួស ចន្លោះ I ដោយសំនុំណាមួយ ដែលនៅក្នុងនោះ មានចន្លោះ មានផ្ចិត x និងកាំមិនសូន្យ (ដូច្នេះ គឺ វ៉ស៊ីណានៃ x) ។ ជាពិសេស យើងអាចយកចន្លោះ I ជាចន្លោះបើក មានផ្ចិត x និងកាំមិនសូន្យ ដែលដូចជានៅក្នុង និយមន័យ-I យើងជំនួស វិសមភាព ទូលាយ (*inégalité large*) $|x - x_n| \leq \varepsilon$ ដោយ វិមភាព តឹងរ៉ឹង (*inégalité stricte*) $|x - x_n| < \varepsilon$ ។ យើងក៏អាច យក I នូវចន្លោះបើក ណាមួយដែលមាន x នៅក្នុងនោះ

ហើយយើងក៏បាន និយមន័យ ដូចតទៅ៖

<u>**និយមន័យ-III**</u>

គេថា ស៊ីត (x_n) នៃចំនួនពិត ខិតទៅជិតចំនួនពិត x បើកាលណា ចំពោះ ចំនួន a និង b ណាក៏ដោយដែលបំពេញ $a < x < b$ (វិសមភាព តឹងរ៉ឹង) នោះគេមាន ចំនួនគត់ p ដែល បើគេយក $n > p$ នោះគេបាន $a < x_n < b$ ។

និយមន័យនេះ ត្រូវការតែ របនាសម្ព័ន្ធ នៃលំដាប់ នៃ R (*cette définition ne fait appel qu'à la structure d'ordre de R*) ហើយអាចពង្រីកទៅលើសំនុំដែលមានលំដាប់គ្រប់ធាតុ ណាក៏បាន (*et peut s'étendre à n'importe quel ensemble totalement ordonné*) ។

<u>ត្រលប់ មកទស្សនៈ មេត្រិក (Retour au point de vue métrique).</u>

ដោយប្រៀបធៀប និយមន័យ-I នៃកថាខណ្ឌនេះ ទៅនឹងនិយមន័យ-I នៃកថាខណ្ឌពីមុន យើងអាចថ្លែងថា៖

*

*

ការស្នើ-VII-3-1 (Proposition-VII,3,1).

ដើម្បី ស្វ៊ីត (x_n) នៃចំណុច នៃ លំហ មេត្រីក E រត់ទៅរកចំណុច x នៃ E នោះត្រូវតែ និងគ្រាន់តែ ស្វ៊ីត នៃចម្ងាយ $d(x, x_n)$ រត់ទៅរក សូន្យ ។

បើគេចង់រាយការណ៍ ឲ្យឆាប់អំពី លីមីត គេអាចកម្រិត ត្រឹមតែ កំណត់ ការរត់ទៅរក សូន្យ នៃស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយដោយ យក ការស្នើ-VII-3-1 នេះជា និយមន័យ។

ឧទាហរណ៍

I. ស្វ៊ីត $\frac{1}{n}$ រត់ទៅរក សូន្យ ។ ពីព្រោះ

បើ គេឲ្យ ចំនួន វិជ្ជមាន មិនសូន្យ $\varepsilon > 0$ មួយមក គេអាចរកចំនួនគត់ p មួយ ដែលកាលណា $n \geq p$ នោះគេបាន $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ ។ តើយើងរកចំនួនគត់ p នេះ បានដោយរបៀបណា ? គឺដោយ បកស្រាយ វិសមីការ $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ និង $n \geq p$ ដូចតទៅ ៖

ដោយ n និង p សុទ្ធតែជាចំនួន វិជ្ជមាន => $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{p}$ (1)

ហើយ ដើម្បី ឲ្យ $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ ដោយ (1) យើគ្រាន់តែយក $\frac{1}{p} \leq \varepsilon$ នោះគ្រប់គ្រាន់ហើយ ដូច្នេះ $\frac{1}{p} \leq \varepsilon$ => $p \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ។ ដោយ ε គេឲ្យ ដូច្នេះ $\frac{1}{\varepsilon}$ ក៏យើងដឹងដែរ ហើយ យើងយក p ជាចំនួនគត់មួយ ដែលជិតឬ ស្មើ នឹង $\frac{1}{\varepsilon}$ ។ ឧបមា $\varepsilon = 10^{-3}$ នោះ $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 = 1000$ ហើយ $p \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ទៅជា $p \geq 1000$ ។ ដូច្នេះ យើង អាចយក $p = 1000$ បាន ដើម្បី ឲ្យ $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ បើកាលណា $n \geq p$ ។

(នៅទីនេះ បើ $n = 1001$ នោះ $n \geq p$ ហើយ $\frac{1}{n} = \frac{1}{1001} \leq \varepsilon = 10^{-3}$)

II. ដោយរបៀបនេះ គេ ក៏អាចបង្ហាញថា ស៊ីត $x_n = n^{-r}$ រត់ទៅរក សូន្យ ចំពោះចំនួន សនិទាន $r > 0$ ណាក៏ដោយ ។

ពីព្រោះ តាមនិយមន័យ យើងត្រូវបង្ហាញ ៖

$[\forall\varepsilon > 0,\ \exists p$ ដែល $n \geq p \Rightarrow n^{-r} \leq \varepsilon]$ (2) ត្រូវរក ចំនួន គត់ p ដោយប្រើ ε ។

$n^{-r} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^r} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n^r \Rightarrow (\frac{1}{\varepsilon})^{-r+1} \leq n^{-r+1+r}$ ឬ $(\frac{1}{\varepsilon})^{-r+1} \leq n$ ។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែយកចំនួនគត់ $p \geq (\frac{1}{\varepsilon})^{-r+1}$ នោះ (2) ក៏ ផ្ទៀងផ្ទាត់ហើយ ។

III. ពីឧទាហរណ៍ ទី១ យើងអាចទាញយកលទ្ធផល ដោយថ្លែងថា គ្រប់ស៊ីត (x_n) ដែលឲ្យ ស៊ីត $n\,|x_n|$ អាចតម្លើងបាន [1] នោះជាស៊ីតរត់ទៅរកសូន្យ ។ ហើយ ស៊ីត x_n កំណត់ដោយ $x_n = k^n$ គឺជាស៊ីតរត់ទៅរកសូន្យ បើ $0 < k < 1$។ ម្យ៉ាងទៀត គេក៏អាចថ្លែង (ដោយមិនពិបាកយល់) ថាស៊ីត $x_n = k^n$ រត់ទៅរកសូន្យ បើសិនជា $|k| < 1$ (គឺថា $-1 < k < 1$) ។

<u>ការប្រតិបត្តិ ៖ ផលបូកនៃ តួ នៃ ជំនឿនធរណីមាត្រអនន្ត (*Application : Somme des termes d'une progression géométrique infinie*).</u>

គេដឹងថា ផលបូក $S_n = 1 + k + k^2 + k^3 + \cdots + k^{n-1}$ នៃ n តួដំបូង នៃ សេរី ធរណីមាត្រ មានរេសុង k (*série géométrique de raison k*) គឺស្មើនឹង $\frac{k^n-1}{k-1}$ ។ បើ $|k| < 1$ លទ្ធផល ពីមុននោះ អាចឲ្យយើងបង្ហាញដោយស្រួលថា ស៊ីត S_n រត់ទៅរក $\frac{1}{1-k}$ ។ យើង នឹងសរសេរដោយ រូបនិមិត្ត ៖ $\sum_{n=0}^{+\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$

---

[1] ពីព្រោះ $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow n\,|x_n| = 1$ ដូច្នេះ $n\,|x_n|$ តម្លើងដោយ 1 ។ ហើយបើ $n\,|x_n| \leq A \Rightarrow |x_n| \leq \frac{A}{n}$ ដូច្នេះ x_n រត់រកសូន្យកាលណា n រត់រក $+\infty$ ។

ហើយយើងថា ផលបូក នៃ សេរីធរណីមាត្រ មានរេសុង k គឺស្មើនឹង $\frac{1}{1-k}$ ចំពោះ $|k| < 1$ ។

នេះជាឧទាហរណ៍ ទី១ នៃសេរីរួម $(\text{série convergente})$ ។ ចំពោះអ្នកដែលមិនធ្លាប់រៀនគណិតសាស្ត្រ គឺគួរឲ្យភ្ញាក់ ដែលមាន ចំនួនកំណត់$(\text{une quantité finie})$ ជាផលបូកនៃចំនួនមិនសូន្យដ៏ច្រើន អនេកពាប់ពុំបាន $(\text{soit la somme d'une infinité de quantités non nulles})$ ។

<u>លីមីត ជាទូទៅ (*Limites généralisées*).</u>

មាន ស្វ៊ីត ដែលមិនរត់ទៅរកចំណុចណាមួយទេ តែមានសភាពសាមញ្ញ ដូចជាករណីស្វ៊ីតកើន ហើយ គ្មានតម្លៃបន្ថែម (non majorée)។ ស្វ៊ីតបែបនេះ គឺអាចកើនទៅហួសចំនួនពិតដែលគេបានឲ្យជាមុន ហើយជាការធម្មតាទេដែលថា ស្វ៊ីតនោះ រត់ទៅរក $+\infty$ ដែលជា រូបនិមិត្ត នៃចំនួនពិត ប្រឌិត $(\text{un nombre réel fictif})$ ធំជាងចំនួនឯទៀតទាំងអស់។

ក៏ដូចគ្នាដែរ ស្វ៊ីតណាមួយ ចុះ ហើយគ្មានចំនួនបន្ទយ (non minoré) នឹងរត់ទៅរក $-\infty$ ។ ជាទូទៅ យើងដាក់ជានិយមន័យ ដូចតទៅនេះ ដែលប្រហែលនឹង និយមន័យ-*III* ដែរ ៖

<u>**និយមន័យ-IV**</u>

គេថា ស្វ៊ីត នៃចំនួនពិត x_n រត់ទៅរក $+\infty$ [ឬ $-\infty$] បើកាលណា ចំពោះចំនួនពិត a មួយដែលគេឲ្យ នោះគេអាចរក ចំនួនគត់ p ដែលចំពោះ $n > p$ នោះគេបាន $x_n > a$ [ឬ $x_n < a$] ។

គួរកត់សម្គាល់ថា មានស្វ៊ីតខ្លះ មិនរត់ទៅរក លីមីត ជាចំនួន កំណត់ (limite finie) ឬមិនកំណត់ (limite infinie) ឡើយ ។ ដូចជាស្វ៊ីត $x_n = k^n$ ចំពោះ $k \leq -1$ ។

គេនឹងបង្ហាញដោយងាយ នូវការស្មើ ដូចតទៅនេះ ដែលមានប្រយោជន៍ ចំពោះការប្រតិបត្តិ ៖

> ***ការស្មើ-VII-3-2*** (proposition-VII,3,2).
>
> ***ដើម្បី ស៊ីត x_n រត់ទៅរក សូន្យ នោះ ត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ ស៊ីត $|x_n|^{-1}$ រត់ទៅរក $+\infty$ ។***

<u>កម្មសិទ្ធិ នៃលីមីត (*Propriétés des limites*).</u>

យើងមើលដោយ ត្រួសៗ នូវ កម្មសិទ្ធិ នៃលីមីត នៃស៊ីត ដែលជា ករណីមួយពិសេស នៃលីមីតនៃ អនុគមន៍ ។

> ***ការស្មើ-VII-3-3*** (proposition-VII,3,3).
>
> ***បើ ស៊ីត x_n និង y_n រត់ទៅរក រៀងៗខ្លួន x និង y នោះ ផលបូក $x_n + y_n$ រត់ទៅរក $x + y$ ។***

គេអាចបង្ហាញការស្មើនេះ ដោយងាយបាន ដោយ បង្ហាញជាមុននូវ ឡឹមខាងក្រោមនេះ ដែលជា ករណីពិសេស ៖

<u>***ឡឹម (a) [Lemme(a)]***</u>

បើ x_n និង y_n រត់ទៅរក សូន្យ នោះផលបូក $x_n + y_n$ រត់ទៅរក សូន្យ ។

> ***ការស្មើ-VII-3-4*** (proposition-VII,3,4).
>
> ***បើ ស៊ីត x_n និង y_n រត់ទៅរក រៀងៗខ្លួន x និង y នោះ ផលគុណ $x_n y_n$ រត់ទៅរក xy ។***

ដើម្បី បង្ហាញការស្នើនេះ យើងសរសេរ ៖

$x_n y_n - xy = x_n(y_n - y) + y(x_n - x)$

ហើយយើងនឹងបង្ហាញថា ស៊ីត $x_n(y_n - y)$ និង $y(x_n - x)$ រត់ទៅរក សូន្យ រៀងៗខ្លួន ដោយសំអាងទៅលើ ឡឹមពីរ ខាងក្រោមនេះ ៖

ឡឹម (b) [Lemme(b)]

បើ ស៊ីត x_n រត់ទៅរកចំណុចរួម (convergente) នោះ ស៊ីត $|x_n|$ មានចំនួនបន្ថែម

ឡឹម (c) [Lemme(c)]

បើ ស៊ីត $|x_n|$ មានចំនួនបន្ថែម ហើយបើស៊ីត y_n រត់ទៅរកសូន្យ នោះ ស៊ីត $x_n y_n$ រត់ទៅរកសូន្យ ។

ការស្នើ-VII-3-5 (proposition-VII, 3,5).

បើ ស៊ីត x_n ជាស៊ីតនៃចំនួនពិត ខុសពី សូន្យ រត់ទៅរក លីមីត x មិនសូន្យ នោះស៊ីត $\frac{1}{x_n}$ រត់ទៅរក $\frac{1}{x}$ ។

ដើម្បីបង្ហាញ ការស្នើនេះ យើងសរសេរ $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_n}{x x_n}$

ហើយយើងប្រើ ឡឹម (c) បន្ទាប់ពីបានបង្ហាញថា ស៊ីត $\frac{1}{|x_n|}$ ជាស៊ីតបន្ថែម ។

ដោយ ការពិចារណាដដែលនេះ គេអាចតាក់តែងនូវ ការស្នើមួយដូចតទៅ ៖

ការស្នើ-VII-3-6 (proposition-VII, 3,6).

បើ (x_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិត វិជ្ជមាន រត់ទៅរក លីមីត x នោះស៊ីត $\sqrt{x_n}$ រត់ទៅរក $\sqrt{x}$ ។

ការស្នើ-VII-3-7 (proposition-VII, 3,7).

បើមានស៊ីត y_n រត់ទៅរកសូន្យ ហើយដែលឲ្យចំពោះ n ធំបន្តួរ គេបានវិសមភាព $|x_n| \le y_n$ នោះស៊ីត x_n ក៏រត់ទៅរក សូន្យ ដែរ ។

ការស្នើ-VII-3-8 (proposition-VII, 3,8).

បើមានស៊ីត y_n និង z_n មានលីមីតតែមួយ a ហើយបើចំពោះ n ធំបន្តួរ គេបាន $y_n < x_n < z_n$ នោះ ស៊ីត x_n ក៏រត់ទៅរក a ដែរ ។