សេរីហ្វួរីយេ

(Série de Fourier)

សៀវភៅនេះអាចយកទៅផ្សាយ ជាធម្មទានបាន - ខ្ញុំ អាន តាយគីម (anntaykim@yahoo.fr)។

អត្ថបទនេះកើតឡើង ក្នុងបំណង ឲ្យមានឯកសារផ្សេងៗ ជាភាសាខ្មែរ ឲ្យបានច្រើន ខាងវិទ្យាសាស្ត្រ ដូចជាខាងគណិតសាស្ត្រជាដើម សម្រាប់ជាជំនួយដល់និស្សិតដែលសិក្សាអំពីមុខវិជ្ជាទាំងនោះ ។ ដើមឡើយ នៅឆ្នាំ ២០០៤ ខ្ញុំបានសរសេរអត្ថបទនេះ សម្រាប់យកទៅបង្រៀនលោកគ្រូអ្នកគ្រូ បង្ហាត់នៅមជ្ឈមណ្ឌល **ក្រមង៉ុយ** *ក្រុងភ្នំពេញ តែដោយឱកាសពុំអនុញ្ញាត ការបង្រៀននោះក៏អាក់ខានទៅ វិញ។ ទើបតែពេលនេះ ជាឱកាសល្អ ខ្ញុំមានសេចក្ដីរីករាយ យកអត្ថបទនេះ មកផ្សាយជាលើកដំបូង ដោយមានលោកស្រី ហង់ ធរីវណ្ណ នៅប្រទេសបារាំង ជួយវាយបញ្ចូលក្នុងកុំព្យូទ័រ។ ដោយពាក្យខ្លះ នៅពេលដែលខ្ញុំសរសេរនោះពុំទាន់មានប្រែជាភាសាខ្មែរ ខ្ញុំក៏ទុកពាក្យនោះជាភាសាបារាំងសិន ។ បើលោកអ្នកអានចេះតែភាសា អង់គ្លេស នោះសូមមើលវចនានុក្រម* **បារាំង-អង់គ្លេស** *សិនទៅ ដើម្បីជាជំនួយដល់ការពន្យល់ ។ សូមអរគុណ ។*

ខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះ អាចផ្ដល់ប្រយោជន៍ខ្លះ ជូនលោកអ្នកអានជាមិនខាន ។

សង់សៀម៉ាណ ថ្ងៃ ១៥ ឧសភា ឆ្នាំ ២០១៣

អាន តាយ គីម

បុព្វយោគ

មុននឹងរៀនពីសេរីហ្វូរីយេ គប្បីមើលឡើងវិញនូវនិយមន័យ និងរូមមន្តខ្លះដែល នឹងត្រូវប្រើក្នុងមេរៀននេះ

1 - សញ្ញាណស៊ីត

យើងធ្លាប់ឃើញអនុគមន៍លេខដែលកំនត់ពី R ទៅ R , ដូចជា :

$$R \xrightarrow{f} R$$
$$x \xrightarrow{f} x^2 \qquad : f(x) = x^2$$

នៅពេលនេះយើងនិយាយពីអនុគមន៍ដែលកំនត់ពី N ទៅ R , អនុគមន៍នោះហៅថា " ស៊ីតនៃចំនួនពិត"

> ជាទូទៅ : ស៊ីតនៃចំនួនពិត គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំនត់ពី N ទៅ R

ឧទាហរណ៍ $N \xrightarrow{u} R$

$$n \xrightarrow{u} u(n) = n^2$$

ប៉ុន្តែចំពោះស៊ីតគេកំនត់សរសេរ U(n) ជា U_n វិញ, ដូច្នេះ $U(n) = n^2$ គេសរសេរជា $U_n = n^2$

បើ n = 1 , 2 , 3 , ... នោះគេបាន :

$n = 1 , u_1 = 1^2 = 1$
$n = 2 , u_2 = 2^2 = 4$
$n = 3 , u_3 = 3^2 = 9$
....

- ចំនួន 1, 4, 9, ... ហៅថាស៊ីតនៃចំនួនពិត
- ហើយ $u_1, u_2, u_3,$ ..... ហៅថាតួទី១ , តួទី២ , តួទី៣ នៃស៊ីត

សង្កេត

- គេអាចកំនត់ស៊ីត ដោយអោយតួ ដែលរៀបតាមលំដាប់ ពីទី១, ទី២, ទី៣, ...

រហូតដូចជា :

1, 4, 9, 16, ...

រឺម៉្យាងទៀត ដោយអោយតួទី n នៃស៊ីតនោះ គឺ $u_n = n^2$ (ចំពោះឧទាហរណ៍ខាងលើ)

- ចំពោះឧទាហរណ៍ខាងលើ n ចាប់ផ្តើមពី ១ ទៅ, ចំពោះស៊ីតខ្លះ n អាចចាប់ផ្តើមពីសូន្យក៏មានដែរ

- ដោយសង្ខេប គេអាចសរសេរស៊ីតជាពីរបែប ចំពោះស៊ីត (u_n) ខាងលើ គេអាចកំនត់ដោយ :

1, 4, 9, 16, ...

រឺ $u_n = n^2$ និង $n \geq 1$

តួ u_n ហៅថា : តួទូទៅនៃស៊ីត (u_n)

2 - សញ្ញាណសេរី (notion de série)

និយមន័យ

គេហៅថាសេរីនៃស៊ីត (u_n) គឺជាផលបូក $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$

ដោយតួ $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$ មានចំនួនដល់ $+\infty$

បើគេតាំង

- $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$, នោះ S ជាលីមីតនៃ S_n កាលណា n ខិតជិត $+\infty$

- u_n ជាតួទូទៅនៃស៊ីត (u_n) ក៏ជាតួទូទៅនៃសេរីដែរ ។

ឧទាហរណ៍

គេអោយ $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

នោះសេរី (S_n) ស្របជាមួយគឺ :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ ... + \frac{1}{2^n}$$

យើងធ្លាប់ស្គាល់ហើយថា (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $\frac{1}{2}$, ហើយរូបមន្តសំរាប់គណនា s_n គឺ :

$$S_n = \frac{lq-a}{q-1}$$ ដោយ l = តួចុងក្រោយនៃ s_n

a = តួដំបូងនៃ s_n

$$Sn = \frac{\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^n}$$ q = រេសុងនៃស៊ីត ($q \neq 1$)

បើ $n \to +\infty$, គេឃើញថា $s_n \to 2$

ដូច្នេះគេបាន :

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$$

រឺ $$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

<u>សង្កេត</u>

តួ $u_n = \frac{1}{2^n}$ មិនមានអថេរ x ជាប់ជាមួយទេ ហើយសេរីជាសេរីដែលតួនិមួយៗ ជាចំនួនទនព្វន្ត (nombre arithmétique)

តែបើ u_n មានអថេរ x ជាប់ជាមួយដូចជា $u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, នោះសេរីជាសេរីអនុគមន៍ ព្រោះ u_n ជាអនុគមន៍ដោយមាន x ជាអថេរ ។

<u>3 - រូបមន្តខ្លះនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ</u>

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

(F-3-1)

4 - សេរីហ្វួរីយេ

នៅក្នុងផ្នែកអេឡិចត្រូនិច (électronique) បើសញ្ញាចូល (signal en entrée) តាងដោយអនុគមន៍ខួប, ថេរ រឺ ក៏ដោយ អនុគមន៍ ស៊ីនុស (sinus) រឺ កូស៊ីនុស (cosinus) នោះការសិក្សាសញ្ញាចេញ មានការងាយស្រួលជាងករណីដែលអនុគមន៍នៃសញ្ញាចូលត្រឹមតែជាអនុគមន៍ខួបជាទូទៅ ។

ហេតុនេះហើយបានជាគេរកវិធីដើម្បីបំបែកអនុគមន៍ខួបជាទូទៅ អោយទៅជាអនុគមន៍ខួប ថេរ, រឺក៏ជាអនុគមន៍ស៊ីនុស រឺ កូស៊ីនុស ។ វិធីបំបែកនេះបានចាប់ផ្តើមឡើងដោយលោក ហ្វួរីយេ (baron FOURIER) រស់នៅពីឆ្នាំ 1768 ដល់ 1837 ។ បានន័យថា

បើ e ជាអនុគមន៍ខួបដោយមាន T ជាប្រវែងមួយខួប, នោះគេបំបែក e(t) ជា :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{a_n} \cos n\omega t + \mathrm{b_n} \sin n\omega t) \qquad \textbf{(1)}$$

ដោយ $\omega = \frac{2\pi}{n}$ និង $n \in \mathbb{N}$ **(2)**

សង្កេត

នៅក្នុង (1), អញ្ញាត គឺ a_n និង b_n តែចំពោះ ω មិនមែនជាអញ្ញាតទេ ព្រោះដោយ (2) , $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ហើយ T ជាប្រវែងមួយខួបនៃអនុគមន៍ខួប e.

- បើគេអាចសរសេរទំនាក់ទំនង (1) បាននោះ គេថាគេបំបែកសញ្ញា e(t) ជាសេរីហ្វួរីយេ ហើយ
- a_n និង b_n ហៅថា មេគុណហ្វួរីយេ (coefficient de Fourier) ស្របនឹងអនុគមន៍ e

5 - គណនាមេគុណ a_n និង b_n

យើងត្រូវចាំថា e ជាអនុគមន៍ខួបដែលគេអោយជាមួយនឹង T ដែលជាប្រវែងមួយខួប នៃអនុគមន៍ e នៅពេលនេះយើងត្រូវគណនា a_n និង b_n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង សមិការ (1) ដោយប្រើអនុគមន៍ e នឹងខួប T

មុននឹងគណនា a_n និង b_n, **គេសន្មតថា** :

1 - គេអាចផ្លាស់ប្តូរសញ្ញាបូក (Σ) និងសញ្ញា អាំងតេក្រាល ($\int$)

2 - $b_0 = 0$ នៅក្នុង (1)

ដូច្នេះ e (t) អាចសរសេរជា :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \qquad \mathbf{(3)}$$

3 - យើងសន្មតយកចន្លោះ I ប្រវែងមួយខួប ឧទាហរណ៍ដូចជា :

I = [0, T] តែយើងក៏អាចយក

I = [α,α + T] ដែរ, ដោយ $\alpha \in R$

5.1 គណនាមេគុណ a_0

ដោយយកអាំងតេក្រាល, (3) ទៅជា :

$$\int_0^T e(t)dt = \int_0^T a_0 dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \int_0^T \cos n\omega t \, dt + b_n \int_0^T \sin n\omega t \, dt \right]$$

តែ

$$\int_0^T \cos n\omega t \, dt = \frac{1}{n\omega} \left| \sin n\omega t \right|_0^T = \frac{1}{n\omega} \sin n\omega t$$

ដោយ (2), $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ដូច្នេះ :

$$\sin n\omega t = \sin n \frac{2\pi}{T} . T = \sin n(2\pi) = 0$$

ដូច្នេះ

$$\int_0^T \cos n\omega t \, dt = 0 \ \ (n \geq 1)$$

ហើយ

$$\int_0^T \sin n\omega t\, dt = \frac{1}{n\omega} \left| -\cos n\omega t \right|_0^T = -\frac{1}{n\omega} (\cos n\omega T - \cos 0)$$

$$= -\frac{1}{n\omega} (\cos n.\frac{2\pi}{T}.T - 1) = -\frac{1}{n\omega} (\cos n(2\pi) - 1)$$

ដូច្នេះ

$$\int_0^T \sin n\omega t\, dt = 0 \ (n \geq 1)$$

ចូរសង្កេតថា n ត្រូវធំជាងសូន្យ ព្រោះមានមេគុណ $\frac{1}{n\omega}$ នៅក្នុងកន្សោមអាំងតេក្រាល ដោយ សង្ខេបទៅ $\int_0^T e(t)dt$ នៅសល់តែ :

$$\int_0^T e(t)dt = \int_0^T a_0 dt = a_0 |t|_0^T = a_0 T$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t)dt$$

<u>ចំណាំ</u>

ចំពោះអនុគមន៍ sinus និង cosinus , អាំងតេក្រាលប្រវែងមួយខួបមានតម្លៃសូន្យ :

$$\int_0^T \sin k\omega t\, dt = \int_0^T \cos k\omega t\, dt = 0$$

ដោយ $k \geq 1$ ហើយ $k \in \mathbb{N}$ និង $= \omega = \frac{2\pi}{T}$

5.2 គណនា a_n $(n \geq 1)$

ដោយគុណ (3) នឹង cos $p\omega t$ $(p \geq 1)$, គេបាន :

$$e(t) \cos p\omega t = a_0 . \cos p\omega t + \sum_{n \geq 1} (a_n cos\ n\omega t . \cos p\omega t + b_n \sin n\omega t . \cos p\omega t)$$

ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលពី 0 ទៅ T, គេបាន :

$$\int_0^T e(t) \cos p\omega t\, dt = a_0 \int_0^T \cos p\omega t\, dt +$$

$$\sum_{n\geq 1}\left[a_n \int_0^T \cos n\omega t.\cos p\omega t\, dt + b_n \int_0^T \sin n\omega t.\cos p\omega t\, dt\right]$$

ដោយ $\int_0^T \cos p\omega t\, dt = 0$ (មើលចំណាំ), នោះយើងអាចសរសេរ

$$\int_0^T \boldsymbol{e(t)\cos p\omega t\, dt} = \sum_{n\geq 1}(\boldsymbol{a_n I_n + b_n J_n})$$ ដោយ

$I_n = \int_0^T \cos n\omega t.\cos p\omega t\, dt$ និង $J_n = \int_0^T \sin n\omega t.\cos p\omega t\, dt$ **(4)**

ដើម្បីគណនា I_n រឺ J_n យើងប្រើរូបមន្ត §3 ហើយយើងបាន :

$$I_n = \int_0^T \frac{1}{2}\big(cos(n\omega t + p\omega t) + cos(n\omega t - p\omega t)\big)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^T \cos(n+p)\,\omega t dt + \int_0^T \cos\,(n-p)\omega t dt\right]$$

ចំពោះ n ≠ p យើងបានដឹងរួចមកហើយថា (មើលចំណាំ)

$$\int_0^T \cos(n+p)\,\omega t dt = 0 \text{ និង } \int_0^T \cos\,(n-p)\omega t dt = 0$$

ចំពោះ n = p

$$\int_0^T \cos\,(n+p)\omega t dt = \int_0^T cos2p.\omega t dt = 0$$

$$\int_0^T \cos(n-p)\,\omega t dt = \int_0^T dt = |t|_0^T = T \text{ (ព្រោះ } \cos 0 = 1)$$

ដូច្នេះ

$$I_n = \begin{cases} 0 \text{ បើ } n \neq p \\ \frac{1}{2}T \text{ បើ } n = p \quad => \; I_p = \frac{T}{2} \end{cases}$$ **(5)**

$$J_n = \int_0^T \sin n\omega t.\cos p\omega t\, dt$$

$= \int_0^T \frac{1}{2}[\sin(n\omega t + p\omega t) + \sin\,(n\omega t - p\omega t)]dt$ (ដោយរូបមន្ត §3) , រឺ

$$J_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^T \sin(n+p)\,\omega t d + \int_0^T \sin\,(n-p)\omega t dt\right]$$

$J_n = 0$, ព្រោះ $\int_0^T \sin(n+p)\,\omega t dt = 0$ (ដោយចំណាំ)

និង $\int_0^T \sin(n-p)\,\omega t dt = 0$ (បើ $p = n$, $\sin(n-p) = \sin 0 = 0$)

ដោយសង្ខេប, (4) ទៅជា :

$$\int_0^T e(t)\cos p\omega t\,dt = \sum_{n\geq 1} a_n I_n + \sum_{n\geq 1} b_n J_n$$

$$= a_p I_p + \sum_{\substack{n\geq 1\\ n\neq p}} a_n I_n \;(\text{ព្រោះ } J_n = 0)$$

$$= a_p \frac{T}{2} \quad (\text{ដោយ } (5))$$

ដូច្នេះ $a_p = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos p\omega t\,dt \quad \forall p \geq 1$

5.3 គណនា b_n ($n \geq 1$)

ដើម្បីរក b_n យើងប្រើរបៀបដូច § 5 . 2 តែយើងគុណ e(t) ដោយមេគុណ sin pωt នៅទីបញ្ចប់យើងបាន :

$$b_p = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\sin p\omega t\,dt, \quad \forall p \geq 1$$

ត្រូវចាំថា : $b_0 = 0$

ដោយប្រើ :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\,\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$e(t).sinp\omega t = a_0.sinp\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\,\omega t.sinp\omega t + b_n \sin n\omega t.sinp\omega t)$$

ដោយយកអាំងតេក្រាល :

$$\int_0^T e(t)\,.\,sinp\omega t\; dt$$

$$= a_0 \int_0^T sinp\omega t \;\; dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^T cosn\omega t . \sin p\omega t\; dt + b_n \int_0^T sinn\omega t . \sin p\omega t\; dt \right)$$

$= \sum_{n\geq 1}(a_n I_n + b_n J_n)$ ដោយ $\int_0^T sinp\omega t$ dt = 0 និង

$I_n = \int_0^T cosn\omega t . \sin p\omega t\; dt,$ $J_n = \int_0^T sinn\omega t . \sin p\omega t\; dt$

.

<u>ដូច្នេះ យើងបាន</u> :

$\int_0^T e(t)\,.\,sinp\omega t\; dt = \sum_{n\geq 1}(a_n I_n + b_n J_n)$, ដោយ $I_n = \int_0^T cosn\omega t . \sin p\omega t\; dt,$ $J_n = \int_0^T sinn\omega t . \sin p\omega t\; dt$.	**(6)**

ដោយប្រើរូបមន្ត §3 និងចំណាំ, គេបាន :

$I_n = \frac{1}{2} \int_0^T [\sin(p\omega t + n\omega t) + \sin(p\omega t - n\omega t)]$ dt

$= \frac{1}{2} \left(\int_0^T \sin(p+n)\omega t)dt + \int_0^T \sin(\mathrm{p}-\mathrm{n})\omega\mathrm{t}\, dt \right) = 0$

$J_n = \int_0^T sinn\omega t . \sin p\omega t\; dt$

$= \frac{1}{2} \int_0^T [\cos(n\omega t - p\omega t) - \cos(n\omega t + p\omega t)]dt$

$= \frac{1}{2} \left(\int_0^T cos\,(\mathrm{n}-\mathrm{p})\,\omega\mathrm{t}\; dt - \int_0^T \cos(n+p)\omega\mathrm{t}\; dt \right)$

$= \frac{1}{2} \int_0^T \cos(n-p)\omega t\; dt$, ដោយ $\int_0^T \cos(\mathrm{n}+\mathrm{p})\,\omega\mathrm{t}\;\mathrm{dt} = 0$ (ព្រោះ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

ហើយកាលណា t =T , $\omega t = \frac{2\pi}{T} . T = 2\pi$)

ដូច្នេះ : $J_n = 0$ បើ $\mathrm{n} \neq p$ (ដោយ ចំណាំ)

បើ n = p យើងបាន $J_n = \frac{1}{2} \int_0^T dt = \frac{1}{2}$T (ព្រោះ cos 0 = 1)

ដូច្នេះ $J_n = \begin{cases} 0 & \text{បើ } n \neq p \\ \frac{T}{2} \text{ បើ } n = p, & \text{ហើយ } J_p = \frac{T}{2} \end{cases}$; និង $I_n = 0, \forall n \geq 1.$

ដោយ (6) ,

$$\int_0^T e(t).sinp\omega t\, dt = \sum_{n\geq 1}(a_n I_n + b_n J_n)$$

$$= \sum_{n\geq 1}(b_n J_n) \text{ , (ដោយ } I_n = 0 \text{)}$$

$$= b_p J_p + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n\neq p}} b_n J_n \text{ , តែ } J_n = 0 \text{ ចំពោះ } n \neq p \text{ , ដូច្នេះ}$$

$$\int_0^T e(t).sinp\omega t\, dt = b_p .\frac{T}{2} \quad \Rightarrow b_p = \frac{2}{T}.\int_0^T e(t).\sin p\omega t.dt$$

<u>បើសង្ខេបទៅយើងបាន :</u>

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)dt \text{ ; } b_0 = 0$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos n\omega t.dt \text{ ; } b_n = \frac{2}{T}.\int_0^T e(t).\sin n\omega t.dt$$
ដោយ : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ និង $n \in N^*$ ($n \geq 1$) **(7)**

<u>សង្កេត :</u>

ដើម្បីសម្រួលក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាល I_n និង J_n យើងបានយកចន្លោះប្រវែងមួយខួប ពីសូន្យទៅ T តែយើងក៏អាចយកចន្លោះ [α,α+T] ក៏បានដែរ ហើយលទ្ធផលមេគុណ a_0, a_n និង b_n ក៏នៅតែដដែល, ព្រោះថាពី α ទៅ α+T ប្រវែងនៅតែមួយខួបដដែល ពោលគឺ :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} e(t)dt \text{ ; } b_0 = 0$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} e(t)\cos n\omega t.dt \text{ ; } b_n = \frac{2}{T}.\int_\alpha^{\alpha+T} e(t).\sin n\omega t.dt$$
ដោយ : $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\alpha \in R$ និង $n \in N^*$ ($n \geq 1$) **(8)**

- គេប្រើរូបមន្ត (8) នៅពេលណាដែល e ជាអនុគមន៍ គូ រឺ ជាអនុគមន៍សេស នៅពេលនោះគេយក $\propto = -\frac{T}{2}$

- ដើម្បីរករូបមន្ត (8) ត្រូវត្រឡប់ទៅរកន័យដើមរបស់ I_n នៅ §5.2 និង §5.3 ដោយគណនា អាំងតេក្រាល

មិនមែនពី 0 ទៅ T នោះទេ តែពី α ទៅ α+T វិញ ។ ដោយ §5.2 យើងមាន :

$$I_n \;= \frac{1}{2}\left[\int_0^T \cos(n+p)\,\omega t dt + \int_0^T \cos\,(n-p)\omega t dt\right]$$

ទៅជា :

$$I_n \;= \frac{1}{2}\left[\int_\propto^{\propto+T} \cos(n+p)\,\omega t dt + \int_\propto^{\propto+T} \cos\,(n-p)\omega t dt\right]$$

បន្ទាប់មក លទ្ធផលឯទៀតក៏ផ្អែកតែទៅលើ ចំណាំនៅ §5.1 ទាំងអស់,

ដូច្នេះដើម្បីបកស្រាយនូវរូបមន្ត (8) ខាងលើ

យើងគ្រាន់តែផ្លូវអាំងតេក្រាល នៃចំណាំនោះ ពី សូន្យ ទៅ T មកជាពី α ទៅ (α+T) វិញ , ពោលគឺ :

<u>ចំណាំ - 1</u>

$$\int_\propto^{\propto+T} \sin k\omega t\;dt = \int_\propto^{\propto+T} \cos k\omega t\;dt = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

ដោយ $\propto \epsilon R, k \in N^*$ និង $= \omega = \frac{2\pi}{T}$

ត្រូវបង្ហាញថា : $\int_\propto^{\propto+T} \sin k\omega t\;dt = 0$

$$\int_\propto^{\propto+T} \sin k\omega t\;dt = \frac{1}{k\omega}\;[-\cos k\omega t]_{\propto}^{\propto+T}$$

$$= \frac{-1}{k\omega}[\cos k\omega(\alpha+T) - \cos k\omega\alpha]$$

$$= \frac{-1}{k\omega}[\cos k\frac{2\pi}{T}(\alpha+T) - \cos k\frac{2\pi}{T}\alpha]$$

$$= \frac{-1}{k\omega}[\cos(k\frac{2\pi}{T}\propto + k\frac{2\pi}{T}T) - \cos k\frac{2\pi}{T}\alpha]$$

$$= \frac{-1}{k\omega}[\cos(k\frac{2\pi}{T}\propto + k.2\pi) - \cos k\frac{2\pi}{T}\alpha]$$

= 0 ដោយ $\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\propto + k.2\pi\right) = \cos k\frac{2\pi}{T}\propto$ ។

ត្រូវបង្ហាញថា : $\int_{\propto}^{\propto+T} \cos k\omega t \, dt = 0$

$$\int_{\propto}^{\propto+T} \cos k\omega t \, dt = \frac{1}{k\omega} \left[\sin k\omega t\right]_{\propto}^{\propto+T}$$

$$= \frac{1}{k\omega} [\sin k\omega(\alpha + T) - \sin k\omega\alpha]$$

$$= \frac{1}{k\omega} [\sin k\frac{2\pi}{T}(\alpha + T) - \sin k\frac{2\pi}{T}\alpha]$$

$$= \frac{1}{k\omega} [\sin(k\frac{2\pi}{T}\propto + k\frac{2\pi}{T}T) - \sin k\frac{2\pi}{T}\alpha]$$

$$= \frac{1}{k\omega} [\sin(k\frac{2\pi}{T}\propto + k.2\pi) - \sin k\frac{2\pi}{T}\alpha]$$

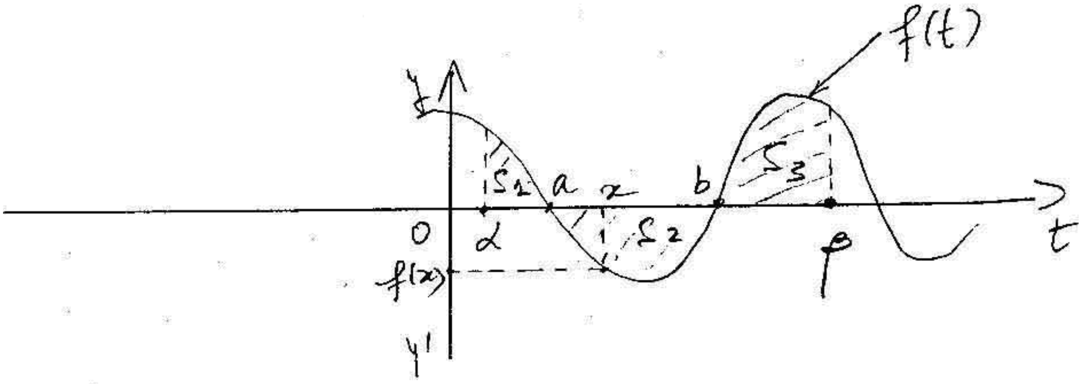
= 0 ដោយ $\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\propto + k.2\pi\right) = \sin k\frac{2\pi}{T}\propto$ ។

ដូច្នេះ យើងបានរូបមន្ត (9) ខាងលើនេះហើយ ៕

6 -បកស្រាយតាមផ្ទៃក្រឡាពិជគណិតនៃខ្សែកោង

ដោយមេគុណហ្វួរីយេ ជាអាំងតេក្រាលកំនត់ពី α ទៅ (α+T) នៃអនុគមន៍ខួប (T ជាប្រវែងមួយខួប)

នោះយើងអាចបកស្រាយរូបមន្តខ្លះដោយប្រើផ្ទៃក្រឡា ខណ្ឌដោយខ្សែកោង, អក្ស ot, បន្ទាត់សមិការ t=α និង t= α+T

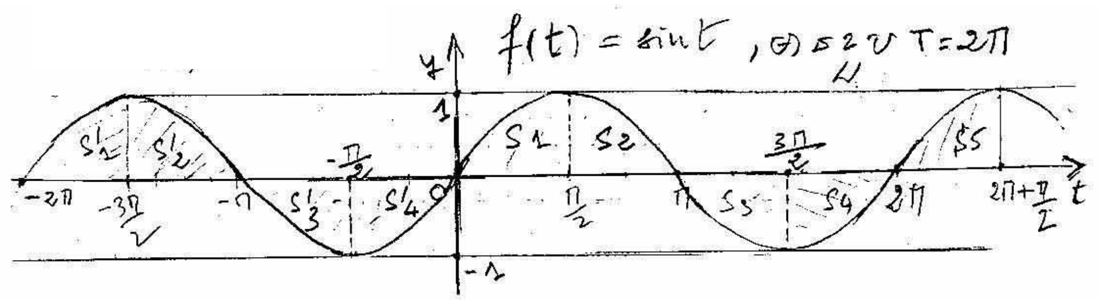


យើងដឹងហើយថា, ជាទូទៅ, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$ មានតម្លៃស្មើនឹងផ្ទៃក្រឡាពិជគណិត $S_1 + S_2 + S_3$

- នៅចន្លោះ [α, a], ដោយ f(x) ≥ 0, នោះផ្ទៃក្រឡា $S_1 \geq 0$
- នៅចន្លោះ [a, b], ដោយ f(x) ≤ 0, នោះផ្ទៃក្រឡា $S_2 \leq 0$

- នៅចន្លោះ [b, β], ដោយ f(x) ≥ 0, នោះផ្ទៃក្រឡា $S_3 \geq 0$

6-1 ឧទាហរណ៍



យើងដឹងថា :

- $\int_0^{2\pi} \sin t.dt$ = S1 + S2 +S3 + S4

យើងឃើញថា : $S_1 + S_2 \geq 0$, $S_3 + S_4 \leq 0$

ដោយ $|S_1 + S_2| = |S_3 + S_4|$, នោះ $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$

ហើយ :

- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} \sin t.dt$ = S2 + S3 +S4+S5

យើងឃើញថា : $S_2 \geq 0, S_3 \geq 0, S_4 \leq 0, S_5 \geq 0$

ដោយ $|S_2| = |S_3| = |S_4| = |S_5|$, នោះ $S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 0$

ដូច្នេះ : $\int_0^{2\pi} \sin t.dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} \sin t\,.dt$

អាំងតេក្រាលប្រវែងមួយខួបមានតម្លៃ នៅដដែល

(10)

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t.dt = S'4 + S1$

យើងឃើញថា : $S'_4 \leq 0, S_1 \geq 0$

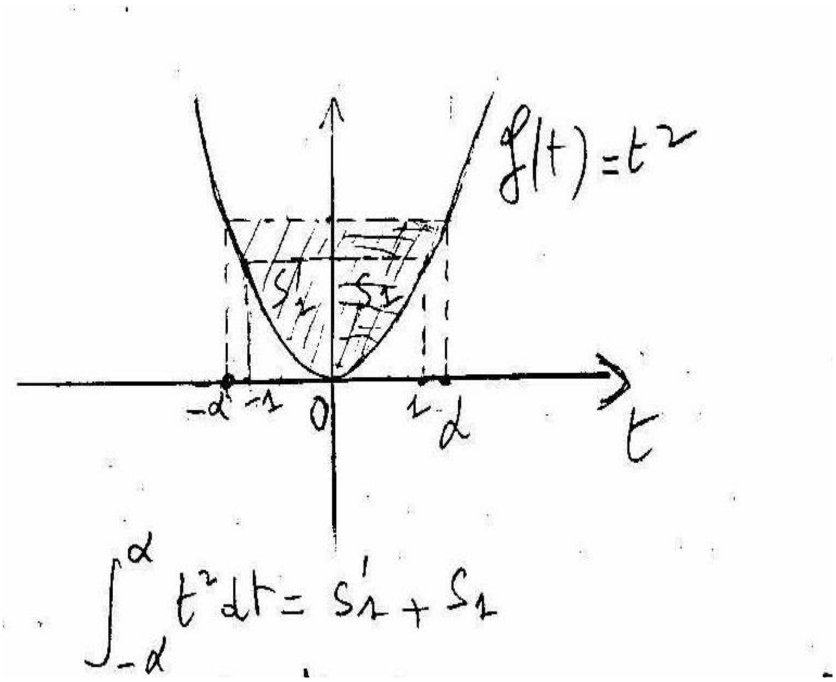
ដោយ $|S'_4| = |S_1|$, នោះ $S'_4 + S_1 = 0$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t.dt = 0$,

ដូច្នេះហើយ ជាទូទៅ

- **សន្និដ្ឋាន - 1**

បើ f ជាអនុគមន៍សេស, $\int_{-\propto}^{\propto} f(t).dt = 0$, $\forall \propto \in R$



យើងឃើញថា :

$S'_1 \geq 0$, $S_1 \geq 0$ និង $S'_1 = S_1$

ដូច្នេះ

$S'1 + S1 = 2.S1 \Rightarrow \int_{-\propto}^{\propto} t^2.dt = 2\int_0^{\propto} t^2.dt$

ដូច្នេះហើយ ជាទូទៅ

- ***សន្និដ្ឋាន - 2***

បើ *f* ជាអនុគមន៍គូ, $\int_{-\propto}^{\propto} f(t).dt = 2\int_0^{\propto} f(t).dt$, $\forall \propto \in R$

<u>ប្រតិបត្តិ</u> យើងយកលទ្ធផលទាំងនេះមកអនុវត្តិលើ សេរីហ្វួរីយេ យើងបានដឹងថា :

$e(t) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (F_1)$

ដោយ

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} e(t)dt\,; \quad b_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} e(t)\cos n\omega t.dt \;;\; b_n = \frac{2}{T}.\int_{\propto}^{\propto+T} e(t).\sin n\omega t.dt$$

6.2 បើ e ជាអនុគមន៍គូ យើងចង់បង្ហាញថា $b_n = 0 \;\forall\; n \geq 1$

ព្រោះដោយ (F_1), បើ e(t) ជាអនុគមន៍គូនោះ

$a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$

ដែលស្មើនឹង e(t) ក៏ត្រូវជាអនុគមន៍គូដែរ , តែនៅក្នុងកន្សោមនេះមានតែ $\cos n\omega t$ ទេដែលជាអនុគមន៍គូ , ចំពោះ $\sin n\omega t$ វិញ, វាជាអនុគមន៍សេស ។ ដូច្នេះដើម្បីនឹង (F_1) ផ្ទៀងផ្ទាត់នោះបាន លុះត្រាតែ

$b_n \sin n\omega t = 0$ ។ ដោយហេតុថា $\sin n\omega t$ ពុំអាចសូន្យជានិច្ចនោះទេ , នោះមានតែ b_n ដែលស្មើនឹងសូន្យ, នេះបើយើងរិះគិតតាមការសមហេតុសមផល ។

ដោយថាគណិតសាស្ត្រ ត្រូវតែបង្ហាញអោយឃើញច្បាស់ នោះយើងគណនាមេគុណ b_n នេះតែម្តង :

$$b_n = \frac{2}{T}.\int_{\propto}^{\propto+T} e(t).\sin n\omega t.dt$$

e(t) អនុគមន៍ គូ

$\sin n\omega t$ អនុគមន៍ សេស

⟹ e(t) $\sin n\omega t$ ជាអនុគមន៍សេស

ព្រោះថា

(F2) e(t) អនុគមន៍ គូ ≪==≫ e(t) = e(-t)

$\sin n\omega t$ អនុគមន៍ សេស ≪==≫ $\sin(-n\omega t) = -\sin n\omega t$

បើ f(t) = e(t) $\sin n\omega t$

នោះ f(-t) = e(-t) $\sin(n\omega(-t))$

= e(-t). $\sin(-n\omega t)$

= e(t)(- $\sin n\omega t$) ដោយ **(F2)**

= - e(t) $\sin n\omega t$

= - f(t)

<u>ដោយសង្ខេប</u> :

បើ f(t) = e(t) sin nωt , យើងឃើញថា f (- t) = - f (t) , ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍សេស

$$b_n = \frac{2}{T}.\int_{\propto}^{\propto+T} e(t).\sin n\omega t.dt$$

$= \frac{2}{T} . \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) . \sin n\omega t . dt$ ដោយ **(10)**

$= 0$ (ដោយ **សន្និដ្ឋាន-2** , $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) . \sin n\omega t . dt = 0$)

សន្និដ្ឋាន-3

បើ e (t) ជាអនុគមន៍គូ

e(t) = $a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos n \omega t$

ម្យ៉ាងទៀត , e(t) អនុគមន៍គូ

$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} e(t) \cos n\omega t . dt$

ដោយ e(t)cos nωt ជាអនុគមន៍គូដែរនោះ យើងអាចសរសេរ ដោយ **សន្និដ្ឋាន-2** :

$a_n = \frac{2}{T} .2 \int_{0}^{\frac{T}{2}} e(t) \cos n\omega t . dt$

$= \frac{4}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} e(t) \cos n\omega t . dt$, និង

$a_0 = \frac{2}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} e(t) dt$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} e(t) \cos n\omega t . dt \text{ , និង}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} e(t) dt$$

6.3 លំហាត់

ចូរបង្ហាញថា : បើ e(t) ជាអនុគមន៍សេស

1er / $a_0 = 0$ និង $a_n = 0$ $\forall n \geq 1$

2è / e(t) = $\sum_{n\geq 1} b_n \sin n\omega t$

3è/ $b_n = \frac{4}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} e(t) \sin n\omega t . dt$

(ចូរសង្កេតថា a_0 ដែលជាចំនួនពិត អាចចាត់ទុកជា អនុគមន៍គូ ក៏បានដែរ គឺ អនុគមន៍ថេរ)

7 - ឧទាហរណ៍

7.1 ឧទាហរណ៍ -1

គេឲ្យអនុគមន៍ f មានខួប $T = 2\pi$, កំនត់ដោយ

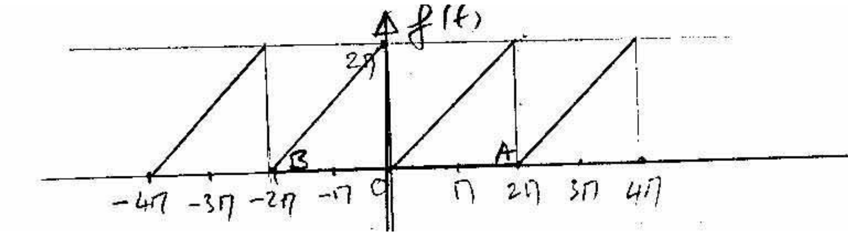
$f(t) = t$ បើ $t \in [0, 2\pi[$

ក) នៅក្នុងតំរុយ អរត្វូកូណាល $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ចូរគូរខ្សែកោងតំណាង អនុគមន៍ f ដោយកំរិតតែ ក្នុងចន្លោះ $[-4\pi, +4\pi]$

ខ) ចូររកមេគុណ ហ្វូរីយេ a_0 , a_n , b_n ។

ក)



(G1)

សង្កេត

ដោយ f ជាអនុគមន៍ខួប ហើយមួយខួប T ប្រវែង 2π
នោះយើងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f តែមួយខួប

គឺលើចន្លោះ $[0, 2\pi]$, បន្ទាប់មកយើងគ្រាន់តែរំកិលក្រាបនោះទៅខាងស្តាំ ស្មើនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$

ដើម្បីនឹងបានក្រាបលើចន្លោះ $[2\pi, 4\pi]$ ហើយនឹងរំកិលទៅខាងឆ្វេងស្មើនឹង វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OB}$

ដើម្បីនឹងបានក្រាបលើចន្លោះ $[-2\pi, 0]$, ដល់បានក្រាបនៅក្នុងចន្លោះ $[-2\pi, 0]$
យើងរំកិលក្រាបនោះបន្តទៅទៀត ដើម្បីបានក្រាបក្នុងចន្លោះ $[-4\pi, -2\pi]$.

ខ) ដោយ f មិនមែនជាអនុគមន៍គូ រឺ សេស នោះយើងប្រើរូបមន្ត **(7)** នៃ §5
ដើម្បីរក a_0 , a_n និង b_n ។

$T = 2\pi$

ដោយ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ នោះ $\omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t.dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}.\frac{(2\pi)^2}{2} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t.dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} t.\cos nt.dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t.\cos nt.dt$$

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក , យើងដាក់ :

u = t => du = dt

dv = $\cos nt.dt$ => v = $\frac{1}{n}\sin nt$, ដូច្នេះ a_n ទៅជា :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left|t.\frac{1}{n}\sin nt\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin nt.dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\pi\frac{1}{n}\sin n2\pi + \frac{1}{n^2}|\cos nt|_0^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}(\cos n2\pi - \cos 0)\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}.\int_0^T f(t).\sin n\omega t.dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} t.\sin nt.dt$$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t.\sin nt.dt$, ដោយប្រើអាំងតេក្រាល ដោយផ្នែក :

u = t => du = dt

dv = $\sin nt.dt$ => v = $-\frac{1}{n}\cos nt$, b_n ទៅជា :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left|t.\frac{-1}{n}\cos nt\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{-1}{n}\cos nt.dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left|t.\frac{-1}{n}\cos nt\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\left|\frac{1}{n}\sin nt\right|_0^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\pi\left(\frac{-1}{n}\right)\cos n2\pi + \frac{1}{n^2}\sin n2\pi\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2\pi}{n}\right] = -\frac{2}{n}$$

<u>ជាសង្ខេបទៅ</u>: $a_0 = \pi$ ហើយ a_n=0, $b_n = -\frac{2}{n}$, $\forall n \geq 1$

ដូច្នេះ

f(t) = $a_0 + \sum_{n\geq1}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]$ ទៅជា

t = $\pi - \sum_{n\geq1}\frac{2}{n}\sin(nt)$

t = π - 2 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin(nt)$, បើសិនជាសេរីហ្វួរីយេមាន ។	**(E1)**

__*ការសង្កេត*__

រូបមន្ត **(E1)** *បង្ហាញថា អនុគមន៍* f(t) = t *និង* g(t) = π - 2 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin nt$, *ស្មើគ្នា ដូច្នេះ ខ្សែកោង នៃអនុគមន៍ទាំងពីរក៏ត្រូវដូចគ្នាដែរ ។ តែដោយ* g(t) *បានមកពីការ បំបែកជាសេរីហ្វួរីយេ ហើយ ស្មើនិង* f(t) *កាលណា* n *ទៅជិត* +∞ *យើងគ្រាន់តែមើល ទម្រង់ខ្សែកោងរបស់* g(t) *នេះ ប្រៀបនិង ខ្សែកោង របស់* f(t) *ចំពោះ ចំនួនខ្លះរបស់* n *ទុកដូចជាការប្រៀបធៀបតទៅនេះ៖*

g(t) = $\boldsymbol{\pi}$ - 2 $\boldsymbol{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin(nt)}$

ក/ __*បើកំរិត* n = 1__, *គេសរសេរ* g(t) = π – 2 [1/1. sin(t) + $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\sin(nt)$]

= π - 2sin(t) + (-2 $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\sin(nt)$)

= g1(t) + R1(t) , *ដោយ*

__g1(t) = π - 2sint__ *និង* R1(t) = -2 $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\sin(nt)$ (R1(t) *គឺផ្នែកសំណល់របស់* g(t))

ខ/ __*បើកំរិត* n = 2__, *គេសរសេរ* g(t) = π – 2 [1/1. sin(t) + ½.sin(2t) + $\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}\sin(nt)$]

= g2(t) + R2(t) , *ដោយ*

__g2(t) = π - 2[sin(t) + ½.sin (2t)]__ *និង* R2(t) = -2 $\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}\sin(nt)$ (*ជាផ្នែកសំណល់របស់* g(t))

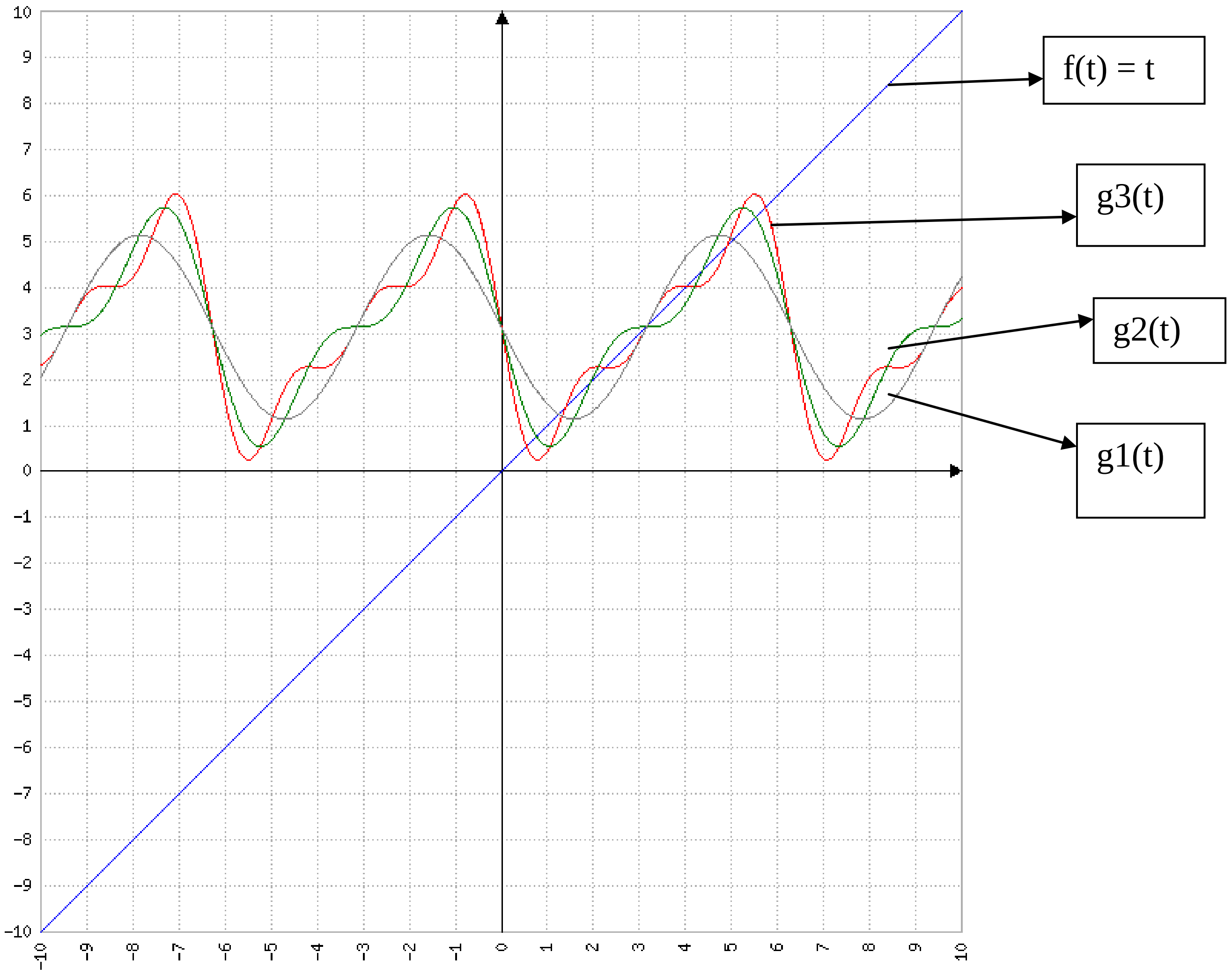
គ/ __*បើកំរិត* n = 3__, *គេសរសេរ*

g(t) = π – 2 [1/1. Sin(t) + ½.sin(2t)+1/3.sin(3t) + $\sum_{n\geq 4}\frac{1}{n}\sin(nt)$]

= g3(t) + R3(t) , *ដោយ* __g3(t) = π – 2[sin(t) + (1/2)sin(2t) +(1/3)sin(3t)]__ *និង*

R3(t) = - $\sum_{n\geq 4}\frac{1}{n}\sin(nt)$ (*គឺផ្នែកសំណល់របស់* g(t))

យើងដឹងហើយថា f *ជាអនុគមន៍មានខួប* T= 2π, *កំនត់ដោយ* f(t) = t *បើ* t ϵ [0,2π[*ដូច្នេះយើងផ្តួង ខ្សែកោងរបស់* f *និង* g *តែក្នុងប្រវែង មួយ ខួបៗ ដូចខាងក្រោមនេះ ៖*



យើងសង្កេតឃើញថា កាលណា n កាន់តែធំ កំពូល (អប្បបរមា)ខ្សែកោង កាន់តែខិតជិតគល់ O នៃតំរុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ព្រោះថា f(0) = 0 ដូច្នេះ g(0) ក៏ត្រូវខិតទៅជិត សូន្យ ដែរ កាលណា n ខិតជិតអនន្ត ។ ម្យ៉ាងទៀត ខ្សែកោង g(t) ក៏នឹងមានទម្រង់កាន់តែដូចខ្សែបន្ទាត់របស់ f(t)= t ។

ខាងក្រោមនេះ ជាខ្សែកោង របស់ g(t) ដោយ n = 17

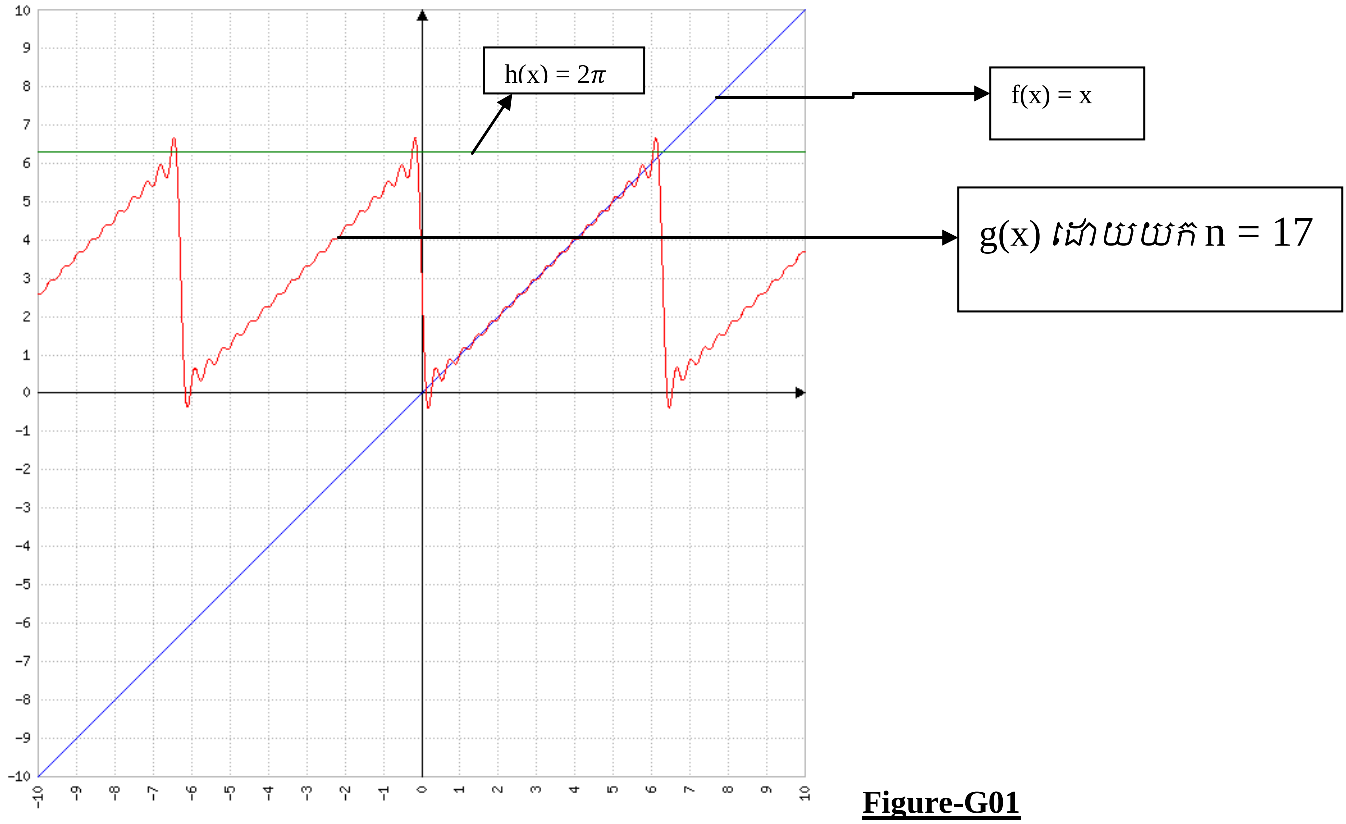


Figure-G01

តារាងតម្លៃនៃអនុគមន៍ : $f(x) = x$,

$g(x) = \pi - 2[\sin(x) + 1/2 .\sin(2x) + 1/3.\sin(3x) + \ldots + 1/17.\sin(17x)]$ $(n = 17)$

$h(x) = 2\pi$

Tableau des valeurs des trois fonctions f, g, h des courbes de Figure-G01								
X	f(x)	g(x)	h(x)		x	f(x)	g(x)	h(x)
-10	-10,000	2,602	6,283		0	0,000	3,142	6,283
-9	-9,000	3,620	6,283		1	1,000	1,020	6,283
-8	-8,000	4,553	6,283		2	2,000	1,938	6,283
-7	-7,000	5,406	6,283		3	3,000	2,965	6,283
-6	-6,000	0,308	6,283		4	4,000	4,039	6,283
-5	-5,000	1,197	6,283		5	5,000	5,087	6,283
-4	-4,000	2,244	6,283		6	6,000	5,975	6,283
-3	-3,000	3,318	6,283		7	7,000	0,878	6,283
-2	-2,000	4,345	6,283		8	8,000	1,730	6,283
-1	-1,000	5,263	6,283		9	9,000	2,663	6,283
	0,000	3,142	6,283		10	10,000	3,681	6,283

សង្កេត

ដោយតារាងនេះ យើងឃើញថា $f(0) = 0$ តែ $g(0) = 3,142$ ហេតុអ្វីបានជា $f(0)$ និង $g(0)$ មានតម្លៃខុសគ្នាច្រើនម្ល៉េះ ហើយបែរជាមានតម្លៃជិតគ្នាវិញ កាលណា $x \neq 0$? នេះមកពី f ជា អនុគមន៍លោត ត្រង់ $x = 0$ (ចូរកុំភ្លេចថា f ជាអនុគមន៍ខួប មួយខួប $= [0, 2\pi[$)។

7.2 ឧទាហរណ៍-2

គេអោយសញ្ញាដែលគំរូដោយ អនុគមន៍ f មានខួបប្រវែង 2π, កំនត់ដោយ :

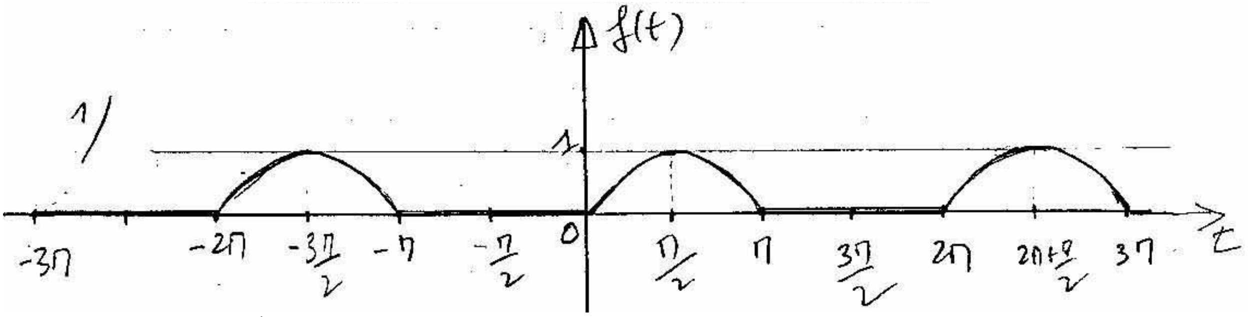
f(t) = sin(t) បើ t ∈ [0, π[

f(t) = 0 បើ t ∈ [π, 2π[

1) ចូរគូរនៅក្នុងតំរុយ អ័រតូកូណាល (orthogonal) ខ្សែកោងតំណាង f ក្នុងចន្លោះ [-3π, +3π]

2) គណនាមេគុណហ្វូរីយេ (coefficients de Fourier) នៃអនុគមន៍ f

G2



ដូចជា ឧទាហរណ៍-1 ដែរ យើងគ្រាន់តែគូរក្រាបប្រវែងមួយខួប គឺលើចន្លោះ [0, 2π [,
បន្ទាប់មកយើងរំកិលក្រាបនោះទៅខាងស្តាំ រឺ ខាងឆ្វេង (តែលើកនេះ ក្រាបពី មួយខួប ទៅ មួយខួប សុទ្ធតែជាប់គ្នារហូត មិនមែនដាច់ ដូចឧទាហរណ៍-1 នោះទេ)

2/ T = 2π, ដោយ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ នោះ $\omega = 1$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).dt = \frac{1}{2\pi}[\int_0^{\pi} f(t).dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t).dt]$

$= \frac{1}{2\pi}[\int_0^{\pi} sin(t).dt$ (ព្រោះថា f(t) = 0 នៅចន្លោះ $[\pi, 2\pi[$)

$= \frac{1}{2\pi}.|-\cos t|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}(\cos(\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{\pi}$ =>

$$a_0 = \frac{1}{\pi}$$

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t.dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).\cos nt.dt$

$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi}\sin(t).\cos nt.dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0.\cos nt.dt$]

$= \frac{1}{\pi} . \int_0^{\pi} \sin(t) . \cos nt. dt$

$= \frac{1}{\pi} . \int_0^{\pi} [\sin(t + nt) + \sin(t - nt)]. dt$

$= \frac{1}{2\pi} . \int_0^{\pi} [\sin(1 + n)t + \sin(1 - n)t]. dt$

$= \frac{1}{2\pi} . [\frac{1}{1+n} . |- \cos (1 + n)t)|_0^{\pi} + \frac{1}{1-n} |- \cos(1 - n) t|_0^{\pi}]$

$= - \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{1+n} (\cos(1+n)\pi - \cos(0)) + \frac{1}{1-n} (\cos(1 - n)\pi - \cos(0))]$

$= - \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{1+n} (\cos(1+n)\pi - 1) + \frac{1}{1-n} (\cos(1 - n)\pi - 1)]$ **(E1)**

-ដោយ $\cos(1+n)\pi$ អាចស្មើនឹង +1 រឺ -1 តាមចំនួន n នោះយើង គណនា a_n ទៅតាម n ជាចំនួនគត់គូ រឺ ក៏ជាចំនួន សេស

-ដោយមានតួ $\frac{1}{1-n}$ កន្សោម **(E1)** ខាងលើ មានន័យលុះត្រាតែ (1-n $\neq$ 0) , គឺ n $\neq$ 1

a) បើ n = 2p (n ជាចំនួនគូ) និង p ≥ 1

$a_n = - \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{1+n} (\cos(1+n)\pi - 1) + \frac{1}{1-n} (\cos(1 - n)\pi - 1)]$ ទៅជា :

$a_{2p} = - \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{1+2p} (\cos(1+2p)\pi - 1) + \frac{1}{1-2p} (\cos(1 - 2p)\pi - 1)]$

$= - \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{1+2p} (- 1 - 1) + \frac{1}{1-2p} (-1 - 1)]$

$= - \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{1+2p} (- 2) + \frac{1}{1-2p} (-2)]$

$= \frac{1}{\pi} [\frac{1}{1+2p} + \frac{1}{1-2p}] = \frac{1}{\pi} [\frac{2}{(1+2p)(1-2p)}] = \frac{1}{\pi} . \frac{2}{1-4p^2}$ => $a_{2p} = \frac{2}{\pi(1 - 4p^2)}$ $\forall$ p ≥ 1

b) បើ n = 2p + 1 (n ជាចំនួនសេស) និង p ≥ 1

$a_n = - \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{1+n} (\cos(1+n)\pi - 1) + \frac{1}{1-n} (\cos(1 - n)\pi - 1)]$ ទៅជា :

$a_{2p+1} = - \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{1+(2p+1)} (\cos(1+(2p+1))\pi - 1) + \frac{1}{1-(2p+1)} (\cos(1 - (2p + 1))\pi - 1)]$

$= - \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{2p+2} (\cos(2(p+1)\pi - 1) - \frac{1}{2p} (\cos(-2p)\pi - 1)]$

= 0 ដោយ $\cos(2k)\pi = 1$ $\forall k \in Z$ => $a_{2p+1} = 0$ $\forall$ p ≥ 1

$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t. dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t). \sin nt. dt$

$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} sint. \sin nt. dt$ (ដោយ f(t) = 0 នៅលើ $[\pi, 2\pi[$)

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [(\cos(t - nt) - \cos(t + nt)] . dt$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [(\cos(1 - n)t - \cos(1 + n)t] . dt$

$= \frac{1}{2\pi} [\frac{1}{1-n} . |\sin (1 - n)|_0^{\pi} - \frac{1}{1+n} . |\sin(1 + n) t|_0^{\pi}]$

-ចំពោះ n ≠ 1

$b_n = 0$ ព្រោះ $\sin(1-n)\pi = 0$ និង $\sin(1+n)\pi = 0$ =>

$b_n = 0$ បើ $n \neq 1$

-ចំពោះ n = 1

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega t.dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).\sin t.dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t.\sin t.dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin^2 t.dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-cos2t).dt$$ ដោយ $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\ |t|_0^{\pi} - \frac{1}{2}.|sin2t|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{2}$$ =>

$b_1 = \frac{1}{2}$

ដោយសង្ខេបទៅ

$a_0 = \frac{1}{\pi}$; $a_1 = 0$; $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_n = 0$ បើ $n > 1$ $a_{2p} = \frac{2}{\pi(1-4p^2)}$ $(p \geq 1)$; $a_{2p+1} = 0$ $(p \geq 1)$

C2

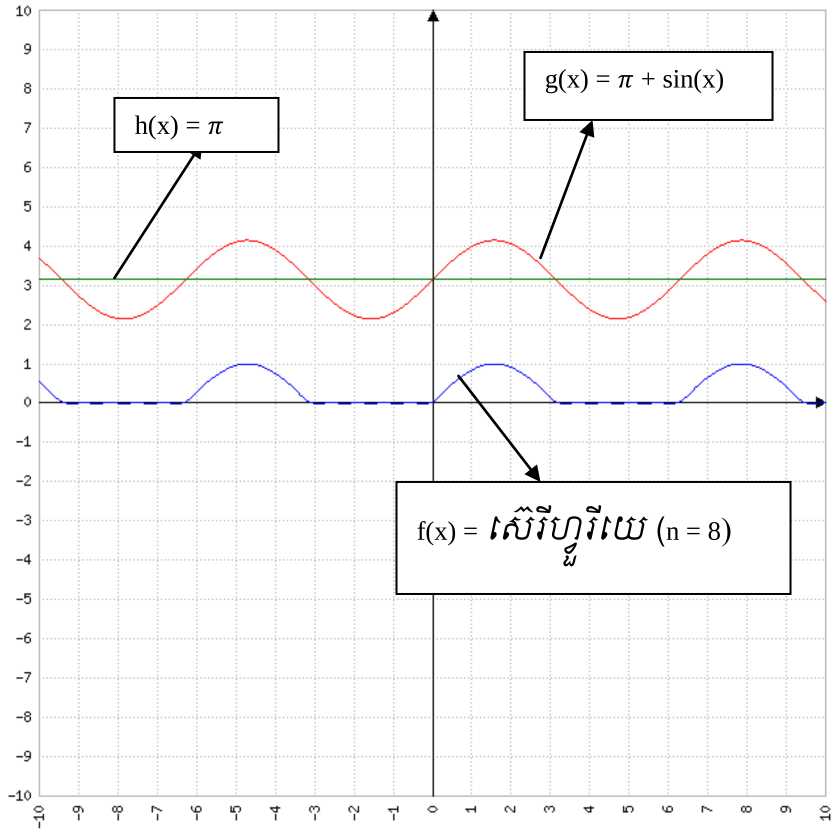
ការសង្កេត

អនុគមន៍ខួប ក្នុង ឧទាហរណ៍-1 និង ឧទាហរណ៍-2 ខុសគ្នា ដោយ ក្នុង ឧទាហរណ៍-1 ខ្សែកោង G1 ដាច់ត្រង់ $t = 0$ និង $t = 2\pi$ តែចំពោះ ខ្សែកោង G2 ក្នុង ឧទាហរណ៍-2 វិញ គឺ ជាប់រហូត ពីមួយខួបទៅមួយខួប ។ ដោយយើងមាន មេគុណ ហ្វូរីយេ យើងចង់ដឹងថាតើ ខ្សែកោង របស់អនុគមន៍បានដោយប្រើ C2 ខាងលើនេះ វាមានរាងយ៉ាងណា បើប្រៀបធៀបទៅនឹង ខ្សែកោង G2 ? យើងដឹងថា ចំពោះ ស៊េរីហ្វូរីយេ ៖

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$$
$$= a_0 + a_1\cos(t) + b_1\sin(t) + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t) + a_3\cos(3t) + b_3\sin(3t) + \ldots$$
$$\ldots + a_8\cos(8t) + b_8\sin(8t) + R(t).$$

(ដោយ $R(t) = \sum_{n\geq 9}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$ និង ដោយ C2, នោះ f(x) ទៅជា ៖

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos(2x) + \frac{1}{15}\cos(4x) + \frac{1}{35}\cos(6x) + \frac{1}{63}\cos(8x)\right)$$ (ដោយយកំរិត n = 8)



បើប្រៀបធៀប ខ្សែកោង របស់ f(x) និង g(x) ឃើញថា ក្នុងចន្លោះ $[0, \pi]$ ខ្សែកោងទាំងពីរ មានរាងប្រហែលគ្នា ហើយខ្សែកោង របស់ f(x) ក៏ ប្រហែលនឹង ខ្សែកោង G2 ដែរ ។

Tableau de valeurs តារាងតម្លៃ អនុគមន៍ f, g, h.

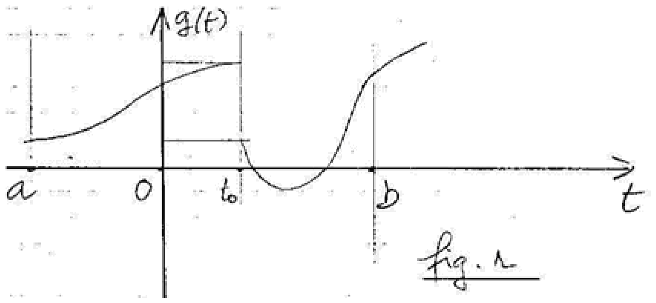
x	f(x)	g(x)	h(x)		x	f(x)	g(x)	h(x)
-10	0,550	3,686	3,142		0	0,035	3,142	3,142
-9	0,002	2,729	3,142		1	0,839	3,983	3,142
-8	-0,001	2,152	3,142		2	0,912	4,051	3,142
-7	0,000	2,485	3,142		3	0,133	3,283	3,142
-6	0,270	3,421	3,142		4	-0,005	2,385	3,142
-5	0,962	4,101	3,142		5	0,004	2,183	3,142
-4	0,752	3,898	3,142		6	-0,010	2,862	3,142
-3	-0,008	3,000	3,142		7	0,657	3,799	3,142
-2	0,003	2,232	3,142		8	0,988	4,131	3,142
-1	-0,002	2,300	3,142		9	0,415	3,554	3,142
0	0,035	3,142	3,142		10	0,006	2,598	3,142

8 -ការបំបែកជាស៊េរីហ្វួរីយេ (développement en série de Fourier)

8.1 អនុគមន៍ខួបថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R

A) ការដាច់ប្រភេទទី ១

យើងពិនិត្យមើលអនុគមន៍ g កំនត់លើចន្លោះបើក I នៃ R លើកលែងតែចំនុច $t_0 \in I$ ដែល g អាចមិនកំនត់ ។ គេថា g ដាច់ប្រភេទទី ១ ត្រង់ t_0 បើកាលណា g មានលីមីតកំនត់ នៅខាងឆ្វេង និង ខាង ស្តាំ t_0 (មើល fig -1)



ក្នុងករណីនោះគេសរសេរ :

$$g(t_0-0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} g(t) \quad \text{និង} \quad g(t_0+0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} g(t)$$

សំគាល់

a) បើ g កំនត់ [1] ត្រង់ t_0 បានន័យថា $g(t_0)$ ជាចំនួនពិត, នោះគេអាចជួបស្ថានការណ៍ពីរ :

a-1/ $g(t_0-0) = g(t_0+0) = g(t_0)$: **g ជាប់ត្រង់ t_0**

a-2/ $g(t_0-0) \neq g(t_0)$ **រឺ** $g(t_0+0) \neq g(t_0)$: **g ដាច់ត្រង់ t_0**

b) បើ $t_0 = 0$, គេសរសេរ $g(0+)$ និង $g(0-)$ ជំនួស $g(0+0)$ និង $g(0-0)$

B) អនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើចន្លោះ $I = [a, b] \subset R$

និយមន័យ

ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍យកចំនួនពិត ហើយ $I = [a, b]$ ជាចន្លោះបិតនៃ R

[1] លីមីតកំនត់បានន័យថា លីមីតជាចំនួនពិត មិនអនន្ត

គេថា f នៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើចន្លោះ I ,

<u>បើលក្ខ័ណ្ឌទាំងបីខាងក្រោមនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំងអស់គ្នា</u> :

1°) អនុគមន៍ f <u>កំនត់</u>, ជាប់ និងមានដេរីវេ ហើយអនុគមន៍ដេរីវេសោតទៀត ក៏ជាប់គ្រប់ចំនុចលើចន្លោះ I, <u>លើកលែងតែចំពោះ ចំនុច t_i ខ្លះតែប៉ុណ្ណោះ</u> ($t_i \in$ I) ដែលអនុគមន៍<u>ទាំងពីរ</u>ខាងលើនេះ<u>អាច</u>ដាច់ (t_i អាចស្មើនឹង a រឺ b ក៏មានដែរ) ។

2°) នៅចំនុច t_i និមួយៗ ($t_i \neq a$ និង $t_i \neq b$), $f(t_i+0)$ និង $f(t_i-0)$ មានតម្លៃពិតក្នុង R ហើយបើ $t_i = a$ រឺ $t_i = b$ នោះ $f(a+0)$ រឺ $f(b-0)$ <u>ក៏មានតម្លៃពិតក្នុង</u> R ដែរ ។

(លក្ខ័ណ្ឌនេះនិយាយពីលីមីតនៃអនុគមន៍ f)

3°) នៅចំនុច t_i និមួយៗ ($t_i \neq a$ និង $t_i \neq b$)

$f'(t_i-0)$ និង $f'(t_i+0)$ មានតំលៃពិតក្នុង R ហើយបើ $t_i = a$ រឺ $t_i = b$ នោះ $f'(a+0)$ រឺ $f'(b-0)$ ក៏មានតំលៃពិតក្នុង R ដែរ ។ (លក្ខ័ណ្ឌនេះនិយាយពីលីមីតនៃអនុគមន៍ ដេរីវេ f')

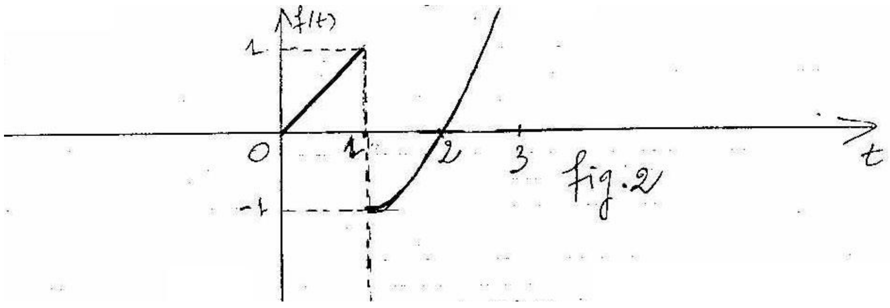
<u>**ឧទាហរណ៍ 8-1**</u>

គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ :

$f(t) = t$ បើ $t \in [0, 1[$

$f(t) = t^2 - 2t$ បើ $t \in]1, 3]$ ។ តើអនុគមន៍ នេះ <u>ផ្ទៀងផ្ទាត់</u> នឹងលក្ខណ្ឌទាំងបី ខាងលើទេ ?

(ចូរសង្កេតថា អនុគមន៍ f <u>មិនកំនត់ទេ</u> ចំពោះ t = 1 ព្រោះចន្លោះបើកទាំងសងខាងត្រង់ t = 1)



1°) អនុគមន៍ f កំនត់, ជាប់ និងមានដេរីវេ ជាប់លើចន្លោះ [0,3] លើកលែងតែត្រង់ចំនុច $t_1 = 1$ ព្រោះនៅលើចន្លោះ [0,1[និង]1,3], f ស្មើនឹងអនុគមន៍ ពហុធា (fonction polynôme)

2°)

$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} f(t) = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} t = 1$, ដូច្នេះ f(1-0) មានតំលៃពិត (គឺមិនមែនអនន្ត)

$\lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} f(t) = \lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} t^2 - 2t = -1$, ដូច្នេះ f(1+0) មានតំលៃពិត (គឺមិនមែនអនន្ត)

រួមសេចក្តីទៅ ៖

f(1 − 0) ជាចំនួនពិត
f(1 + 0) ជាចំនួនពិត] => f ជាប់ប្រភេទទី ១ ត្រង់ t_1=1

3°)

- $t \in [0,1[$, $f(t) = t$, ដូច្នេះ f'(t) = 1 ហើយ $\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} f'(t) = 1$
- $t \in [1,3]$, $f(t) = t^2 - 2t$, ដូច្នេះ f'(t) = 2t – 2 ហើយ $\lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} f'(t) = 0$

រួមសេចក្តីទៅ :

$f'(1-0) = 1$ ជាចំនួនពិត
$f'(1+0) = 0$ ជាចំនួនពិត] => f' មានលីមីតខាងឆ្វេង នឹងខាងស្តាំត្រង់ t_1 =1 ។

<u>សង្កេត</u>

(ដោយលីមីត ខាងឆ្វេងនិងខាងស្តាំត្រង់ t_1 =1 មិនស្មើគ្នា <u>នោះត្រង់ចំណុច t_1 =1</u> អនុគមន៍ f គ្មានដេរីវេទេ ។ទាល់តែលីមីតខាងឆ្វេង ស្មើនឹងលីមីតខាងស្តាំ <u>ហើយ</u>ស្មើនឹង f'(t_1) ទើបគេថា f មានដេរីវេត្រក់ t_1 =1) ។

ដូច្នេះយើងឃើញថា លក្ខ័ណ្ឌទាំងបី នៃនិយមន័យខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំងអស់ ហេតុនេះ f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗ [2] លើចន្លោះ [0,3] ។

<u>ឧទាហរណ៍ 8-2</u> គេអោយអនុគមន៍ g កំនត់ដោយ

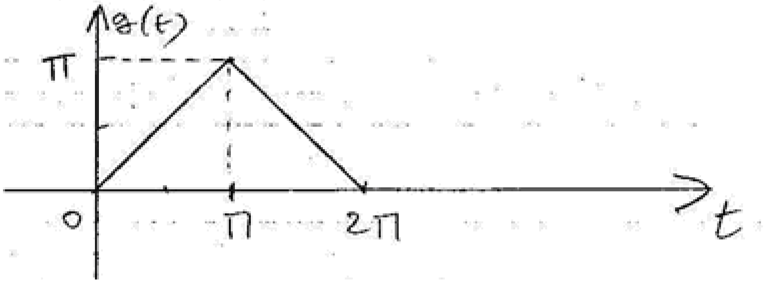
g(t) = t បើ $t \in [0, \pi]$

---

[2] ហេតុអ្វីបានថា <u>"កង់ៗ"</u> ព្រោះអនុគមន៍ f រឺ f' អាចដាច់នៅត្រង់<u>ចំនុចខ្លះនៃចន្លោះ</u>។ តែចំនួនចំនុចរបៀបនេះ ទុកជាមានច្រើនយ៉ាងណា ក៏មិនដល់អនន្តដែរ ។

g(t) = -t+2π បើ t] π, 2π]

ដែលមានក្រាប : (លើកនេះ ត្រង់ t = π, អនុគមន៍ g កំនត់ ព្រោះចន្លោះបើក ខាងឆ្វេង ហើយបិតខាងស្តាំ ត្រង់ t = π)



យើងឃើញថា :

1°) អនុគមន៍ g កំនត់ ជាប និងមានដេរីវេ លើចន្លោះ [0, 2π] <u>លើកលែងតែត្រង់</u> ចំនុច t = π ។ ព្រោះលើចន្លោះ [0, π] និង]π, 2π] g (t) ជាពហុធា (polynôme)

2°) $g(\pi) = \pi$ ព្រោះ g(t) = t លើចន្លោះ [0, π]

$\lim_{\substack{t\to\pi \\ t<\pi}} g(t) = \lim_{\substack{t\to\pi \\ t<\pi}} (t) = \pi$ ⇔ $g(\pi - 0) = \pi$ (បន្ទាត់នេះ មិនដាក់ក៏បានដែរ ព្រោះចន្លោះ [0, π] បិទត្រង់ $t = \pi$, ដូច្នេះ $(\pi - 0)$ ក៏នៅក្នុងចន្លោះ [0, π] ដែរ)

$\lim_{\substack{t\to\pi \\ t>\pi}} g(t) = \lim_{\substack{t\to\pi \\ t>\pi}} (-t + 2\pi) = \pi$ ⇔ $g(\pi + 0) = \pi$

រួមសេចក្តីទៅ

$g(\pi) = g(\pi - 0) = g(\pi = 0) = \pi$ (ចំនួនពិត) ដូច្នេះ <u>g ជាប់ត្រង់ t = π</u>

3°) តាមនិយមន័យ g (t), យើងបាន

លើចន្លោះ [0, π], g'(t) = 1 និង

លើចន្លោះ]π, 2π], g'(t) = -1

ដូច្នេះ

$\lim_{\substack{t\to\pi \\ t<\pi}} g'(t) = 1$ => $g'(\pi - 0)$ ជាចំនួនពិត

$\lim_{\substack{t\to\pi \\ t>\pi}} g'(t) = -1$ => $g'(\pi + 0)$ ជាចំនួនពិត

តែ g' <u>មិនជាប់ទេ ត្រង់ t = π</u> (នេះតាមនិយមន័យជាប់)

រួមសេចក្តីទៅ យើងឃើញថា លក្ខ័ណ្ឌទាំងបី នៃនិយមន័យខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំងអស់ ហេតុនេះ g ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើចន្លោះ $[0, 2\pi]$។

<u>សង្កេត</u>

យើងបានឃើញថាត្រង់ចំនុច $t_1 = \pi$

$$\left.\begin{array}{r} g(\pi) = \pi \\ g(\pi - 0) = \pi \\ g(\pi + 0) = \pi \end{array}\right| \Rightarrow g \text{ ជាប់ត្រង់ចំនុច } t_1 = \pi$$

$$\left.\begin{array}{r} g'(\pi) = 1 \\ g'(\pi - 0) = 1 \\ g'(\pi + 0) = -1 \end{array}\right| \Rightarrow g' \text{ ដាច់ ត្រង់ចំនុច } t_1 = \pi$$

(តែ តាមលក្ខណ្ឌ1°/ នៅ B/ មិនជាចំណោទទេ !)

C - អនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R

<u>និយមន័យ</u>

អនុគមន៍ខួប f មានខួប T ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R កាលណា f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗ លើចន្លោះ $[\alpha,\alpha+T]$, $(\alpha\in R)$

ចំពោះការប្រតិបត្តិ បើអនុគមន៍ខួប f មានខួប T នោះគេគ្រាន់តែបញ្ជាក់ថា f ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើចន្លោះ $[0, T]$ រឺ $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ រឺក៏ $[0, \frac{T}{2}]$ (ទៅតាម f ជាអនុគមន៍ខួបធម្មតា រឺសេស រឺគូ) ក៏បានហើយ ព្រោះថាក្រាបនៃអនុគមន៍ខួប ដូចគ្នាពីខួបមួយទៅខួបមួយ ដោយការរំកិល ដូច្នេះបើអនុគមន៍កំនត់លើចន្លោះមួយខួប ក៏ដូចកំនត់លើចន្លោះពីរ ខួប រឺបីខួប រឺបួនខួប ... ។ ល។ ... ដែរ រួមសេចក្តីទៅ អនុគមន៍នោះក៏កំនត់លើ R ដែរ ។

8.2 ទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ (Dirichlet)

A - ចំណោទ

e ជាអនុគមន៍ខួប មានខួប T ហើយ a_0, a_n, b_n ជាមេគុណកំនត់ដោយរូបមន្ត

(8) ក្នុង §5-3

យើងបានឃើញថា សេរីហ្វួរីយេ នៃ e គឺ :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (S1)$$

យើងសួរថា :

1) តើសេរីហ្វួរីយេ (S_1) នេះមានលីមីតទេ? កាលណា n ខិតជិត $+\infty$

2) បើសេរីហ្វួរីយេ (S_1) នេះមានលីមីត តើលីមីតនោះស្មើនឹង e(t) នោះទេ?

ចំលើយនៃសំនួរទាំងពីរនេះ មានដោយពឹងផ្អែកលើទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេខាងក្រោមនេះ ដែលយើង សន្មត់ដោយយកមិនបាច់បញ្ជាក់ ។

B - ទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ (Dirichlet)

> បើ e ជាអនុគមន៍ខួប មានខួប T ហើយនៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R នោះគេអាចសន្និដ្ឋានថា :
>
> - គ្រប់ចំនុច ដែល e ជាប់ គេបាន :
>
> $$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$
>
> - គ្រប់ចំនុច t_0 ដែល e ជាប់ប្រភេទទី ១ គេបាន
>
> $$\frac{1}{2}\left[e(t_0 - 0) + e(t_0 + 0)\right] = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega t_0 + b_n \sin n\omega t_0)$$
>
> គឺទ្រឹស្តីបទនេះហើយដែលដោះសា ក្នុងការជំនួសអនុគមន៍ e នៃសញ្ញាក្នុងអេលេចត្រូនិច (signal en électronique) ដោយសេរីហ្វួរីយេ ។

ឧទាហរណ៍ 8-3

គេអោយ f អនុគមន៍ខួប, មានខួប $T = 2\pi$ នឹងកំនត់ដោយ :

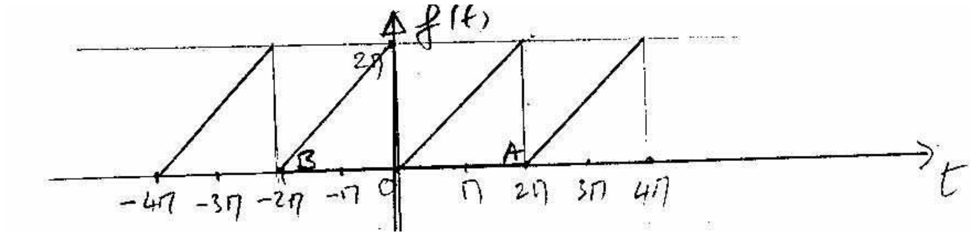
f(t) = t បើ t ∈ [0, 2π[

1°) គូរក្រាបនៃអនុគមន៍ f ក្នុងតំរុយអ័រតូកូណាល $(0, \vec{i}, \vec{j})$ លើចន្លោះ [-4π, +4π]
បន្ទាប់មកចូររកមេគុណហ្វូរីយេនៃ f

2°) បង្ហាញថា f ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ័ណ្ឌទាំងអស់នៃទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ
ហើយទាញយកការបំបែក ជាសេរីហ្វូរីយេនៃអនុគមន៍ f

<u>ចំលើយ</u> :

1°) ចំពោះសំនួរទី ១ យើងបានបកស្រាយរួចមកហើយ ចូរមើល <u>ឧទាហរណ៍-1</u> **§7** ។
លទ្ធផលគឺ :



$a_0 = \pi$ ហើយ ($a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n}$, ∀ n ≥ 1)

2°) យើងយកចន្លោះ [0, 2π] ដើម្បីបញ្ជាក់លក្ខ័ណ្ឌឌីរីក្លេ

a) អនុគមន៍ f កំនត់, ជាប់និងមានដេរីវេជាប់ លើចន្លោះ [0, 2π[
ព្រោះនៅលើ ចន្លោះ [0, 2π[f ស្មើនឹងអនុគមន៍ពហុធា

b) $\lim_{\substack{t\to 2\pi \\ t<2\pi}} f(t) = \lim_{\substack{t\to 2\pi \\ t<2\pi}} (t) = 2\pi$
ដូច្នេះ f(2π-0) មានតំលៃពិតក្នុង R (ដោយ 2π ជាចុងនៃចន្លោះមួយខួប [0, 2π[
យើងមិនចាំបាច់រក $\lim_{\substack{t\to 2\pi \\ t>2\pi}} f(t)$ ទេ ព្រោះវាត្រូវស្មើនឹង f(0))

c) លើចន្លោះ [0, 2π[, f’ (t) = 1
$\lim_{\substack{t\to 2\pi \\ t<2\pi}} f'(t) = \lim_{\substack{t\to 2\pi \\ t<2\pi}} (1) = 1$
ដូច្នេះ f’(2π-0) មានតំលៃពិតក្នុង R
ដូច្នេះតាមនិយមន័យ **B** ក្នុង §8-1, f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R ។

ជាទូទៅ អនុគមន៍ ពហុធា គឺ : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$.

អោយ $P'(x) = 0 + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$

យើងឃើញថា P និង P' សុទ្ធតែជាអនុគមន៍ជាប់និងមានដេរីវេ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ យើងបាន :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$= \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{n}\sin nt \quad (\text{ដោយ } T = 2\pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ )$$

រឺ

$$f(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n} \qquad (S2)$$

<u>ឧទាហរណ៍ :</u> (មើលក្រាបនៃចំលើយ 1°)

- បើ $t \in]0,2\pi[$, $f(t) = t$, ដូច្នេះ ដោយ (S2) យើងបាន

  $$t = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$$

- បើ $t \in]2\pi,4\pi[$, $f(t) = at+b$ ជាបន្ទាត់ (ដោយ a = 1 ហើយ f(t) = 0 កាលណា $t=2\pi$)

  $f(t) = t - 2\pi$, ដូច្នេះ ដោយ (S2) យើងបាន

  $$t - 2\pi = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$$

  ត្រង់ចំនុច $t_0 = 0$, f ដាច់ ហើយយើងឃើញថា

  $\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t) = 2\pi$ (មើលក្រាបនៅចំលើយ 1°) ដូច្នេះ $f(0-) = 2\pi$

  $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t) = 0$, ដូច្នេះ $f(0+) = 0$

ហើយចំពោះចំនុច t_0 តាមទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ គេបាន :

$$\frac{1}{2}[\,f(0+) + f(0-)\,] = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nt_0 \quad (\text{ដោយ } t_0 = 0\ )$$

$$\frac{1}{2}[\,0 + 2\pi\,] = \pi \quad (\text{ព្រោះ } t_0 = 0,\ \sin nt_0 = 0\ )$$

រឺ $\pi = \pi$ ដែលបង្ហាញថា (S2) នៅតែត្រូវដែលចំពោះចំនុច t_i ដែលអនុគមន៍ f ដាច់ ៗ

<u>ឧទាហរណ៍ 8- 4</u>

គេអោយអនុគមន៍ f , ខួប , មានខួប T = 4, កំនត់ដោយ :

$f(t) = 0$ បើ $t \in [-2, -1[$

$f(t) = 1 + t$ បើ $t \in [-1, 0[$

$f(t) = 1 - t$ បើ $t \in [0, 1[$

$f(t) = 0$ បើ $t \in [1, 2[$

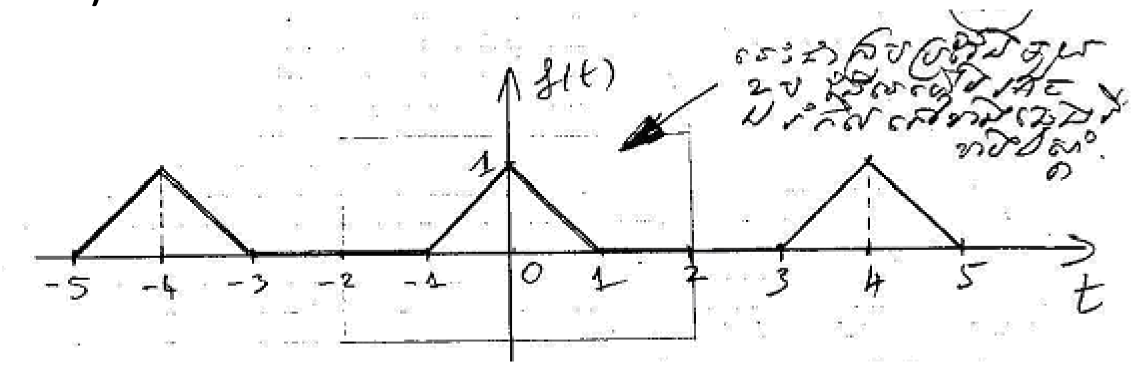
1°) ក្នុងតំរុយអ័រតូកូណាល, ចូរគូរក្រាបដំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងចន្លោះ [-5 , +5]
គេនឹងសង្កេតឃើញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍គូ

2°) គណនាមេគុណហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ f

3°) តើអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងលក្ខ័ណ្ឌទាំងអស់នៃទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេទេ ?
បើផ្ទៀងផ្ទាត់ ចូរអោយសេរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ [-2 , +2[

ចំលើយ :

1°)



2°)

a) ដោយ f ជាអនុគមន៍គូ យើងបាន

$b_n = 0 \quad (n \in N)$

b) គណនា a_0

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}} f(t).dt$$ (ព្រោះ f ជាអនុគមន៍គូ)

$$= \frac{2}{4}\int_0^2 f(t)dt = \frac{2}{4}\left[\int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)dt$$ (ព្រោះ $f(t) = 0$ លើចន្លោះ [1,2[ )

$$= \frac{1}{2}\left|t - \frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{4}}$$

គណនា a_n (n∈ N^*)

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t.dt$

ដោយ $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

f(t) ជាអនុគមន៍គូ

និង $\cos n\omega t$ ជាអនុគមន៍គូ => f(t). $\cos n\omega t$ ជាអនុគមន៍គូ

$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t).\cos n\omega t.dt = \frac{4}{4}\int_0^2 f(t).\cos n\omega t.dt$

$= [\int_0^1 f(t).\cos n\omega t.dt + \int_1^2 f(t).\cos n\omega t.dt]$

$= \int_0^1 (1-t).\cos n\frac{\pi}{2}t.dt$ (ព្រោះ f(t) = 0 លើចន្លោះ [1,2[ )

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

u = 1 – t => du = - dt

$\cos n\frac{\pi}{2}t.dt$ = dv => v = $\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t$ ($n \in N^*$), ដូច្នេះ

$a_n = \left|(1-t).\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t.dt$

$= -\frac{4}{(n\pi)^2}\left|\cos\frac{n\pi}{2}t\right|_0^1 = \frac{4}{n^2}.\frac{1}{\pi^2}[1 - \cos\frac{n\pi}{2}]$

-បើ n ជាចំនួនគូ ($n \neq 0$), $n = 2p$ គេបាន

$\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{2p\pi}{2} = \cos(p\pi) = (-1)^p$ =>

$a_{2p} = \frac{4}{(2p)^2}.\frac{1}{\pi^2}[1 - (-1)^p] = \begin{cases} 0 & \text{បើ } p = 2k\ (k \neq 0) \\ \frac{2}{(2k+1)^2}.\frac{1}{\pi^2} & (\text{បើ } p = 2k+1) \end{cases}$

p = 2k => $a_{2p} = a_{2(2k)} = a_{4k}$ => $a_{4k} = 0$

$a_{4k} = 0$, ($k \neq 0$)

p = 2k+1 => $a_{2p} = a_{2(2k+1)} = a_{4k+2}$ => $a_{4k+2} = \frac{2}{(2k+1)^2}.\frac{1}{\pi^2}$

$a_{4k+2} = \frac{2}{(2k+1)^2}.\frac{1}{\pi^2}$

-បើ n ជាចំនួនសេស (n ≠ 0), n = 2p+1 គេបាន

$\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{(2p+1)\pi}{2} = \cos(2p+1)\frac{\pi}{2} = 0,$ ហើយ

$a_n = \frac{4}{n^2}\cdot\frac{1}{\pi^2}\,[1 - \cos\frac{n\pi}{2}]$ ទៅជា $a_{2p+1} = \frac{4}{n^2}\cdot\frac{1}{\pi^2} = \frac{4}{(2p+1)^2}\cdot\frac{1}{\pi^2}$

$$a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2}\cdot\frac{1}{\pi^2},\ (p \in N)$$

3°) យើងយកចន្លោះ [-2 , + 2] ដើម្បីនឹងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ័ណ្ឌឌីរីក្លេ

a) អនុគមន៍ f កំនត់, ជាប់និងមានដេរីវេជាប់លើចន្លោះ [- 2 , + 2] ក្រៅតែពីចំនួនខ្លះ

ដូចជា : t = - 1 , t = 0 , t = 1 , t = 2

ព្រោះថា : នៅគ្រប់ចន្លោះ [-2 , - 1 [, [- 1 , 0 [, [0, 1 [និង [1 , 2 [, អនុគមន៍ f រឺមួយស្មើនឹងសូន្យ រឺមួយស្មើនឹងអនុគមន៍ពហុធា ។

b) យើងពិនិត្យមើលនូវការប្រព្រឹត្តទៅនៃអនុគមន៍ f នៅក្បែរ t = - 1

$$\lim_{\substack{t \to -1 \\ t < -1}} f(t) = \lim_{\substack{t \to -1 \\ t < -1}} 0 = 0 = f(-1 - 0)$$

ដូច្នេះ f (-1 - 0) ជាចំនួនមួយក្នុង R ។

ដោយ f (- 1) = 0   ដូច្នេះ   f (- 1) = f (- 1 – 0)

ជាហេតុអោយ f ជាប់ត្រង់ t = - 1

ដោយប្រើរបៀបខាងលើគេអាចបង្ហាញថា f ជាប់ត្រង់ចំនុច t = 0 , t = 1 និងជាប់

ខាងឆ្វេងត្រង់ t = 2

ជាសន្និដ្ឋាន : ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ [-2 , + 2]

c) លើចន្លោះ] - 2 , - 1 [, f′(t) = 0   ដូច្នេះ f′(-1 -0) = 0

លើចន្លោះ] - 1 , 0 [, f′(t) = 1   ដូច្នេះ f′(-1 +0) = 1 និង f′ (0 -) = 1

លើចន្លោះ] 0 , 1 [, f′ (t) = - 1   ដូច្នេះ f′ (0 +) = -1 និង f′ (1 – 0) = - 1

លើចន្លោះ] 1 , 2 [, f′ (t) = 0   ដូច្នេះ f′ (1 + 0) = 0 និង f′ (2 – 0) = 0

ដូច្នេះ f′ (-1 -0) , f′ (-1 + 0), f′ (0 -), f′ (0 +) , f′ (1 - 0), f′ (1 + 0) និងទីបញ្ចប់ f′ (2 – 0) សុទ្ធតែជាចំនួនពិត (មិនអនន្ត) ក្នុង R ។

លទ្ធផលទាំងអស់នេះ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗ លើចន្លោះ [-2,+2] ។

ដោយហេតុថា f ជាអនុគមន៍ខួប, មាន ខួប T = 4 , ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R ។

តាមទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ យើងដឹងថាត្រង់គ្រប់ចំនុច t ដែល f ជាប់, សេរីហ្វួរីយេនៃ f មានលីមីត ស្មើនឹង f (t).

ដោយ f ជាប់លើចន្លោះ [-2 , + 2] , ចំពោះគ្រប់ចំនុច t នៃចន្លោះនេះ យើងបាន :

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(4k+2)\frac{\pi}{2}t + \frac{4}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)\frac{\pi}{2}t$$

8 . 3 ភាពកុំផ្លិចនៃសេរីហ្វួរីយេ

បើ f ជាអនុគមន៍ចំនួនពិត, ខួប , មានខួប T នឹងនៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើចន្លោះ ប្រវែង T , [α , α + T] (α∈ R) នោះតួទូទៅនៃសេរីហ្វួរីយេនៃអនុមន៍ f គឺ :

$$U_n = a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

<u>ដោយប្រើរូបមន្ត អឺលែ **(Euler)**</u>

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

យើងបាន :

$$U_n = a_n\frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}$$

$$= a_n\frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}\cdot\frac{i}{i}$$

$$= \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{in\omega t} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-in\omega t}$$

រឺ

$$U_n = C_n e^{in\omega t} + \overline{C_n} \, . \, e^{-in\omega t} \qquad \textbf{(F-8.3-a)}$$

ដោយយក $C_n = \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)$ និង $\overline{C_n} = \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)$

បើប្រើកន្សោមអាំងតេក្រាលនៃ a_n និង b_n , នោះ

$$C_n = \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)$$

ទៅជា :

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{\propto}^{\propto +T} f(t)\cos(n\omega t)dt \;-\; i\frac{2}{T}\int_{\propto}^{\propto +T} f(t)\sin(n\omega t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{\propto}^{\propto +T} f(t)\left(\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)\right)\mathrm{dt}\right]$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, កន្សោម C_n ទៅជា

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{dt} \qquad \textit{\textbf{(F - 8.3 - b)}}$$

ហើយចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $\overline{C_n}$ បានជា

$$\overline{C_n} = \overline{\frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{-in\omega t}\,dt} = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T}\overline{f(t)e^{-in\omega t}dt}$$

$= \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{+in\omega t}\mathrm{dt}$ (ព្រោះ f ជាអនុគមន៍ ពិត, $\overline{f(t)} = f(t)$)

បើយើងជំនួស n ដោយ - n ក្នុងរូបមន្ត (F-8.3-b)

យើងបាន :

$$C_{-n} = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{+in\omega t}\,\mathrm{dt}$$

ដោយប្រៀបធៀបនឹង $\overline{C_n}$ យើងឃើញ $C_{-n} = \overline{C_n}$

ដោយ (F-8.3- a) , យើងបាន

$U_n = C_n . e^{in\omega t} + C_{-n} . e^{-in\omega t}$

ដោយសង្កេតថា (មើល F-8.3-b ចំពោះ n = 0)

$C_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = a_0$

ការបំបែកជាសេរីហ្វួរីយេ នៃអនុគមន៍ f បានជា :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t})$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (n \in Z)$$

នេះជា ភាពកុំផ្លិចនៃ សេរីហ្វួរីយេ

ជាសង្ខេបយើងបានលទ្ធផលដូចតទៅនេះ :

ភាពកុំផ្លិចនៃសេរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ f, យកចំនួនពិត , ខួប , មានខួប T ហើយនៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R គឺ :

$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ ដោយ $C_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}\, dt$ $(n \in Z)$

នៅគ្រប់ចំនុច ដែល f ជាប់ ។ <u>មេគុណកុំផ្លិច C_n</u>

<u>ភ្ជាប់ទៅនឹងមេគុណចំនួនពិត (a_n និង b_n) ដោយទំនាក់ទំនង</u>:

$C_0 = a_0$; $C_n = \frac{a_n - i\, b_n}{2}$ ($n \in N^*$ ហើយ $i^2 = -1$) ;

$C_{-n} = \overline{C_n}$

(F-8.3-c)

<u>ឧទាហរណ៍ 8-5</u>

គេអោយអនុគមន៍ខួប f, មានខួប T = 1, កំនត់ដោយ

$f(t) = e^{-t}$ ចំពោះ $t \in [0, 1[$

1°) ចូរគណនាមេគុណហ្វូរីយេកុំផ្លិចនៃ f

2°) បង្ហាញថាលើចន្លោះ]0 , 1[, អនុគមន៍ f អាចបំបែកជា សេរីហ្វូរីយេកុំផ្លិច ។ នៅលើចន្លោះដដែលនោះ ចូរអោយសេរីហ្វូរីយេ ជាចំនួនកុំផ្លិច និងអោយសេរីហ្វូរីយេជាចំនួនពិត ។

<u>ចំលើយ</u>

1°) f (t) = e^{-t} ជាចំនួនពិត

ចំពោះ n ∈ Z , មេគុណហ្វូរីយេកុំផ្លិច គឺ

$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$ ដោយ T = 1 និង $\omega = \frac{2\pi}{T}$, នោះ

$C_n = \int_0^1 e^{-t}e^{-in2\pi t}\,dt = \int_0^1 e^{-(1+in2\pi)t}dt = \left|-\frac{e^{-(1+in2\pi)t}}{1+in2\pi}\right|_0^1$

$C_n = \frac{1}{1+in2\pi}(1 - e^{-(1+in2\pi)}) = \frac{1}{1+in2\pi}(1 - e^{-1}.e^{-in2\pi})$

$= \frac{1}{1+in2\pi}[1 - \frac{1}{e}(\cos n2\pi - i\sin n2\pi)]$

$= \frac{1}{1+in2\pi}(1 - \frac{1}{e})$ ព្រោះ $\cos n2\pi = 1$ និង $\sin n2\pi = 0$

ដូច្នេះ $C_n = \frac{1}{1+in2\pi}(1 - \frac{1}{e})$ **n ∈ *Z*, (F-8.3-d)**

2°)

a) យើងទុកអោយអ្នកអានបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R ។ ហួសពីនេះ ទៅទៀត f ជាប់លើចន្លោះ]0 , 1[ដូច្នេះតាមទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ សេរីហ្វូរីយេនៃអនុគមន៍ f ខិតជិតទៅ f លើចន្លោះ]0 , 1[ហើយយើងបាន :

f(t) = $\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+in2\pi}(1 - \frac{1}{e})e^{in2\pi t}$ (n∈ Z) ដោយ **(F-8.3-c)**

b) យើងដឹងថា: $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, n ∈ N^*

ដូច្នេះ $\frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{1+in2\pi}(1 - \frac{1}{e})$ (ដោយ **(F-8.3-d)**)

$= \frac{1- in2\pi}{1-(in2\pi)^2}$ (1 - $\frac{1}{e}$) (ដោយប្រើចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់)

$= \frac{1- in2\pi}{1+4\pi^2 n^2}$ (1 - $\frac{1}{e}$)

ដូច្នេះ, ចំពោះ n∈ N^*

$a_n = \frac{2(1-\frac{1}{e})}{1+4\pi^2 n^2}$ និង $b_n = \frac{4\pi n(1-\frac{1}{e})}{1+4\pi^2 n^2}$ (ព្រោះថាចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែផ្នែកចំនួនពិតស្មើគ្នា និងផ្នែកចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា) ។

- ដោយ $a_0 = c_0$, **(F-8.3-d)** អោយចំពោះ n = 0 $a_0 = (1-\frac{1}{e})$

ដូច្នេះចំពោះ t ∈]0,1[, យើងបាន :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n\geq 1}^{+\infty}(a_n \cos(n2\pi t) + b_n \sin(n2\pi t))$$

$$= (1 - \frac{1}{e}) [1 + \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{2}{1+4\pi^2 n^2} (\cos(n2\pi t) + 2\pi n \sin(n2\pi t))]$$

$$f(t) = (1 - \frac{1}{e}) [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1+4\pi^2 n^2} (\cos(2\pi n t) + 2\pi n \sin(2\pi n t))]$$

8.4 រូបមន្ត បារសីវាល (PARSEVAL)

គេអោយអនុគមន៍ខួប f , មានខួប T ហើយព្រមទាំងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ័ណ្ឌទាំងអស់នៃទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ ។

គេបានបង្ហាញរួចមកហើយ យើងគ្រាន់តែអនុមត្តិ សន្មត់យកដោយមិនបាច់បញ្ជាក់នូវរូបមន្តខាងក្រោមនេះ ដែលហៅថារូបមន្ត **បារសីវាល** :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[f(t)]^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}, \quad \alpha \in R$$ **(F-8.4-a),** (ដោយ a_0, a_n, b_n ជាមេគុណ ហ្វូរីយេនៃអនុគមន៍ f យកចំនួនពិត)

- បើសេរីហ្វូរីយេ មានភាពជា :

f(t) = $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi)$, ដោយ $A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$, នោះរូបមន្តបារសឺវ៉ាល ទៅជា :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[f(t)]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \ , \quad \alpha \in R$$

(F-8.4-b)

- បើសេរីហ្វូរីយេ មានភាពជា កុំផ្លិច :

f(t) = $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$, នោះរូបមន្តបារសឺវ៉ាល ទៅជា :

a/ បើ f ជា អនុគមន៍ យកចំនួនពិត

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[f(t)]^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \sum_{-\infty}^{-1}|c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{+1}^{+\infty}|c_n|^2$$

(F-8.4-c1)

b/ បើ f ជា អនុគមន៍ យកចំនួន កុំផ្លិច

(F-8.4-c2)

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}|f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \sum_{-\infty}^{-1}|c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{+1}^{+\infty}|c_n|^2$$

បើ f ជាអនុគមន៍គំរូនៃសញ្ញាអគ្គិសនី (Signal électrique), ខួប, មានខួប T គេដឹងថា បើគេយកឯកតាអោយសមរម្យនោះ អនុភាព P (Puissance) នៃសញ្ញាគឺ

$$\mathbf{P} = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[f(t)]^2 dt$$

ដូច្នេះរូបមន្តបារសឺវ៉ាលបង្ហាញថាអនុភាពនៃសញ្ញាអាចគណនាបានដោយប្រើសេរីហ្វូរីយេនៃសញ្ញានោះ ។

ឧទាហរណ៍ , ឧបមាយើងចង់រកអនុភាពនៃសញ្ញា :

$$\begin{cases} t \to a_0 \\ t \to a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (\text{អាម៉ូនីក ទី } n) \end{cases}$$

នោះយើងបាន (ដោយរូបមន្តខាងលើ):

$$P_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[a_0]^2 dt = {a_0}^2$$

$$P_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]^2 dt$$

រី

$P_n = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T}[a_n{}^2 \cos^2(n\omega t) + b_n{}^2 \sin^2(n\omega t) + 2a_nb_n \cos(n\omega t)\sin(n\omega t)]dt$

ដោយប្រើរូបមន្ត នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ (F-3-1) §3, យើងបាន :

$P_n = \frac{1}{2T}\int_{\propto}^{\propto+T}[a_n{}^2 (1+\cos(2n\omega t)) + b_n{}^2 (1-\cos(2n\omega t)) + 2a_nb_n \sin(2n\omega t)]dt$

ដោយ $\int_{\propto}^{\propto+T}\cos(2n\omega t)dt = 0$ និង $\int_{\propto}^{\propto+T}\sin(2n\omega t)dt = 0$ (ព្រោះ $\omega = \frac{2\pi}{T}$), គេបាន :

$P_n = \frac{1}{2T}\int_{\propto}^{\propto+T}(a_n{}^2 + b_n{}^2)\,dt = \frac{1}{2}(a_n{}^2 + b_n{}^2)$

$$\mathbf{P} = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n = a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n{}^2$$

(មើលរូបមន្ត F-8.4.b)

$A_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}$

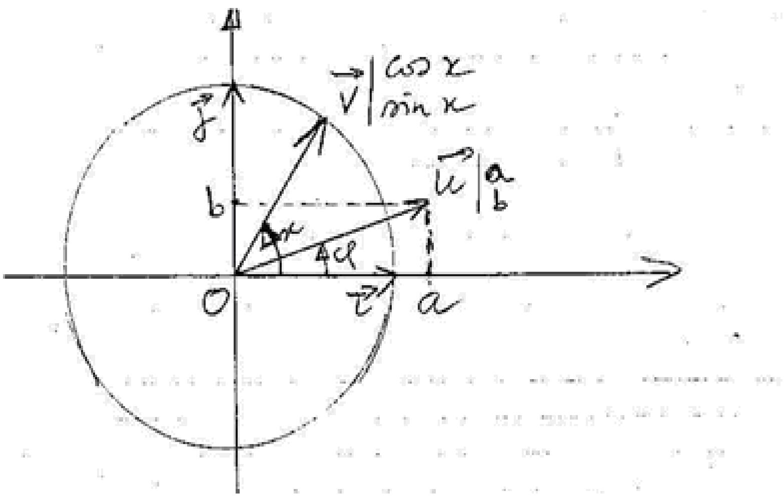
ដូច្នេះយើងបានលទ្ធផលដូចតទៅនេះ :

អនុភាពនៃសញ្ញាដែលមានគំរូជាអនុគមន៍ថ្នាក់C[1]ដោយកង់ៗលើ គឺជាផលបូក នៃអនុភាពរបស់សញ្ញា t →a₀ និងអនុភាពនៃ <u>អាម៉ូនិក ទាំងអស់</u> (នេះគឺជាគោលការណ៍ នៃការរក្សាទុកនូវអនុភាព) ។

8.5 ការបំប្លែងតាមត្រីកោណមាត្រសាស្ត្រ *(une transformation trigonométrique)*

យើងមានបំណងចង់ប្តូរកន្សោម a cos x + b sin x ដោយ a និង b ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

នៅក្នុងតំរុយ អរតូណរមេ , យើងសន្មត់ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ មានកូអរដោនេ (a, b) និង វ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ មានកូអរដោនេ (cos x , sin x)



ដោយគណនាផលគុណ ស្កាលែ $\vec{u}.\vec{v}$, យើងបាន $\vec{u}.\vec{v}=$ a cos x + b sin x

ម៉្យាងទៀត, ផលគុណស្កាលែក៏ស្មើនឹង $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$ **(F-8.5-a)**

ដោយ ទំនាក់ទំនង Chasles, មុំ យើងអាចសរសេរ :

$(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{i}) + (\vec{i},\vec{v}) = (\vec{i},\vec{v}) - (\vec{i},\vec{u})$

$= x - \varphi$ (ដោយរូបខាងលើ)

ដោយ រូបមន្ត **(F-8.5-a)** យើងបាន :

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(x-\varphi)$

$=\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{cos^2x + sin^2x}.\cos(x-\varphi)$, ព្រោះ $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$,

$\|\vec{v}\| = \sqrt{cos^2x + sin^2x}$

នៅទីបញ្ចប់យើងបាន :

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\ .\cos(x-\varphi)$ (ព្រោះ $cos^2x + sin^2x = 1$)

ដោយ មុំ φ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង : $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

<u>សង្កេត</u> : បើគេដឹងថា φ នៅក្នុងចន្លោះ $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ នោះគេយក tg φ តែម្តង គឺ

$tg\varphi = \frac{b}{a}$ ឬក៏ $\varphi = Arctg\frac{b}{a}$

ដោយសង្ខេប :

(F-8.5.b)

a cos x + b sin x = A cos(x-φ)

ដោយ $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{A}$, $\sin\varphi = \frac{b}{A}$, $tg\varphi = \frac{b}{a}$

8.6 វិភាគអាម៉ូនិកនៃសញ្ញា (Analyse harmonique d’un signal)

ឧបមាថា ការបំបែកជាសេរីហ្វួរីយេនៃសញ្ញា e អោយជា :

e(t) = a_0 + $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t))$

– $a_0 = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} e(t)dt$, ជាចំនួនមធ្យមនៃសញ្ញាលើចន្លោះមួយដែលមានប្រវែង T

- តួដែលមានខួប T : $a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)$, ហៅថាតួសំខាន់ (terme fondamental)

- តួទាំងឡាយ : $a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$, ចំពោះ $n \geq 2$ ហៅថា អាម៉ូនិក ជួរទី n

ការបំប្លែងតាមត្រីកោណមាត្រសាស្ត្រ ដែលយើងបានឃើញនៅ § 8.5, **(F-8.5.b)** អោយ :

$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t) = A_n\cos(n\omega t - \varphi_n)$ ដោយ $A_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}$

$\text{tg}\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$ $(\varphi_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[)$

- A_n ជាទំហំនៃអាម៉ូនិកជួរទី n
- φ_n ជាហ្វា (phase) នៃអាម៉ូនិកជួរទី n
- $\frac{2\pi}{n\omega}$ ជាខួបនៃអាម៉ូនិកជួរទី n
- $n\omega$ ជាដំណើរជីបចរ (pulsation) របស់អាម៉ូនិកជួរទី n (បើ n = 1, $n\omega = \omega$ ដូច្នេះ ω ជាជីបចរ នៃ អាម៉ូនិកជួរទី មួយ)
- គេហៅថា spectre de fréquence (ស្ពិចនៃប្រេហ្វកង់) របស់សញ្ញា e , គឺខ្សែកោង នៃអនុគមន៍ពី N ទៅ R កំនត់ដោយ : $n \to A_n$

  ខ្សែកោងនោះហៅថា ឌីយាក្រាមដំបង (diagramme en bâtons)

ឧទាហរណ៍ 8-6

គេអោយសេរីហ្វួរីយេ :

e(t) = $\pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$

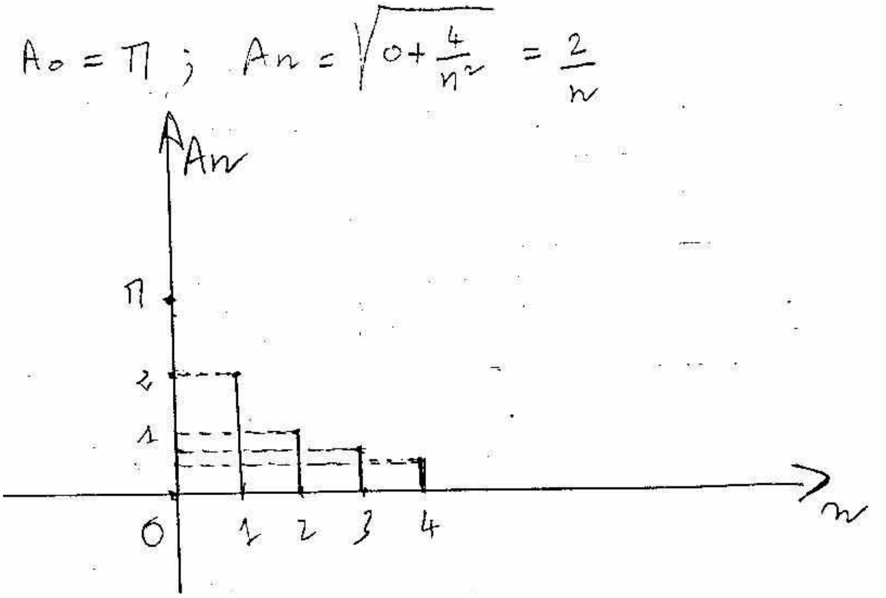
បើប្រៀបធៀបទៅ នឹងសេរីហ្វួរីយេ ជាទូទៅ:

e(t) = $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$

យើងឃើញថា :

$a_0 = \pi, \ a_n = 0, \ b_n = \frac{-2}{n}, \ \omega = 1$

ដូច្នេះ $A_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} = \sqrt{0 + (\frac{-2}{n})^2} = \sqrt{\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{n}$



ចប់សេរីហ្វូរីយេ

9- ចំណោទ ដោយមាន ចំលើយ

9-1 ចំណោទ-ទី១

<u>ប្រធាន</u>:ការបំបែកជាសេរីហ្វួរីយេនៃសញ្ញាអេលិចត្រូនិក។

t_0 ជាចំនួនពិតមួយ ហើយ គេមានសញ្ញាមួយដែលគំរូដោយ អនុគមន៍ f ខួប, មានខួប 2π, និងកំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} f(t) = E \text{ បើ } t \in [t_0, t_0+\pi[\\ f(t) = -E \text{ បើ } t \in [t_0+\pi, t_0+2\pi[\end{cases}$$

1°) ក្នុងតំរុយអរត្តូកូណាល គូរខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ f ដែលកំរិតត្រឹមតែចន្លោះ
$[t_0 - 3\pi, t_0 + 3\pi]$

2°) បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ IR ។

3°) អោយ ដោយបញ្ជាក់ហេតុផលនូវការបំបែកជាសេរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍f គ្រប់ចំនុចដែល f ជាប់

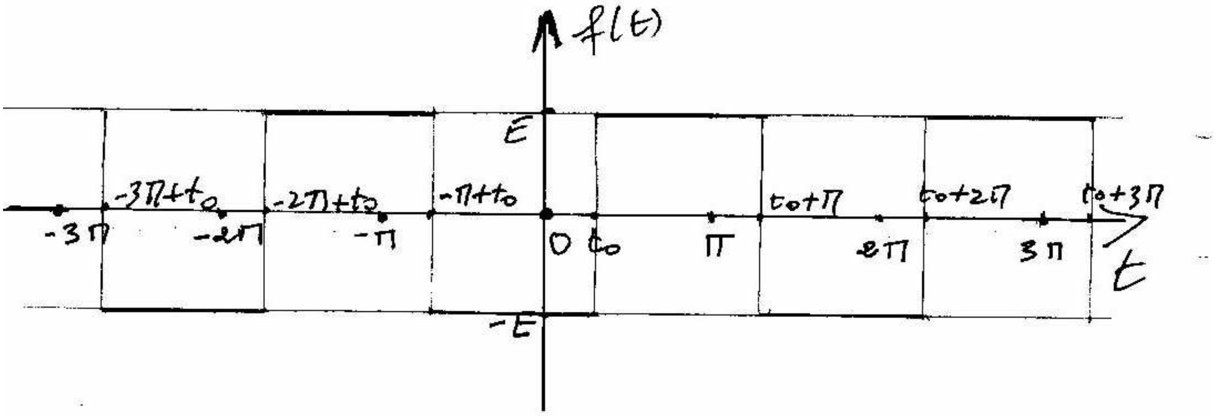
4°)

a) ចូរសង្កេតមើល ក្នុងករណីពិសេស $t_0 = 0$ និង $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ ។ តើយើងអាចដឹងមុនទេនូវលទ្ធផលនេះ

b) គូរក្រាបនៃ f ចំពោះចំនួនទាំងពីរខាងលើនៃ t_0

ចំលើយ

1°)



2°)

a). ដោយ f ជាអនុគមន៍ខួប យើងសិក្សា f លើចន្លោះប្រវែងមួយខួប $[t_0, t_0+2\pi]$ ។

នៅលើចន្លោះនេះ អនុគមន៍ f ជាប់ , មានដេរីវេជាប់ លើកលែងតែត្រង់ចំនុច $t = t_0 + \pi$ ។ ព្រោះនៅលើចន្លោះ $[t_0, t_0+\pi[$ និង $[t_0+\pi, t_0+2\pi[$, f ជាអនុគមន៍ថេរ ។

b) .

$$\lim_{\substack{t \to t_0 + \pi \\ t < t_0 + \pi}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 + \pi \\ t < t_0 + \pi}} (E) = E$$

$$\lim_{\substack{t \to t_0 + \pi \\ t > t_0 + \pi}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 + \pi \\ t > t_0 + \pi}} (-E) = -E$$

ដូច្នេះចំនួន $f(t_0+\pi-0)$ និង $f(t_0+\pi+0)$ ជាចំនួនពិតក្នុង IR ហើយស្មើនឹង E និង - E ។

ដូច្នេះ $t = t_0 + \pi$ ជាចំនុចដាច់ប្រភេទទី ១ ។

ក៏ដូចគ្នាដែរ :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 + 2\pi \\ t < t_0 + 2\pi}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 + 2\pi \\ t < t_0 + 2\pi}} (-E) = -E$$

ដូច្នេះ $f(t_0+2\pi-0)$ ជាចំនួនពិតក្នុង R និងស្មើនឹង - E ។

c) អនុគមន៍ f មានដេរីវេ លើ $]t_0,t_0+\pi[$ និងលើ $]t_0+\pi, t_0+2\pi[$ ហើយ f' ជាអនុគមន៍ថេរ ($f'(t)=0$)។លីមីតខាងឆ្វេងនិងខាងស្តាំនៃអនុគមន៍ដេរីវេត្រង់ចំនុច $t_0+\pi$ និងលិមីតខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំនៃអនុគមន៍ដេរីវេ ត្រង់ចំនុច $t_0+2\pi$ មានចំនួនក្នុង R ហើយលីមីតនោះ ស្មើនឹង 0 ។

លទ្ធផល a), b), c) ខាងលើនេះ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ <u>C1 ដោយកង់ៗលើ</u> **<u>$[t_0,t_0+2\pi]$</u>** ហើយលើសពីនេះទៅទៀត f ជាអនុគមន៍ខួបមានខួបស្មើនឹង 2π ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់

C^1 ដោយកង់ៗលើ **R** ។

3°) គណនាមេគុណហ្វូរីយេ

. គណនា a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{t_0}^{t_0+\pi} Edt + \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi}(-E)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[E\pi - E\pi\right] = 0$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

. គណនា a_n

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{t_0}^{t_0+\pi} E\cos(nt)\,dt + \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi} -E\cos(nt)dt\right]$$

$$= \frac{E}{n\pi}\left[\ [\sin(n(t_0+\pi)) - \sin(nt_0)] - [\sin(n(t_0+2\pi)) - \sin(n(t_0+\pi))]\ \right]$$

$$= \frac{E}{n\pi}\left[\ \sin(nt_0+n\pi) - \sin(nt_0) - \sin(nt_0+n2\pi) + \sin(nt_0+n\pi)\ \right]$$

ដោយ

$\sin(nt_0 + 2n\pi) = \sin(nt_0)$ និង

$\sin(nt_0 + n\pi) = (-1)^n\sin(nt_0)$, យើងបាន :

$$a_n = \frac{E}{n\pi}\left[(-1)^n\sin(nt_0) - \sin(nt_0) - \sin(nt_0) + (-1)^n\sin(nt_0)\right]$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2E}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\sin(nt_0)}$$

- បើ $n = 2p$, $(-1)^n = (-1)^{2p} = 1$, ដូច្នេះ

$$\boxed{a_{2p} = 0}$$

- បើ $n = 2p+1$, $(-1)^n = (-1)^{2p+1} = -1$, ដូច្នេះ

$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{-4E}{(2p+1)\pi}\sin[(2p+1)t_0]}$$

. គណនា b_n

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{t_0}^{t_0+\pi} E\sin(nt)\,dt + \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi} -E\sin(nt)dt\right]$$

ដូចកាលដែលយើងគណនា a_n , បន្ទាប់ពីគណនាយើងបាន :

- បើ n = 2p ,

$b_{2p} = 0$

- បើ n = 2p + 1 ,

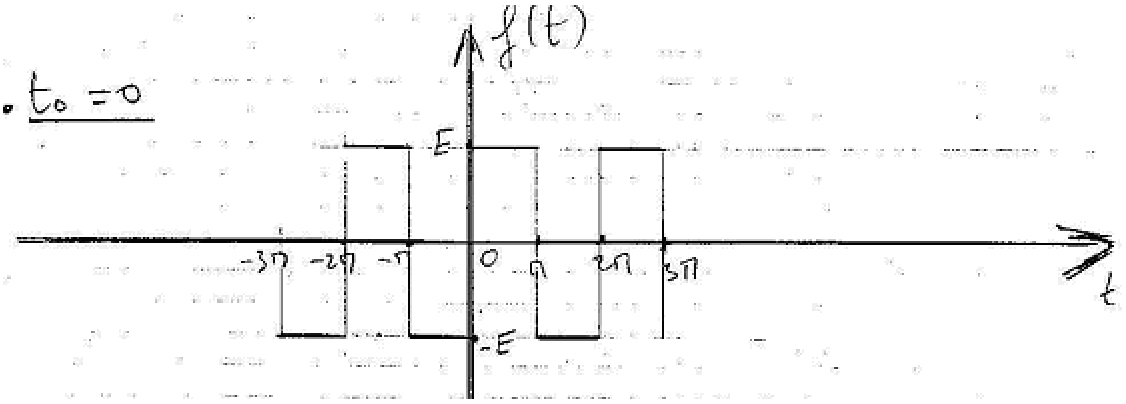
$$b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi}\cos[(2p+1)t_0]$$

ដោយ f នៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R ,ទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេអនុញ្ញាតអោយថា នៅត្រង់ចំនុច t ដែល f ជាប់, សេរីហ្វួរីយេនៃ f មានលីមីតទៅរក f ។ ដូច្នេះចំពោះចំនុចទាំងនោះ យើងបាន :

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[-\frac{\sin[(2p+1)t_0]}{2p+1}\cos(2p+1)\,t + \frac{\cos[(2p+1)t_0]}{2p+1}\sin(2p+1)\,t\right]$$

4°)

<u>ក្រាប-9-1-4-a</u> គូរតាមនិយមន័យ



យើងសង្កេតឃើញថាចំពោះចំនួន t_0, អនុគមន៍ f ពុំមែនជាអនុគមន៍សេស ព្រោះថា : (មើលនិយមន័យ អនុគមន៍ f)

$f(0) = E \neq 0$
$f(-\pi) = -E$

$f(\pi) = -E$ => $f(-\pi) \neq -f(\pi)$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2\pi) = E \\ f(2\pi) = E \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2\pi) \neq -f(2\pi)$$

តែយើងអាចប្តូរតម្លៃខ្លះ ដែលអនុគមន៍ f យកលើចន្លោះប្រវែងមួយខួប ដើម្បីអោយ f ទៅជាអនុគមន៍សេស

<u>ឧទាហរណ៍ដូចជា</u> :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = E \text{ បើ } t \in [0, \pi[\\ f(\pi) = 0 \\ f(t) = -E \text{ បើ } t \in]\pi, 2\pi[\\ f(2\pi) = 0 \end{cases}$$

<u>សង្កេត</u> ដើម្បី f ទៅជាអនុគមន៍សេស យ៉ាងហោចណាស់ត្រូវ $f(0) = 0$ នេះចំពោះអនុគមន៍ធម្មតាៗ តែចំពោះអនុគមន៍ខួប f ត្រូវដូរត្រង់ $\propto$ ដែល $f(\propto)$ ដូរ ពីចំនួន (+E) មក ជាចំនួន (-E), ដោយយក $f(\propto) = 0$ ។

ធ្វើរបៀបនេះ, ដោយ f ទៅជាអនុគមន៍សេស នោះសេរីហ្វូរីយេនៃ f ជាសេរីដែលមានតែ sinus ហើយចំពោះគ្រប់ $n \in N$, $a_n = 0$ ហើយ

$b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi}\cos[(2p+1)t_0] = \frac{4E}{(2p+1)\pi}$ ព្រោះ $t_0 = 0$ ដូច្នេះ $\cos[(2p+1)t_0] = 1$

ហើយនៅគ្រប់ចំនុចដែល f ជាប់, យើងបាន

$$f(t) = f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(2p+1)t}{2p+1}$$

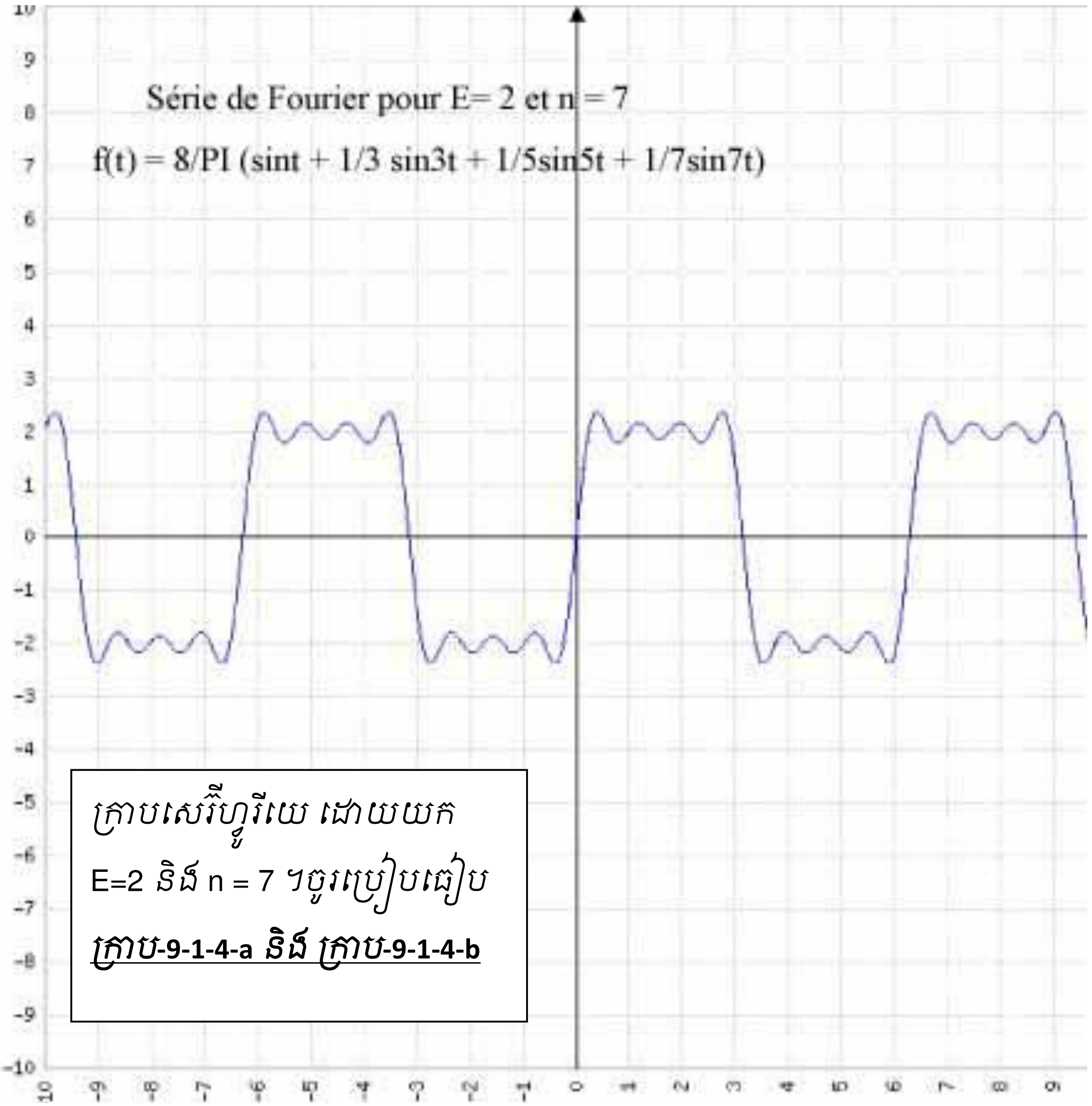
រឺ (បើសរសេរអោយរាយ)

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \ldots\ldots\right)$$

ចំពោះ $E = 2$, ហើយ $n = 7$, យើងបាន :

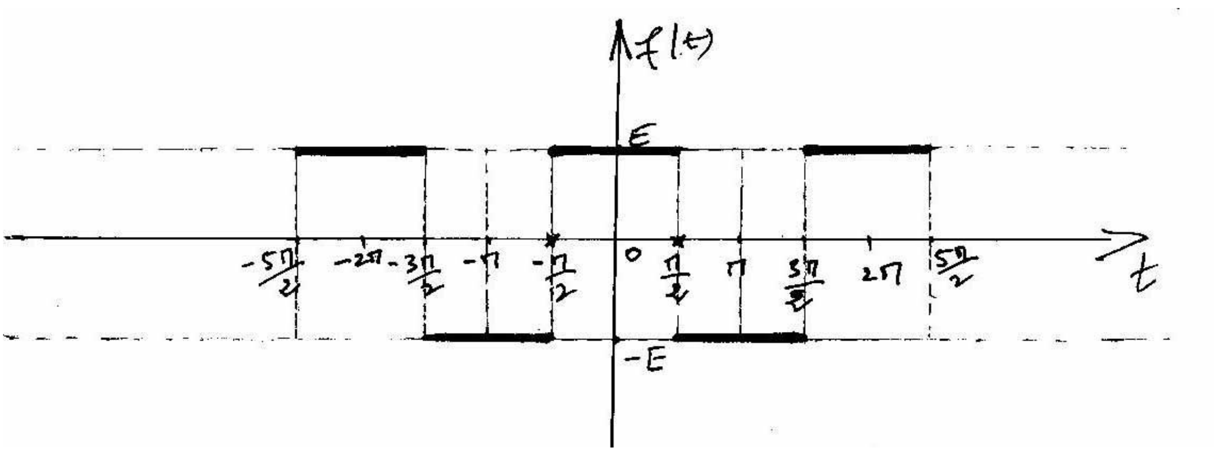
$f(t) = \frac{8}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7}\right)$ ហើយខ្សែកោងមានរាងដូចខាងក្រោមនេះ

<u>ក្រាប-9-1-4-b</u> គូរតាមរូបមន្តបានមកពីការបំបែកអនុគមន៍ f ជាសេរីហ្វូរីយេ



. $t_0 = -\frac{\pi}{2}$

<u>ក្រាប-9-1-4-c</u>



ចំពោះ $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ ដោយសង្កេត ក្រាប-9-1-4-c យើងអាចប្តូរអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុចខ្លះ ដើម្បីអោយ f ទៅជាអនុគមន៍គូ (ព្រោះថាចំពោះអនុគមន៍ f គូឬសេសនោះសេរីហ្វួរីយេ អាចបង្រួញបាន)អោយតែចំនួននៃអនុគមន៍f ត្រង់ចំនុចដែលយើងប្តូរតំលៃនោះជា ចំនួនពិត នៅលើចន្លោះប្រវែងមួយខួប ។

ឧបមាដូចជានៅលើចន្លោះប្រវែងមួយខួប [-π,+π] (មើល<u>ក្រាប**-9-1-4-c**</u>) យើងកំនត់ អនុគមន៍ f ដោយ :

$$\begin{cases} f(t) = -E & \text{បើ } t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\\ f(-\frac{\pi}{2}) = 0 & \\ f(t) = E & \text{បើ } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ f(\frac{\pi}{2}) = 0 & \\ f(t) = -E & \text{បើ } t \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

យើងឃើញមានតែត្រង់ ចំនុច $-\frac{\pi}{2}$ និង $\frac{\pi}{2}$ នោះទេដែលយើងប្តូរតំលៃនៃអនុគមន៍ f ដោយយកចំនួនពិតសូន្យ ($f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$), ដូច្នេះក្នុងការគណនា a_0, a_n, b_n អាំងតេក្រាលអត់មានប្តូរតំលៃទេ ។ នៅក្នុងករណីនេះ (គឺថា f អនុគមន៍គូ) យើងបាន $b_n = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, ហើយសេរីហ្វួរីយេ នៃអនុគមន៍ f គឺជា សេរីដោយមានតែ**cosinus** ។ ដោយ

$$a_{2p+1} = \frac{-4E}{(2p+1)\pi} \sin[(2p+1)t_0]$$

នោះយើងបានចំពោះ $t_0 = -\frac{\pi}{2}$

$a_{2p+1} = \frac{-4E}{(2p+1)\pi} \sin[(2p+1)(-\frac{\pi}{2})]$ (*ដោយ* sin (-x) = -sin (x)) *ដូច្នេះ*

$\sin[(2p+1)(-\frac{\pi}{2})] = \sin[-(2p+1)(\frac{\pi}{2})] = -\sin[(2p+1)\frac{\pi}{2}]$

$a_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi} \sin[(2p+1)(\frac{\pi}{2})] = \frac{4E}{(2p+1)\pi} (-1)^p$

$$a_{2p+1} = \frac{4E}{\pi} \frac{(-1)^p}{(2p+1)}$$

នៅគ្រប់ចំនុច t *ដែល* f *ជាប់* , *យើងបាន*

$$f(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\cos(2p+1)t}{2p+1}$$

ឬ

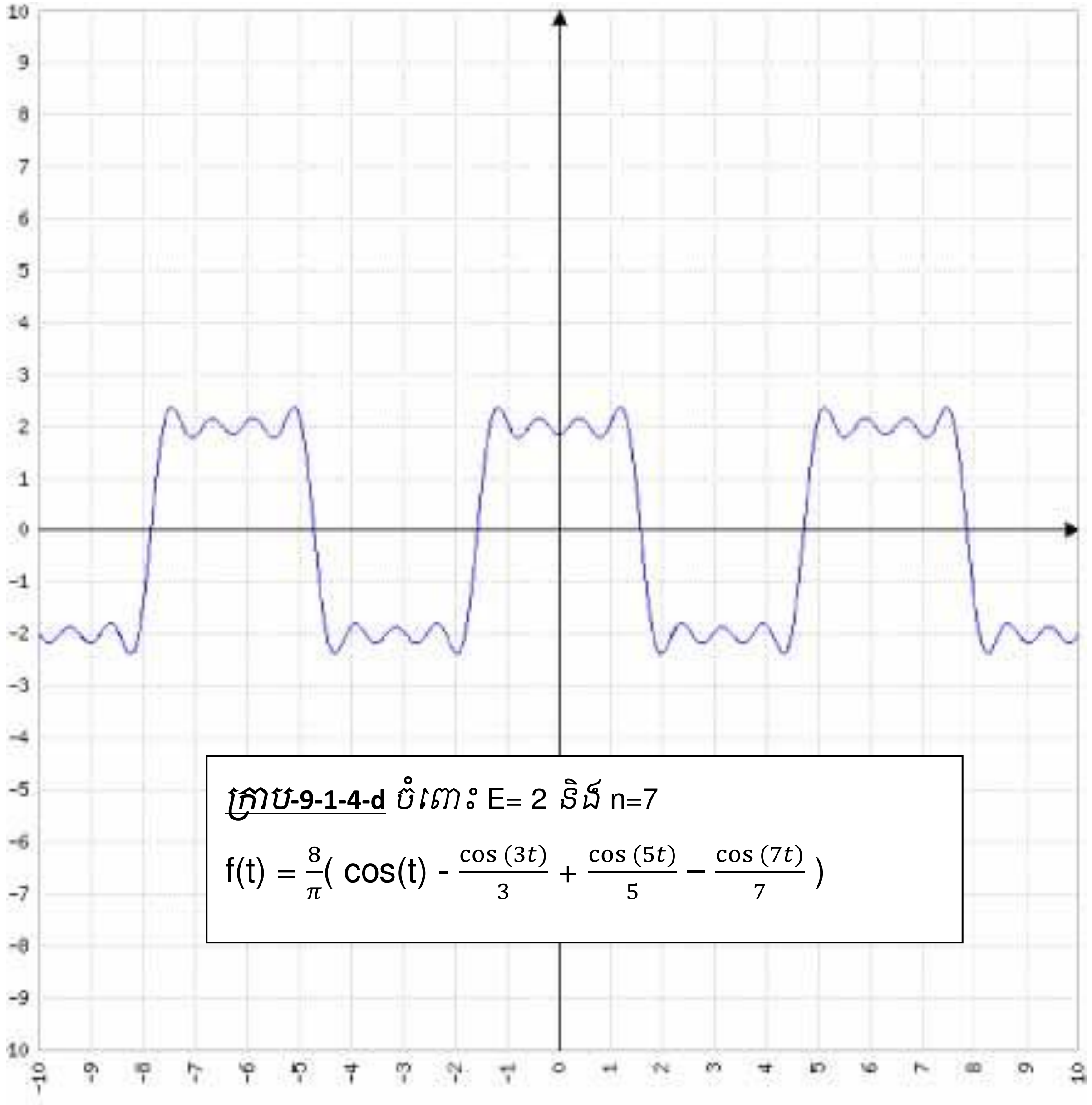
$$f(t) = \frac{4E}{\pi} (\cos t - \frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(5t)}{5} - \frac{\cos(7t)}{7} + \ldots\ldots)$$

ដោយយក E= 2 *និង* n=7 *សេរីហ្វួរីយេ នៃអនុគមន៍* f *គឺ*

$f(t) = \frac{8}{\pi}(\cos(t) - \frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(5t)}{5} - \frac{\cos(7t)}{7})$ *ហើយ ក្រាបមានទម្រង់ ដូចខាងក្រោមនេះ* (*ក្រាប*-9-1-4-d)។

<u>សង្កេត</u>

***ក្រាប*-9-1-4-c** *ជាក្រាប អនុគមន៍* f *គូរ ទៅតាម<u>និយមន័យ</u> របស់អនុគមន៍* f *ចំណែក* ***ក្រាប*-9-1-4-d** *វិញ គឺ គូរដោយប្រើ<u>រូបមន្ត</u> បានមកពីសេរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍* f ។ *បើកាលណា គេយក* n *កាន់តែធំ នោះ* ***ក្រាប*-9-1-4-d** *នឹងមានទម្រង់ កាន់តែជិតដូច* ***ក្រាប*-9-1-4-c**, $\forall t \in \boldsymbol{R}$ ។



<u>**ក្រាប-9-1-4-d**</u> ចំពោះ E= 2 និង n=7

$$f(t) = \frac{8}{\pi}\left(\cos(t) - \frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(5t)}{5} - \frac{\cos(7t)}{7} \right)$$

យើងបានឃើញរួចមកហើយ (មើល §8 . 6) ថាស្ពិច([3])នៃប្រេហ្វកង់ (spectre de fréquence) នៃអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ពី N ទៅ R កំនត់ដោយ :

$$n \dashrightarrow A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

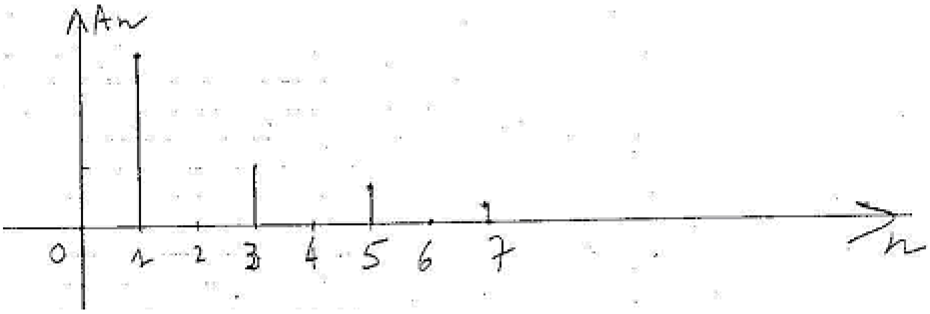
---

[3] ជាន័យធម្មតា តាមពាក្យសាមញ្ញ គឺ កាំរស្មីចម្រុះពណ៌ព្រោងព្រាតបែកចេញពីពន្លឺ ដូចជានៅពេលដែលពន្លឺនោះចាំងទៅលើត្បូងថ្នែជាដើម។

នៅក្នុងករណីទាំងពីរ $t_0 = 0$ និង $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ យើងបាន

$$\begin{cases} A_{2p} = 0 \quad (p \in N) \text{ និង} \\ A_{2p+1} = \frac{4E}{\pi} \cdot \frac{1}{2p+1} \end{cases}$$

(គ្រប់ អារមូនីក នៅជួរគត់ សុទ្ធមានតម្លៃសូន្យ)



<u>**សង្កេត**</u> :

យើងឃើញស្ពិចខាងលើនេះ <u>នៅដដែល</u> គ្រប់តំលៃ t_0 ។ ព្រោះថាជួរ t_0 គឺជួរ <u>គល់នៃពេលវេលា</u> គឺថាយើងរំកិលសញ្ញា ដោយចំនួនមួយ τ

? ហើយមេគុណហ្វូរីយេក៏ផ្លាស់ពី c_n ទៅ c'_n

ដោយ $c'_n = e^{-in\tau} c_n$ (មើលចំណោទទី ២) បន្ទាប់នេះ, ហើយ

$|c'_n| = |e^{-in\tau}||c_n|$, ដោយ $|e^{-in\tau}| = 1$, នោះ

$| c'_n | = | c_n |$ ។

គឺរូបខាងលើនេះហើយ ដែលយើងឃើញនៅលើអេក្រង់ (écran) នៃអាណាលីស៊ីស្ពេច (analyseur de spectre) ។

9-2 ចំណោទ-ទី២

ប្រធាន : មេគុណហ្វូរីយេជាកុំផ្លិច

1°) គេអោយអនុគមន៍ខួប f, មានខួប 2π , ផ្ទៀងផាត់នឹងលក្ខ័ណ្ឌនៃទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ ។ មេគុណហ្វូរីយេ ជាកុំផ្លិចនៃ f សរសេរជា $c_n(f)$ ។ ការរំកិល f ដោយចំនួន τ អោយអនុគមន៍ g កំនត់លើ R ដោយ g(t) = f(t-τ)

ចូរបង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប, មានខួប 2π ហើយលើសពីនេះទៅទៀត គេបាន :

$$c_n(g) = e^{-in\tau} c_n(f)$$

2°) យើងពិនិត្យសញ្ញាដែលមានអនុគមន៍ខួប f ជាគំរូ ។ f មានខួប 2π ហើយកំនត់ដោយ

$$\begin{cases} f(t) = \sin(t) & \text{បើ } t \in [0, \pi] \\ f(t) = 0 & \text{បើ } t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

a) ក្នុងតំរុយអរតូកូណាល គូរខ្សែកោងនៃ f លើចន្លោះ [-3π, 3π]

b) គណនាមេគុណហ្វូរីយេជាកុំផ្លិច នៃ f ហើយទាញយក មេគុណហ្វូរីយេជាចំនួនពិត

c) បង្ហាញថាគ្រប់ចំនុចនៃ R សេរីហ្វូរីយេ f ស្មើនឹង f (t) .

3°) ដោយទាញយកពីសំនួរពីមុន, រកការបំបែកជាសេរីហ្វូរីយេនៃអនុគមន៍ខួប, មានខួប 2π កំនត់ដោយ :

$$g(t) = f(t-\pi)$$

4°) គេអោយគ្រប់ចំនួន t ក្នុង R

$$\varphi(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad \text{និង}$$

$$\Psi(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

a) ដោយប្រើលទ្ធផលនៃសំនួរទីពីរ, ចូរទាញយកការបំបែកជាសេរីហ្វូរីយេនៃអនុគមន៍ φ និង ψ

b) អោយ កន្សោម (expression) នៃ f និង g ដោយប្រើអនុគមន៍ φ និង ψ ជាជំនួយ

c) បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួន t ក្នុង R φ(t) = |ψ (t)|

ទាញយកការបំបែកជាសេរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $t \rightarrow |\sin(t)|$ ។

ចំលើយ :

1°) គ្រប់ចំនួន $n \in \mathbb{Z}$, យើងដឹងហើយថា (រូបមន្ត ***(F - 8.3 -c)*** ទំព័រ ៤១)

$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\propto}^{\propto+2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ (ព្រោះ $T = 2\pi$ និង $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$) **(1)**

ដើម្បីបង្ហាញថា g មានខួប 2π, ត្រូវបង្ហាញថា : g(t) = g(t+2π)

តាមនិយមន័យ

$g(t) = f(t-\tau)$ **(2)**

ដូច្នេះ

$g(t+2\pi) = f[(t+2\pi) - \tau]$

$= f(t+2\pi - \tau) = f[(t-\tau)+2\pi]$

$= f(t-\tau)$ ព្រោះ f មានខួប (2π)

$= g(t)$

រួមសេចក្ដីទៅ :

$g(t+2\pi) = g(t)$ ដូច្នេះ g មានខួប 2π

បង្ហាញថា : $c_n(g) = e^{-in\tau}c_n(f)$

ដោយ g មានខួប 2π, នោះ (ដោយ (1))

$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\propto}^{\propto+2\pi} g(t)e^{-int}dt$, រឺ

$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\propto}^{\propto+2\pi} f(t-\tau)e^{-int}dt$ (ដោយ (2))

ដោយប្រើអថេរជំនួស u = t-τ យើងបាន

$u = t - \tau \quad \Rightarrow t = u + \tau$

$du = dt$

បើ $t = \alpha \quad \Rightarrow u = \alpha - \tau$

បើ $t = \alpha + 2\pi \quad \Rightarrow u = \alpha + 2\pi - \tau$

ដូច្នេះ

$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\propto-\tau}^{\propto+2\pi-\tau} f(u)e^{-in(u+\tau)}du$

$= \frac{1}{2\pi} e^{-in\tau} \int_{\alpha-\tau}^{\alpha-\tau+2\pi} f(u)e^{-inu}\mathrm{du}$

ចន្លោះ $[(\alpha - \tau),(\alpha - \tau)+ 2\pi]$ មានប្រវែង 2π ស្មើនឹងមួយខួបនៃអនុគមន៍ $f(u)e^{-inu}$

ដូច្នេះ

$$\int_{\alpha-\tau}^{\alpha-\tau+2\pi} f(u)e^{-inu}\mathrm{du} = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(u)e^{-inu}\mathrm{du}, \quad \text{ហើយ}$$

$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} e^{-in\tau} \int_{\alpha-\tau}^{\alpha-\tau+2\pi} f(u)e^{-inu}\mathrm{du}$

$= e^{-in\tau} [\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(u)e^{-inu}\mathrm{du}]$

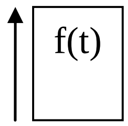
$= e^{-in\tau} c_n(f)$ (ដោយ(1) និង អថេររបស់អាំងតេក្រាល ជាអថេរ គ (មិនចេញស្ដី), ពោលគឺ : $\int_a^b \mathrm{h(t)dt} = \int_a^b h(u)du = \int_a^b h(s)ds$

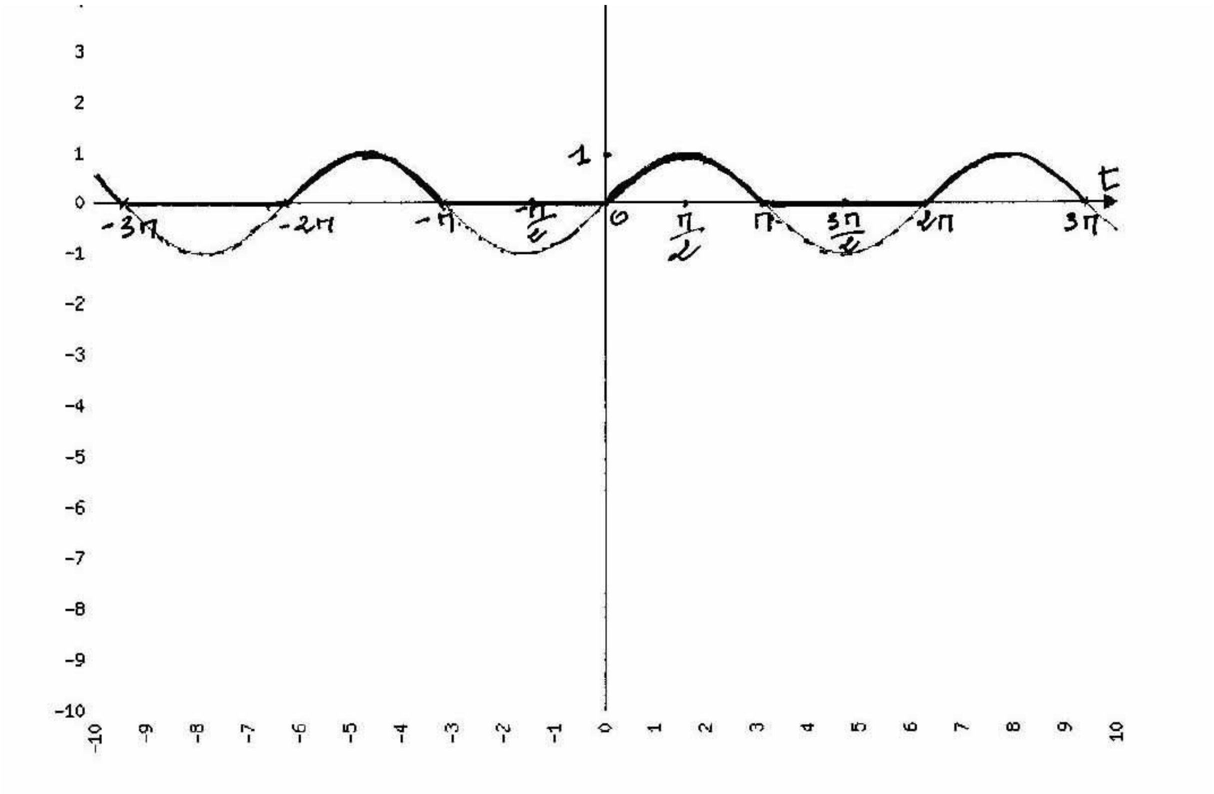
ដូច្នេះ យើងបាន:

$c_n(g) = e^{-in\tau} c_n(f)$

2°)

a/





b) រកមេគុណជាចំនួនកុំផ្លិច

$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)e^{-int}\,dt$ (ព្រោះ f(t) = 0 លើចន្លោះ $[\pi, 2\pi[$)

ដោយ $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ នោះ

$\sin(t)e^{-int} = \frac{1}{2i}\left(e^{i(1-n)t} - e^{-i(1+n)t}\right)$, ដូច្នេះ

$c_n = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2i}\int_0^{\pi}\left(e^{i(1-n)t} - e^{-i(1+n)t}\right)dt$ **(3)**

❖ ចំពោះ $n \neq 1$ និង $n \neq -1$, យើងបាន

$c_n = \frac{1}{4\pi i}\left[\ \left|\ \frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} + \frac{e^{-i(1+n)t}}{i(1+n)t}\ \right|_0^{\pi}\ \right]$

ដោយ $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$, នោះ

$c_n = \frac{1}{4\pi i}\left[\frac{1}{i(1-n)}(\cos(1-n)\pi - 1) + \frac{1}{i(1+n)}(\cos((1+n)\pi) - 1)\right]$

$$c_n = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{(-1)^{1-n}-1}{1-n} + \frac{(-1)^{1+n}-1}{1+n}\right] \quad (4)$$

ព្រោះថា :

$e^{i(1-n)\pi} = \cos(1-n)\pi + i\sin(1-n)\pi = \cos(1-n)\pi$

បើ n = 0 , 1- n = 1 , cos (1-n)π = cos (π) = -1

បើ n = 1 , 1- n = 0 , cos (1-n)π = cos (0) = 1

បើ n = 2 , 1- n = -1 , cos (1-n)π = cos ($-\pi$) = -1

បើ n = 3 , 1- n = -2 , cos (1-n)π = cos (-2π) = 1

} cos (1-n) π = $(-1)^{1-n}$

ដោយ n ϵ *Z* ដូច្នេះ *p* $\in$ *Z*

- បើ n = 2 p (3) អោយ

$$c_{2p} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{(-1)^{1-2p}-1}{1-2p} + \frac{(-1)^{1+2p}-1}{1+2p}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-2}{1-2p} + \frac{-2}{1+2p}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(1-4p^2)}$$

$$\boxed{c_{2p} = \frac{1}{\pi(1-4p^2)}} \qquad \textbf{(5)}$$

- បើ n = 2p + 1 , (4) អោយ

$$c_{2p+1} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{(-1)^{-2p}-1}{-2p} + \frac{(-1)^{2+2p}-1}{2+2p}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1-1}{-2p} + \frac{1-1}{2+2p}\right] \quad (\text{ព្រោះ } (-1)^{-2p} = \frac{1}{(-1)^{2p}} = \frac{1}{1^p} = 1)$$

$$= 0$$

$$\boxed{c_{2p+1} = 0\ ;\ p \neq 0} \qquad \textbf{(6)}$$

❖ ចំពោះ n = - 1 និង n = 1 យើងគណនាដោយឡែក

- បើ n = - 1 , **(3)** អោយ

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2i} \int_0^{\pi} (e^{i2t} - 1)\, dt$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left[\frac{1}{2i} \left| e^{i2t} \right|_0^{\pi} - \left| t \right|_0^{\pi} \right]$$

$$= -\frac{1}{4i}$$

$$\boxed{c_{-1} = -\frac{1}{4i}}$$

- បើ n = 1 , (3) អោយ

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2i} \int_0^{\pi} (1 - e^{-i2t})\, dt$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left[\left| t \right|_0^{\pi} + \frac{1}{2i} \left| e^{i2t} \right|_0^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{4i}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{4i}}$$

- បើ n = 0 , (4) អោយ $\boxed{c_0 = \frac{1}{\pi}}$

<u>*ការទាញយក មេគុណហ្វូរីយេ ជាចំនួនពិត*</u>

យើងដឹងហើយថា (មើល រូបមន្ត **F-8.3.c ទំព័រ ៤១**) *មេគុណហ្វូរីយេ ជាចំនួនកំផ្លិច*

និងជាចំនួនពិត មានសម្ពន្ធ គ្នា ដោយ រូបមន្ត $c_n = \dfrac{a_n - i\, b_n}{2}$ $n \in N^*$ *និង* $c_0 = a_0$

ម៉្យាងទៀតដើម្បីអោយចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែ ផ្នែកចំនួនពិតទាំងសងខាងស្មើគ្នា និងផ្នែកចំនួននិមិត្ត ទាំងសងខាងស្មើគ្នា។

ដោយសន្មត $b_0 = 0$

$\boxed{b_0 = 0}$

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}$$

$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}}$

$\boxed{a_1 = 0 \;;\; b_1 = \frac{1}{2}}$

$c_1 = \frac{a_1 - i\, b_1}{2} = \frac{1}{4i} = \frac{i}{4i^2} = -\frac{1}{4}i \Rightarrow a_1 = 0$ និង $\frac{b_1}{2} = \frac{1}{4}$

(5) => $c_{2p} = \frac{1}{\pi(1-4p^2)}$ =>

$$a_{2p} = \frac{2}{\pi(1-4p^2)} \text{ និង } b_{2p} = 0$$

(6) => $c_{2p+1} = 0$; $p \neq 0$ =>

$$a_{2p+1} = 0 \;;\quad b_{2p+1} = 0 \qquad p \geq 1$$

c) ដើម្បីនឹងសន្និដ្ឋានថាសេរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ f មានលីមីត f(t) យើងត្រូវបង្ហាញថា អនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងលក្ខ័ណ្ឌទាំងអស់នៃទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ លពីមុនដំបូងយើងបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍នៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើចន្លោះ [0, 2π], បន្ទាប់មកយើងបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R ។

តាមនិយមន័យ :

$$\begin{cases} f(t) = \sin(t) \text{ បើ } t \in [0, \pi] \\ f(t) = 0 \text{ បើ } t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

យើងឃើញថា f ជាអនុគមន៍កំនត់, ជាប់និងមានដេរីវេជាប់លើចន្លោះ [0, 2π], ក្រៅតែត្រង់ ចំនុច t = π និង t = 2π

ព្រោះថា :

- លើចន្លោះ [0, π] អនុគមន៍ f : t → sin (t) ជាអនុគមន៍កំនត់, ជាប់មានដេរីវេជា អនុគមន៍ជាប់ ។
- លើចន្លោះ] π , 2π [អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ថេរ ។
- ឥឡូវនេះយើងរកលីមីតនៃអនុគមន៍ f និងអនុគមន៍ដេរីវេ f ' នៅត្រង់ចំនុច t = π និង t = 2π

α) អនុគមន៍ f ជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ t = π ,

ដូច្នេះ f(π) = sin (π) = 0 } => f(π) = f(π – 0) = 0

$f(\pi - 0) = \sin(\pi - 0) = 0$ ដូច្នេះ f

ម៉្យាងទៀត ជាប់ ត្រង់ $t = \pi$

lim f(t) = Lim (0) = 0, ដូច្នេះ $f(\pi + 0) = 0$

t--> π t--> π

t > π t > π

β)

lim f(t) = Lim (0) = 0,

t-->2 π t--> 2π

t < 2π t < 2 π

ដូច្នេះ $f(2\pi - 0) = 0$ ជាចំនួនពិតក្នុង R ហើយស្មើនឹង 0 ។

γ) ចំពោះអនុគមន៍ដេរីវេ f'

lim f'(t) = Lim cos(t) = - 1

t--> π t--> π

t < π t < π

lim f'(t) = Lim (0) = 0

t--> π t--> π

t > π t > π

ដូច្នេះ $f'(\pi - 0)$ និង $f'(\pi + 0)$ ជាចំនួនពិតក្នុង R ហើយស្មើជាលំដាប់

នឹង -1 និង 0 ។

lim f'(t) = Lim (0) = 0

t--> 2π t-->2π

t < 2π t < 2π

ដូច្នេះ $f'(2\pi - 0)$ មាននៅក្នុង R ហើយស្មើនឹង 0 ។

លទ្ធផលទាំងអស់នេះបង្ហាញអោយឃើញថា f ជាអនុគមន៍ក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗ ។ ដោយ f ជាអនុគមន៍ខួបដែរនោះ ដោយមានខួបស្មើនឹង 2π នោះ f ក៏ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 លើ IR ដែរ ។ ដូច្នេះតាមទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ នៅគ្រប់ចំនុចដែល f ជាប់នោះ សេរីហ្វូរីយេនៃ f មានលីមីតស្មើនឹង f (t) ។

ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ IR ទាំងមូល, នោះគ្រប់ចំនុច t ក្នុង IR យើងបាន :

(ការបំបែកសេរីហ្វូរីយេ ជាចំនួនកុំផ្លិច)

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4i}e^{it} - \frac{1}{4i}e^{-it} + \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2pt}}{1-4p^2} \quad / \quad p \neq (-1, 0, 1)$$

ព្រោះ

c_{2p+1} = 0

និង (ការបំបែកសេរីហ្វួរីយេ ជាចំនួនពិត) :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2} \quad (7)$$

ព្រោះ f(t) = $a_0 + b_1\sin t + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}\cos(2pt)$ ហើយ $a_{2p+1} = b_{2p} = b_{2p+1} = 0$

3°) <u>រកសេរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ g កំនត់ដោយ g(t) = f(t-π)</u>

ដោយប្រលទ្ធផលពីមុន តាមសំនួរលេខ 1°) យើងដឹងថា

$c_n(g) = e^{-in\pi}.c_n(f) = (-1)^n c_n(f)$

បើយើងតាង $a_n(g)$ និង $b_n(g)$ ជាមេគុណហ្វួរីយេជាចំនួនពិតនៃអនុគមន៍ g

នោះយើងបាន ដោយ **(7)** :

$a_0(g) = ((-1)^0 a_0(f) \Rightarrow a_0(g) = a_0(f) = \frac{1}{\pi}$ (ចំពោះ n = 0, មេគុណ f និង g ស្មើគ្នា)

$b_1(g) = ((-1)^1 b_1(f) \Rightarrow b_1(g) = -b_1(f) = -\frac{1}{2}$ (ចំពោះ n = 1, មេគុណ f និង g ផ្ទុយគ្នា)

$a_{2p+1}(f) = b_{2p}(f) = b_{2p+1}(f) = 0 \Rightarrow a_{2p+1}(g) = b_{2p}(g) = b_{2p+1}(g) = 0$

$a_{2p}(g) = (-1)^{(2p)} a_{2p}(f) \Rightarrow a_{2p}(g) = a_{2p}(f) = \frac{2}{\pi}$

ដោយអនុគមន៍ g ជាអនុគមន៍រំកិលនៃអនុគមន៍ f នោះលក្ខ័ណ្ឌទាំងអស់នៃទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ ចំពោះអនុគមន៍ g ដែរ, ហើយនៅគ្រប់ចំនុច t ក្នុង IR , យើងបាន :

$$g(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2} \quad (8)$$

<u>សង្កេត</u>

<u>យើងចង់ដឹងថាតើក្រាបនៃ **(7)** និង **(8)** ខុសគ្នា យ៉ាងដូចម្តេច?ដោយយក p = 4</u>

(7) => $f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$

$f(-t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(-t) + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(-2pt)}{1-4p^2}$

ដោយ sin(-t) = - sin(t), cos(-t) = cos(t), នោះយើងបាន

$f(-t) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$, គឺថា f(- t) = g(t)

$g(t) = f(-t)$ **(9)**

(ដូច្នេះកាលណា យើងដឹង ចំនួន f(t) យើងដឹងចំនួន g(-t))

<u>យើងចង់ដឹងថាតើក្រាបនៃ **(7)** និង **(8)** ខុសគ្នា យ៉ាងដូចម្ដេច?(ដោយយក p = 4)</u>

តារាំងតម្លៃ f(t)

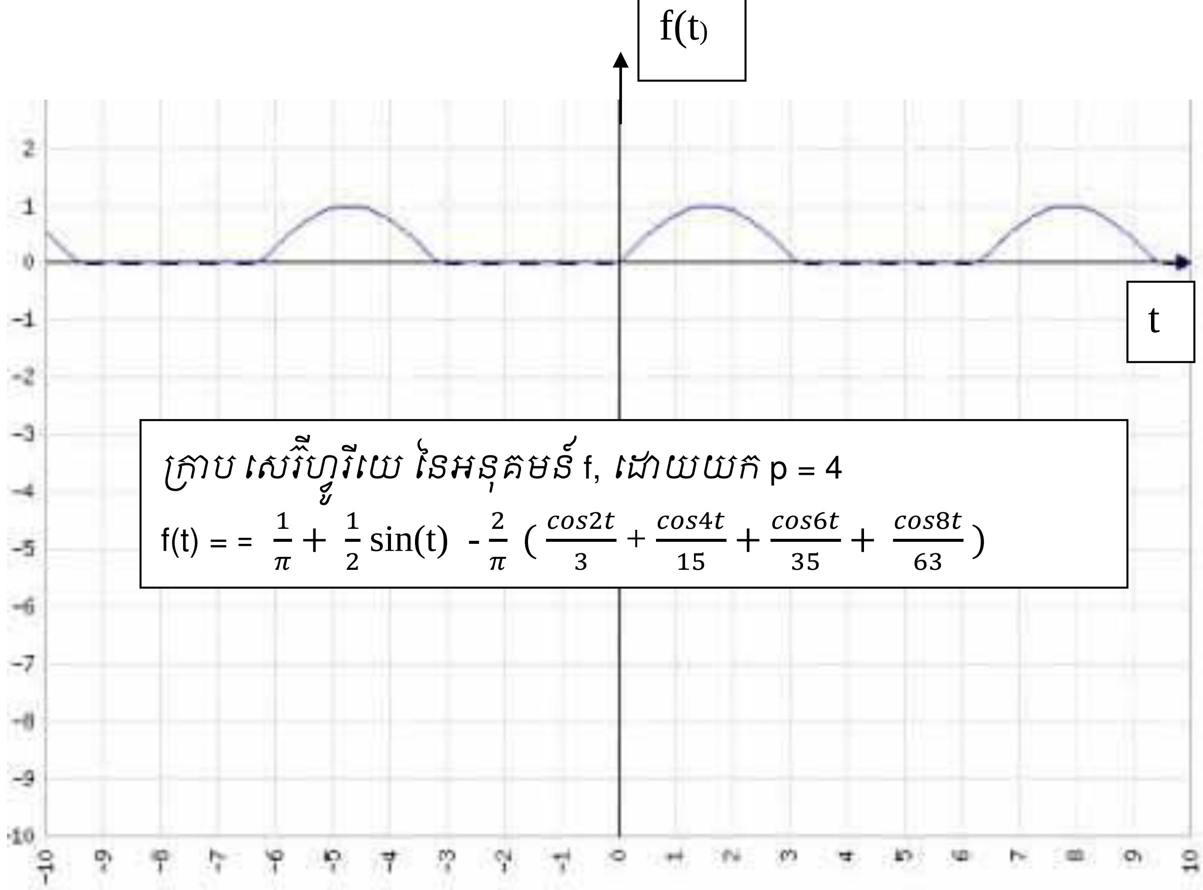
F1	t	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
	f(t)	0,550	0,002	-0,001	0,000	0,270	0,962	0,752	-0,008	0,003	-0,002

F2	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	f(t)	0,036	0,839	0,912	0,133	-0,005	0,003	-0,010	0,657	0,989	0,414	0,006

តារាំងតម្លៃ **g(t)**

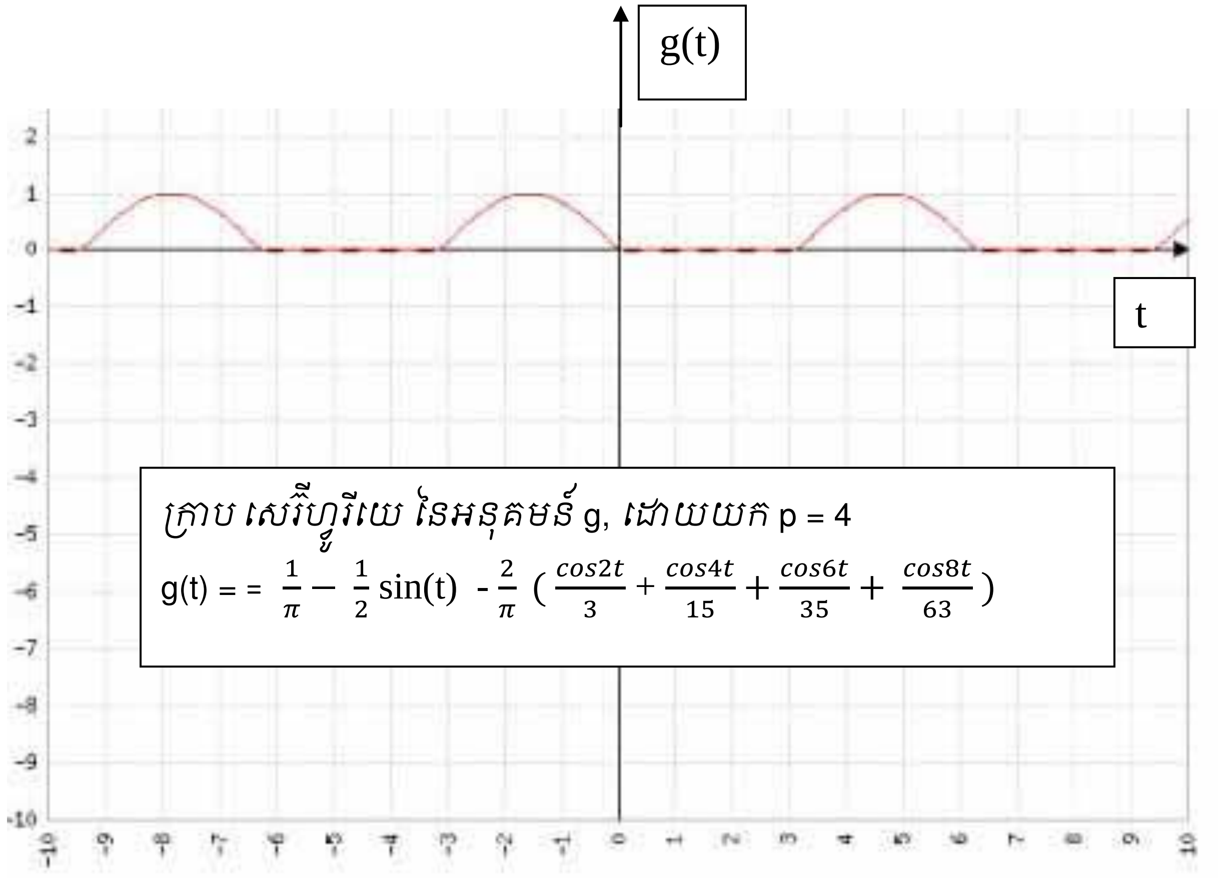
G1	t	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
	g(t)	0,006	0,414	0,989	0,657	-0,010	0,003	-0,005	0,133	0,912	0,839

G2	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	g(t)	0,036	-0,002	0,003	-0,008	0,752	0,962	0,270	0,000	-0,001	0,002	0,550



ក្រាប សេរីហ្វូរីយេ នៃអនុគមន៍ f, ដោយយក p = 4

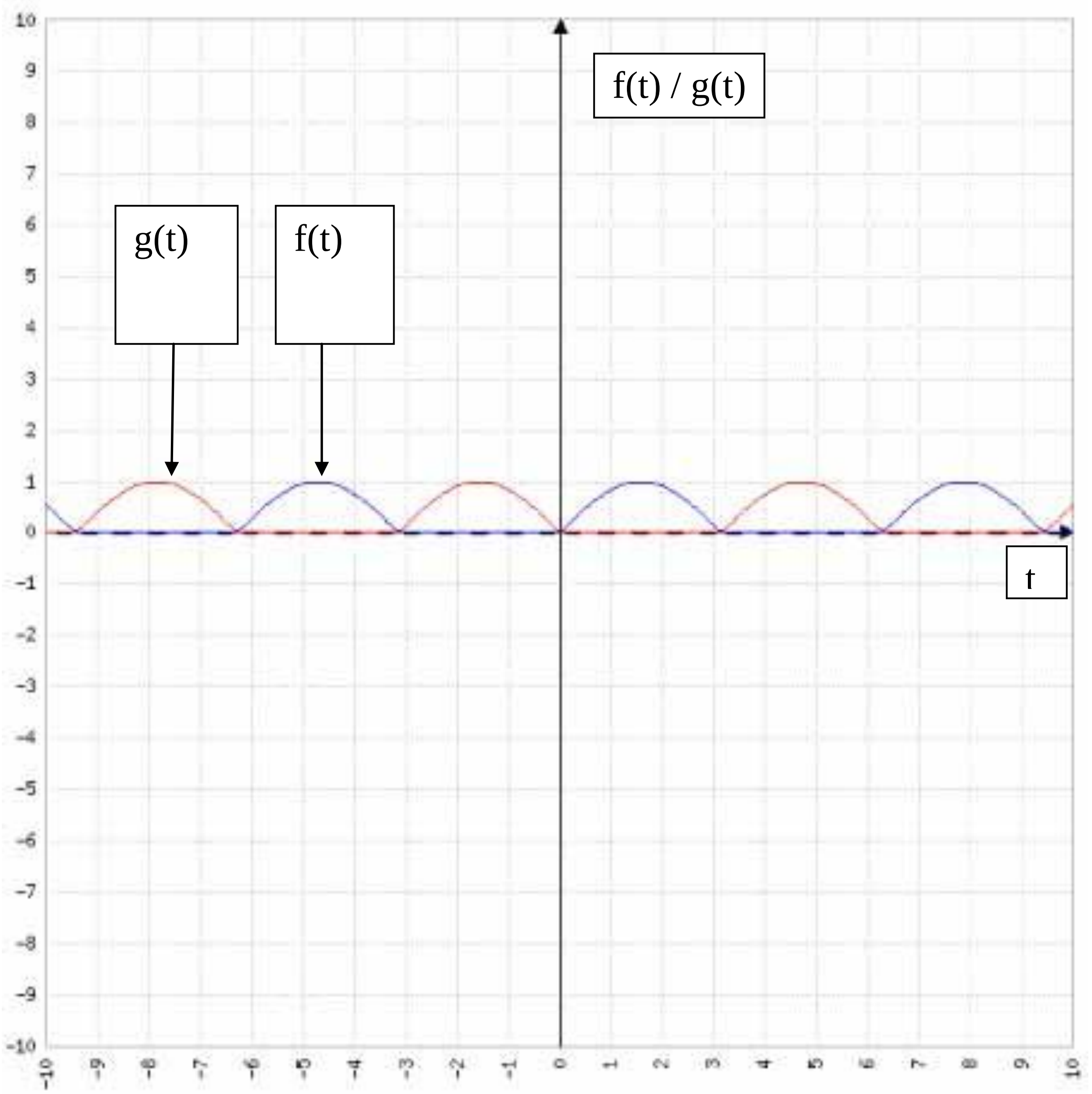
$$f(t) = = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{3} + \frac{\cos 4t}{15} + \frac{\cos 6t}{35} + \frac{\cos 8t}{63}\right)$$



ក្រាប សេរីហ្វូរីយេ នៃអនុគមន៍ g, ដោយយក p = 4

g(t) = = $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin(t)$ - $\frac{2}{\pi}$ $\left(\frac{\cos 2t}{3} + \frac{\cos 4t}{15} + \frac{\cos 6t}{35} + \frac{\cos 8t}{63}\right)$

<u>ក្រាបទាំងពីរ គួរនៅក្នុង តម្រុយ តែមួយ</u>



4°)

a) ដោយគេអោយ $\varphi(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$, នោះ

ដោយប្រើរូបមន្ត **(7)** យើងបាន

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}\right) + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}\right)\right]$$

រឺ

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2} \qquad (10)$$

ក៏ដូចគ្នាដែរ , ចំពោះ $\Psi(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$ ដោយប្រើរូបមន្ត (7) ដដែល, យើងបាន :

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}\right) - \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}\right)\right]$$

រឺ

$$\boxed{\Psi(t) = \frac{1}{2}\sin(t)} \qquad \textbf{(11)}$$

b) គណនាកន្សោម f និង g ដោយប្រើ φ និង ψ

- ដោយ

$$\varphi(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$$

$\Psi(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$ និង (9) $g(t) = f(-t)$, យើងបាន :

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} = \frac{f(t)+g(t)}{2}\\ \Psi(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2} = \frac{f(t)-g(t)}{2}\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(t)+g(t) = 2\varphi(t)\\ f(t)-g(t) = 2\Psi(t)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = \varphi(t) + \Psi(t)} \qquad \textbf{(12)}$$

$$\boxed{g(t) = \varphi(t) - \Psi(t)} \qquad \textbf{(13)}$$

c) បង្ហាញថា φ(t) = |ψ (t)|

ដោយប្រើ **(12)** និង **(13)**, យើងបាន

$$\varphi(t) = \frac{f(t)+g(t)}{2} = \frac{f(t)+f(t-\pi)}{2}$$

ហើយតាមនិយមន័យនៃអនុគមន៍ f, នោះ

- បើ $t \in [0, \pi]$, នោះ $(t-\pi) \in [-\pi, 0]$, $\varphi(t) = \frac{f(t)+f(t-\pi)}{2}$

$$= \frac{1}{2}(\sin(t) + 0) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{\sin}(t)$$

- បើ $t \in]\pi, 2\pi[$, នោះ $(t-\pi) \in]0, \pi[$, $\varphi(t) = \frac{f(t)+f(t-\pi)}{2}$

$= \frac{1}{2}(0 + \sin(t - \pi)) = \frac{1}{2}(-\sin(\pi - t))$

$= -\frac{1}{2}(\sin(\pi - t)) = -\frac{1}{2}(\sin t)$

$= \frac{1}{2}|\sin t|$ ព្រោះ $t \in]\pi, 2\pi[$, $\sin t < 0$

ដូច្នេះ $-\frac{1}{2}(\sin t) > 0$

រួមសេចក្តីទៅ :

ចំពោះ $t \in [0, 2\pi]$, $\varphi(t) = \left|\frac{1}{2}\sin(t)\right|$

ដោយ φ ជាអនុគមន៍ខួប នោះចំពោះ $t \in R$,

$$\varphi(t) = \left|\frac{1}{2}\sin(t)\right| \quad \textbf{(13-a)}$$

ដោយ **(11)** $\Psi(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$

$$|\Psi(t)| = \varphi(t)$$

ដោយ **(10)** យើងអាចសរសេរ :

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2} \quad \forall t \in R \quad \textbf{(14)}$$

សង្កេត :

យើងបានឆ្លើយនូវសំនួរទាំងអស់ក្នុងចំណោទនេះហើយ ដើម្បីទាញយកលទ្ធផលអោយបាន លើសពីនេះទៅទៀត នោះគេអាចបន្ថែមនូវសំនួរខ្លះ ដូចតទៅនេះ :

សំនួរទី ១ :

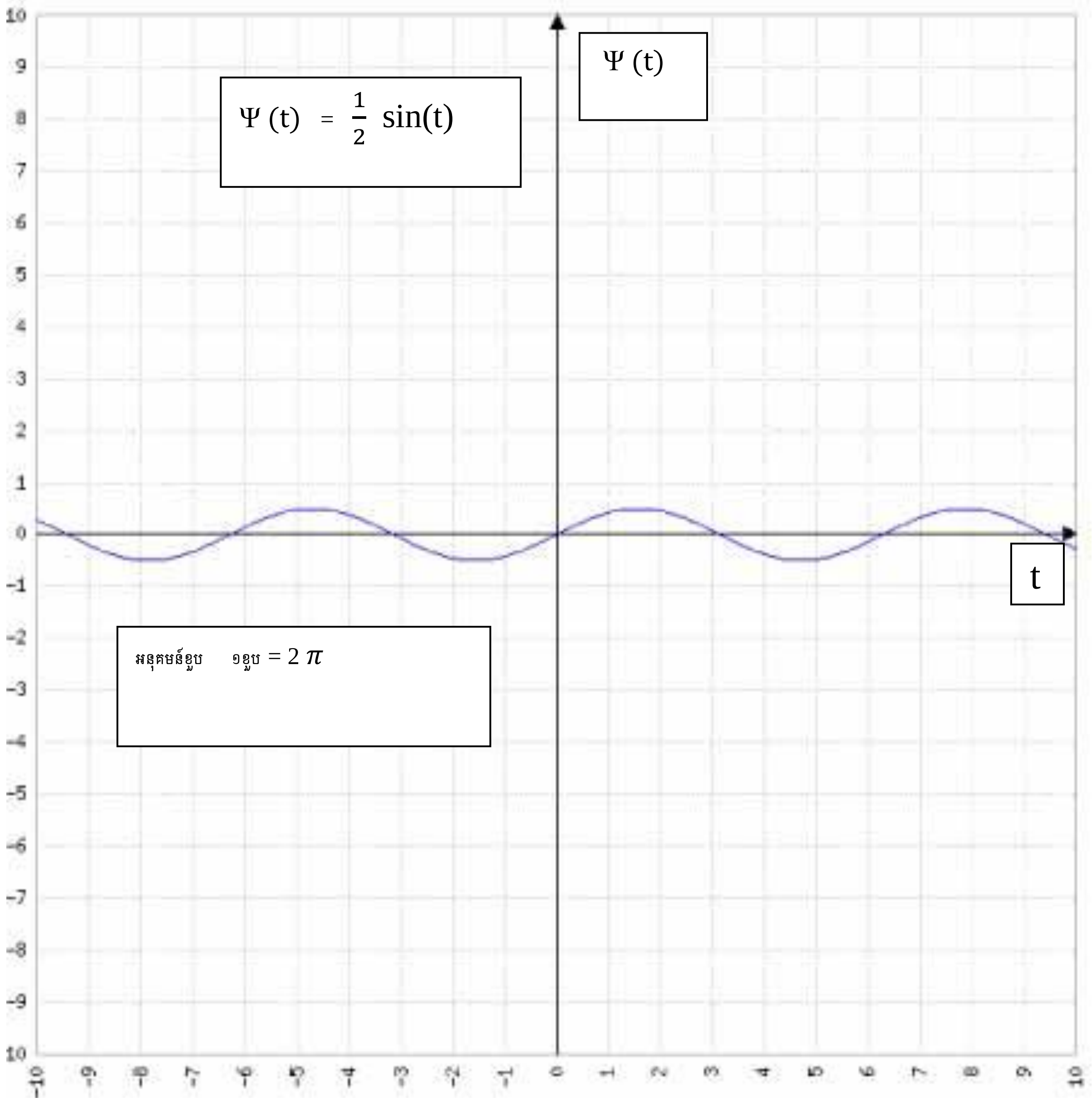
ចូរគូខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $\Psi(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$ និង φ ដែលកំនត់ដោយ **(13-a)** នៃចំណោទខាងលើ

សំនួរទី ២ :

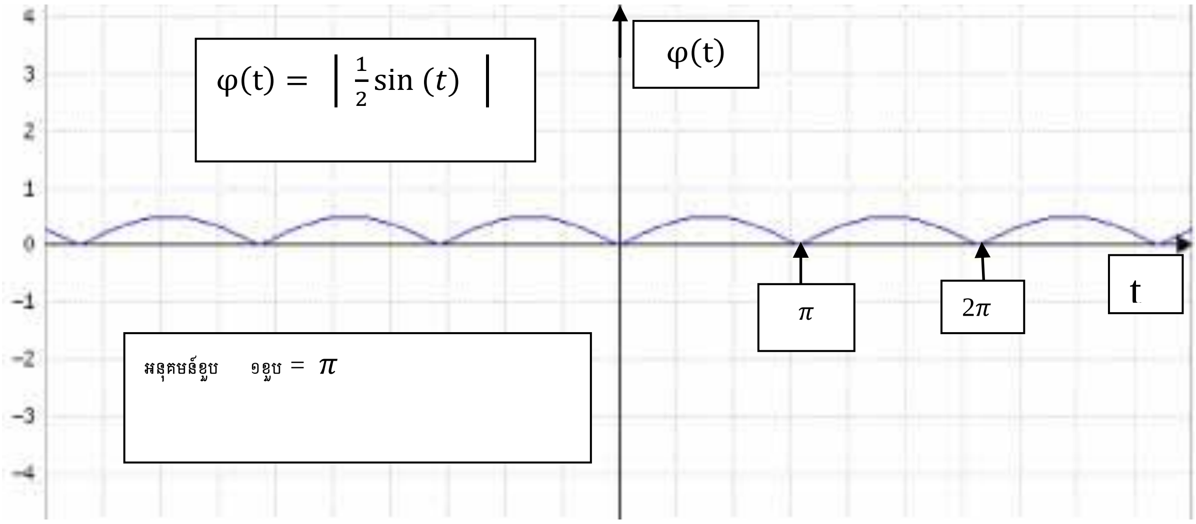
ផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្ត **(14)**, ចំពោះ $t = 0$

ចំលើយ

ទី ១ :



Ψ (t)
Ψ (t) = 1/2 sin(t)
t
អនុគមន៍ខួប ១ខួប = 2 π



ទី ២ : រូបមន្ត (14) អោយ

$$|\sin(t)| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}, \forall t \in R$$

យើងដឹងហើយថា រូបមន្តនេះ បានមកដោយការបំបែកជា សេរីហ្វូរីយេ នៃអនុគមន៍ $|\sin(t)|$ ។ ហើយដោយ អនុគមន៍ $|\sin(t)|$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង លក្ខ័ណ្ឌទាំងអស់នៃ ទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ ដូច្នេះ ចំពោះ t = 0, $|\sin(t)| = |\sin(0)| = 0$ ហើយបើរូមន្តខាងលើ នេះត្រូវ នោះយើងត្រូវបាន $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2} = 0$ ដែរកាលណា t = 0 រឺ

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = 0$$

ដើម្បីគណនា $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$ យើងអាចបំបែក $\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{(2p-1)(2p+1)}$ ជា

$$\frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \frac{A}{2p-1} + \frac{B}{2p+1} \qquad \textbf{(1)}$$

- ដើម្បីរកតំលៃ A, យើងគុណកន្សោម (1) ដោយមេគុណ (2p – 1) ហើយបន្ទាប់ពីលុបនូវ កត្តាដូចគ្នា នោះយើងយកតំលៃ p ដែលធ្វើអោយកត្តា

(2p – 1) = 0 គឺថា : 2p = 1

(1) × (2p-1) អោយ

$$\frac{1\,(2p-1)}{(2p-1)(2p+1)} = \frac{A(2p-1)}{(2p-1)} + \frac{B(2p-1)}{(2p+1)} \quad , \quad \text{រឺ}$$

$$\frac{1}{2p+1} = A + \frac{B(2p-1)}{(2p+1)}$$

ចំពោះ 2p = 1 , យើងបាន $\frac{1}{1+1} = A + \frac{B.0}{1+1}$ => $A = \frac{1}{2}$

- ដើម្បីរក B , យើងគុណ (1) ដោយកត្តា (2p + 1) បន្ទាប់មកយើងយកតម្លៃ 2p = - 1

(1) × (2p+1) អោយ

$$\frac{1(2p+1)}{(2p-1)(2p+1)} = \frac{A(2p+1)}{2p-1} + \frac{B(2p+1)}{(2p+1)} \text{ , រឺ}$$

$$\frac{1}{(2p-1)} = \frac{A(2p+1)}{2p-1} + B$$

ចំពោះ 2p = - 1 យើងបាន :

$$\frac{1}{(-1-1)} = \frac{A\,.0}{-1-1} + B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

ដោយសង្ខេបទៅ (1) ទៅជា :

$$\frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1}\right] \quad \textbf{(2)}$$

ដើម្បីគណនា $S_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$, យើងសរសេរ (2) ដោយអោយតំលៃទៅ p = 1 , 2 , 3 ..... (n – 1) , n

ចំពោះ :

$$p = 1 , \quad \frac{1}{1.3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right]$$

$$p = 2 , \quad \frac{1}{3.5} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right]$$

$$p = 3 , \quad \frac{1}{5.7} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right]$$

$$p = 4 , \quad \frac{1}{7.9} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right]$$

.

.

.

$$p = n-1 , \quad \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right]$$

$$p = n , \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

....

ដោយបូក តាមជួរ $S_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]$

ដូច្នេះបន្ទាប់ពីបូកតាមជួរ , យើងបាន

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = S = \frac{1}{2}$ (ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$)

ហើយ $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, ដូចដែលយើងចង់បង្ហាញ ។

នេះគ្រាន់តែជាកស្តុតាង , បង្ហាញថាយើងអាចបំបែក**អនុគមន៍ខួប**ថ្នាក់ C^1 ជាសេរីហ្វួរីយេបាន ។

===

9-3 ចំណោទ-ទី៣

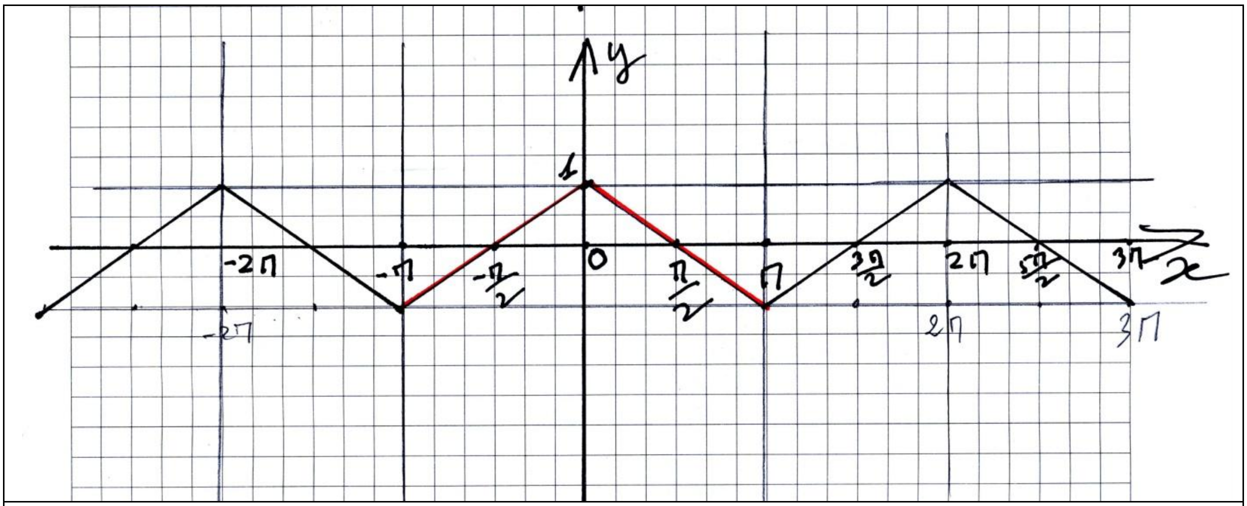
គេឲ្យ អនុគមន៍ f ពី $R \rightarrow R$ គូ មានខួប 2π កំណត់ដោយ $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ នៅលើចន្លោះ $]0, \pi]$ ។

1) រក សេរីហ្វូរីយេ នៃ អនុគមន៍ f ដោយប្រើមេគុណកំផ្លិច

2) ដោយ 1) គណនា $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ។

ចម្លើយ

Fig-1



ក្រាបពណ៌ក្រហមនេះតម្រូវនឹង ចន្លោះ $[-\pi, +\pi]$ ដែលមានប្រវែង 2π គឺមួយខួប។

សង្កេត

ដើម្បីរកមេគុណហ្វូរីយេ ជាទូទៅ យើងត្រូវដឹង អនុគមន៍ កំណត់ក្នុងចន្លោះមានប្រវែង មួយខួប ហើយបន្ទាប់មក យើងប្រើរូបមន្ត ដែលឲ្យមេគុណ ជាចំនួនពិត ឬ ជាចំនួនកំផ្លិច ទៅតាមប្រធានបទនៃលំហាត់។

នៅក្នុងលំហាត់នេះ តាមប្រធានបទ ប្រវែងនៃខួបគឺ 2π ហើយចំពោះ អនុគមន៍ គេស្គាល់តែ អនុគមន៍ $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ ក្នុងចន្លោះ $[0, \pi]$ ដែលមានប្រវែង π តែប៉ុណ្ណោះ ។តែដោយប្រធានបទត្រូវតែឲ្យអនុគមន៍ប្រវែង មួយខួប ហេតុនេះហើយបាន ជាគេបន្ថែមទៀតថា អនុគមន៍ខួបនោះជា អនុគមន៍គូ $(fonction\ paire)$ បានន័យថា នៅក្នុងចន្លោះ $[-\pi, 0]$ ក្រាបនៃអនុគមន៍ខួបនោះ ឆ្លុះ នឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ f ក្នុង

ចន្លោះ $[\,0\,,\pi\,]$ ។ មើល $Fig-1$ រូបក្រាបខាងលើ ដែលយើងគូរក្រាបនៃអនុគមន៍ f នៅក្នុងចន្លោះ $[\,0\,,\pi\,]$ (បន្ទាត់ពណ៌ក្រហម)។ យើងឃើញ ថា ក្រាបនោះជាបន្ទាត់ មានសមីការ $y=-\frac{2}{\pi}t+1$ ដែលកាត់តាមចំណុច $(0,1)$ និងចំណុច $(\frac{\pi}{2},0)$ ។ ដូច្នេះ បន្ទាត់ឆ្លុះធៀបនឹង អ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ ត្រូវកាត់តាមចំណុច $(0,1)$ និងចំណុច $(-\frac{\pi}{2},0)$

=> សមីការ $y_1 = \frac{2}{\pi}t+1$ ។

រួមសេចក្តីទៅ អនុគមន៍ខួប 2π នោះគឺ ៖

$$f(t)=\begin{cases} 1-\frac{2t}{\pi} & \text{បើ } t\in\,]\,0\,,\pi] \\ 1+\frac{2t}{\pi} & \text{បើ } t\in\,]-\pi\,,0] \end{cases}$$

<u>រកមេគុណ កំផ្លិច</u>

$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\,e^{in\omega t}$ ដោយ $c_n=\frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{-in\omega t}\,dt \quad (n\in Z)$

ទំនាក់ទំនងជាមួយនឹង មេគុណ នៃចំនួនពិតគឺ ៖

$$c_0=a_0 \text{ និង } c_n=\frac{a_n-ib_n}{2} \quad (n\in N^* \text{ ហើយ } i^2=-1) \text{ និង } c_{-n}=\overline{c_n}$$

ដោយ អនុគមន៍ f ឆ្លុះ ធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ នៅក្នុងចន្លោះ $[-\pi\,,\pi\,]$ ដែលមានប្រវែង មួយខួប នោះយើងមិនចាំបាច់ដឹង សមិការនៃអនុគមន៍នោះនៅក្នុងចន្លោះ $[-\pi\,,0]$ ទេ ។ ការដឹង សមិការនៃ f នៅក្នុង ចន្លោះ $[\,0\,,\pi]$ នោះគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ គណនាមេគុណ c_n ៖

$c_n=\frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{-in\omega t}\,dt \;=\frac{1}{2\pi}[\,\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}dt\,]$ ដោយ $\omega=\frac{2\pi}{T}\;\frac{2\pi}{2\pi}=1$

$c_n=\frac{1}{2\pi}[\,\int_{-\pi}^{0} f(t)\,e^{-int}dt+\int_{0}^{\pi} f(t)\,e^{-int}dt\,]=\frac{1}{2\pi}[\,I_1+I_2\,]\,,\; I_1=\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-int}\,dt$

និង $I_2=\int_0^{\pi} f(t)\,e^{-int}dt$ ។ យើងគណនា I_1 ដោយដូរ អថេរ ដើម្បីឲ្យបានអាំងតេក្រាល ពី 0 ទៅ π ដូច I_2 ។ យើងតាងដោយ $u=-t$ => $du=-dt$ យើងបាន (R1) :

$I_1=\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-int}\,dt=\int_{\pi}^{0} f(-u)\,e^{-in(-u)}(-\,du)=-\int_{\pi}^{0} f(-u)\,e^{inu}du=\int_0^{\pi} f(-u)e^{inu}\,du$

ដោយ f អនុគមន៍ គូ $f(-u)=f(u)$ ដូច្នេះ

$I_1=\int_0^{\pi} f(-u)e^{inu}\,du=\int_0^{\pi} f(u)e^{inu}\,du=\int_0^{\pi} f(t)e^{int}\,dt$ ដោយ ជំនួស u ដោយ t

ដូច្នេះ $c_n=\frac{1}{2\pi}[\,I_1+I_2\,]=\frac{1}{2\pi}\,[\,\int_0^{\pi} f(t)e^{int}\,dt+\int_0^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\,]$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,[\,e^{int}+e^{-int}]\,dt=\frac{1}{\pi}[\,\int_0^{\pi} f(t)\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}dt]=\frac{1}{\pi}[\,\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\,]$$

$$\boxed{c_n=\frac{1}{\pi}[\,\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\,]}$$

$(F1)$

<u>សង្កេត</u>

រូបមន្ត $(F1)$ នេះ បានឡើងដោយប្រើសម្មតិកម្មថា អនុគមន៍ f គូ ធៀបទៅនឹង អ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ ហើយ អនុគមន៍ f មានខួប $T = 2\pi$ ។ គឺថាយើងពុំទាន់បានប្រើ សមីការ នៃ អនុគមន៍ f ដែលបាន កំណត់នៅក្នុងចន្លោះ $[0,\pi]$ នោះនៅឡើយទេ ។ ការសង្កេតនេះសំខាន់ណាស់ ក្នុងការរក មេគុណ នៃ សេរីហ្វួរីយេ បើកាលណា អនុគមន៍ គូ ធៀបទៅនឹង $\overrightarrow{Oy}$។ ពីព្រោះ $(F1)$ មិនមែនជារូបមន្ត ដែលអាចយកមកប្រើបាន ដោយមកពីវាមាននៅក្នុងមេរៀននោះទេ ដូច្នេះយើងត្រូវស្គាល់របៀបរក រូបមន្តនេះ ។

ឥឡូវយើង បន្តលំហាត់នេះតទៅទៀត៖

ដោយ អាំងតេក្រាលនៅក្នុង ចន្លោះ $[0,\pi]$ នោះយើងស្គាល់ សមីការនៃអនុគមន៍ f

ដូច្នេះ យើង ជំនួសនៅក្នុង $(F1)$, $f(t)$ ដោយ $1-\frac{2x}{\pi}$ =>

$$c_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi \left(1-\frac{2t}{\pi}\right)\cos(nt)\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi \cos(nt)\,dt - \int_0^\pi \frac{2t}{\pi}\cos(nt)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)dt\right] = -\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos(nt)dt$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\left[\left[t\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt\right] = -\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}(\cos(nt)_0^\pi)\right]$$

$= -\frac{2}{\pi^2 n^2}[(-1)^n - 1)] = \boldsymbol{\frac{2}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n]}$ រូបមន្តនេះ ប្រើបានតែចំពោះ $n \geq 1$ ។

ចំពោះ $n = 0$ តាមនិយមន័យ $c_0 = a_0$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_\propto^{\propto+T} f(t)e^{-in\omega t}\,dt \quad (n \in Z) \Rightarrow c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^\pi f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^0 f(t)dt + \int_0^\pi f(t)dt\right]$$

យើងតាង $u = -t \Rightarrow du = -dt \Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^0 f(t)dt = \int_\pi^0 f(-u)(-du) = -\int_\pi^0 f(-u)du = \int_0^\pi f(-u)du = \int_0^\pi f(-t)dt = \int_0^\pi f(t)dt$$

ពីព្រោះ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ ។ ដូច្នេះ

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi}\times 2\int_0^\pi f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{2t}{\pi}\right)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi dt - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\,dt\right]$$

$= \frac{1}{\pi}\left[\pi - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right)\right] = 0 \Rightarrow$ $\boxed{a_0 = 0}$ ។ ដូច្នេះ យើងបាន៖

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n]\; e^{int} \;(\forall n \neq 0)$$

ដើម្បីរក សេរីហ្វួរីយេ នសអនុគមន៍ f យើងត្រូវរកមេគុណ a_n និង b_n ដោយប្រើ

រូបមន្ត $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ៖

$\frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{2}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n]$ => $a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n]$ ហើយ $b_n = 0$ ពីព្រោះ b_n ជាផ្នែកនិមិត្ត ត្រូវស្មើនឹងផ្នែកនិមិត្តនៃ c_n ដែលជាចំនួនពិតៗ ដោយក្រាប $Fig-1$ ខាងលើ f ជាអនុគមន៍នៃថ្នាក់ C^1 ដូច្នេះដោយទ្រឹស្តីបទ Dirichlet យើងអាចសរសេរ ៖

$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n]cos(nt) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]cos(nt)]$

ដោយ $1-(-1)^n = 2$ ចំពោះ $n = 2p+1$ និង $1-(-1)^n = 0$ ចំពោះ $n = 2p$

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty} 2\cos(2n+1)\,t = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\,t \quad (A1)}$$

2/ ចំពោះ $t = 0$ ដោយ $(A1)$ យើងបាន ៖

$f(0) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ ឬ $1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ => $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

<u>គណនា</u> ៖ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

ដោយ សំនុំ $N = \{2n+1\} \cup \{2n\}$ ដូច្នេះ

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

ដូច្នេះ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ => $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ => $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\times\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$

ដូច្នេះ

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$ និង $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

9-4 ចំណោទ-ទី៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f មានខួប 2π សេស ហើយកំណត់ដោយ $\forall t \in [0,\pi]$,

$f(t) = t(\pi - t)$។

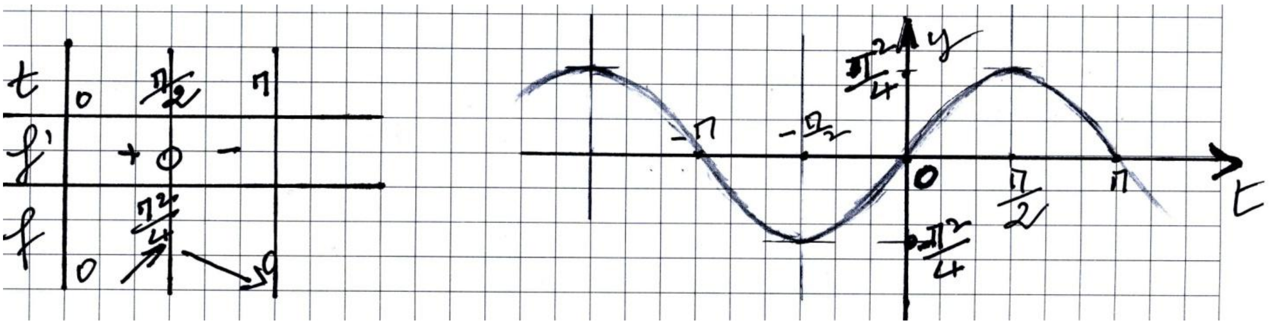
ចូររក សេរីហ្វួរីយេ នៃ អនិគមន៍ f ។

<u>ចម្លើយ</u>

នៅក្នុងប្រធានបទគេមិនបានឲ្យយើងគូរក្រាបនៃ អនិគមន៍ f នេះទេ ។ បើគូរ ក្រាបមានរាងដូចតទៅ នេះ ៖

$f(t) = t(\pi - t), \forall t \in [0,\pi]$ => $f'(t) = (\pi - t) + (-1)t = \pi - 2t$ => $f'(t) = 0$

បើ $t = \frac{\pi}{2}$ ។ តារាង អថេរ នៃ f និង ក្រាប៖



ចំណោទនេះ ខុសពីចំណោទទី៣ តែអនុគមន៍ f សេស នៅទីនេះ ហើយចំពោះចំណោទទី ៣ អនុគមន៍ f គូ ។ ដូច្នេះរបៀបរកដូចតែគ្នា រហូតមកដល់ ទំនាក់ទំនង $(R1)$ នៅក្នុងចំណោទទី ៣ គឺថាយើងបាន៖

យើងបាន (R1) :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-int}\,dt = \int_{\pi}^{0} f(-u)\,e^{-in(-u)}(-\,du) = -\int_{\pi}^{0} f(-u)\,e^{inu}du = \int_{0}^{\pi} f(-u)e^{inu}\,du$$

ដោយ f អនុគមន៍ សេស $f(-u) = -f(u)$ ដូច្នេះ

$I_1 = \int_0^{\pi} f(-u)e^{inu}\,du = \int_0^{\pi} -f(u)e^{inu}\,du = -\int_0^{\pi} f(t)e^{int}\,dt$ ដោយ ជំនួស u ដោយ t

ដូច្នេះ $c_n = \frac{1}{2\pi}[\,I_1 + I_2\,] = \frac{1}{2\pi}\left[-\int_0^{\pi} f(t)e^{int}\,dt + \int_0^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right]$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,[-e^{int} + e^{-int}]\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(t)\frac{-(e^{int}-e^{-int})}{2}\,dt\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(t)\left[\frac{-i(e^{int}-e^{-int})}{2i}\,dt\right)\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,(-i)\sin(nt)\,dt$$

ដោយនៅក្នុងចន្លោះ $[0, \pi]$ $f(t) = t(\pi - t)$ ដូច្នេះយើងបាន៖

$c_n = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin(nt)\,dt = \frac{-i}{\pi}\ \int_0^{\pi}[\ \int_0^{\pi} \pi t\sin(nt)\,dt\ -\ \int_0^{\pi} t^2\sin(nt)\,dt]$

$= \frac{-i}{\pi}\ \int_0^{\pi}[\pi\ \int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt\ -\ \int_0^{\pi} t^2\sin(nt)\,dt\,]\ =\ \frac{-i}{\pi}[\,\pi\,I1\ -\ I2\ ]$ ដោយ

$I1 = \int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt$ និង $I2 = \int_0^{\pi} t^2\sin(nt)\,dt$

ដើម្បី គណនា $I1$ និង $I2$ យើងធ្វើដោយ ប្រើ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក (*intégrale par partie*) ដែលរំលឹកឡើងវិញដូចខាងក្រោមនេះ ៖

យើងដឹងថាដេរីវេ នៃអនុគម៍ U , V មានអថេរ x

$(UV)' = U'V + V'U \Rightarrow UV' = (UV)' - VU' \Rightarrow$ ដោយធ្វើ

ព្រីមីទីវ (*primitive*) ទាំងសងខាង យើងបាន ៖

$\int U\,(V'\,dx) = \int [(UV)' - VU']\,dx \Rightarrow \int U\,dV = \int (UV)'\,dx - \int VU'dx$

ឬ $\int U\,dV = UV - \int VdU$ ដែល ជារូមន្ត នៃ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\int U\,dV = UV - \int VdU$$

បើសរសេរដោយអថេរ x គេបាន៖

$$\int_a^b uv'dx = (UV)_a^b - \int_a^b vu'dx \qquad \textbf{(F1)}$$

តទៅនេះ យើងនឹងប្រើ រូមន្ត ខាងលើនេះ ដើម្បី គណនា អាំងតេក្រាល ។

$I1 = \int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt$

យើងតាង $u = t \Rightarrow du = dt$

$\sin(nt)\,dt = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{n}cos(nt)$

$I1 = [\,(t)(-\frac{1}{n}\cos(nt\,))]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos(nt)\,dt = -\frac{1}{n}[\ tcos(nt)_0^{\pi} - \frac{1}{n}(\sin(nt)_0^{\pi})\,]$

$= -\frac{1}{n}[\ \pi(-1^n)\ ] = -\frac{\pi}{n}(\,-1)^n\ = \boldsymbol{\frac{\pi}{n}(\,-1)^{n+1}}$ ។

គណនា $I2 = \int_0^{\pi} t^2\sin(nt)\,dt$

យើងតាង $u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt$

$dv = \sin(nt)\,dt \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos(nt)$

$I2 = [t^2\left(-\frac{1}{n}\right)\cos(nt)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos(nt)\,2tdt = (-\frac{\pi^2}{n})(-1)^n + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt$

$= \frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n} I3$ ដោយ $I3 = \int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt$ ។

គណនា $I3 = \int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt$

យើងតាង $u = t \;\Rightarrow\; du = dt$

$\cos(nt)\,dt = dv \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{n}\sin(nt)$

$I3 = [\,t(\frac{1}{n}\sin(nt))\,]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)\,dt = -\frac{1}{n}\,(-\frac{1}{n})\cos(nt)_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}[(-1)^n - 1]$

$= -\frac{1}{n^2}\,(1 - (-1)^n)$

ដូច្នេះ ៖

$I2 = = \frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n}[-\frac{1}{n^2}(1-(-1)^n)] = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} - \frac{2}{n^3}[1-(-1)^n]}$

យើងត្រឡប់មករក $c_n = \frac{-i}{\pi}[\pi I1 - I2]$

$c_n = -i\,(I1 - \frac{1}{\pi} I2) = -i\{\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{1}{\pi}[\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} - \frac{2}{n^3}(1-(-1)^n)]\}$

$= -i\{\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi n^3}(1-(-1)^n)\}$

ដូច្នេះ $\boldsymbol{c_n = \frac{-2i}{\pi n^3}[1-(-1)^n]}$ $(F2)$

ដោយ $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ចំពោះ $n \ge 1$ ហើយដោយ c_n នៅក្នុង (F2) មានតែផ្នែក *imaginaire*

ដូច្នេះ ចំពោះ $n \ge 1$ $a_n = 0$ និង $a_0 = 0$ ពីព្រោះ f អនុគមន៍សេស ហើយ

$b_n = \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)$ ។ ជាទូទៅ យើងបាន

$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^3}[1-(-1)^n]\sin(nt)$

ដោយ អនុគមន៍ ជាប់ ក្នុង *R* ហើយបំពេញ ទ្រឹស្តីបទ *Dirichlet* នោះនៅក្នុង *R*

យើងអាចសរសេរ ៖

$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}[1-(-1)^n]\sin(nt)$ (F3)

យើងសង្កេតឃើញថា កត្តា $1 - (-1)^n = 0$ កាលណា n ជាចំនួនគត់ គូ

(*si n est pair*) ហើយស្មើនឹង 2 កាលណា n ជាចំនួនគត់ សេស (*si n est impair*)

ដូច្នេះ (F3) ទៅជា ៖

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)t}$$

$$= \frac{8}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{1}{3^3}\sin(3t) + \frac{1}{5^3}\sin(5t) + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)t + \ldots\right)$$ ។

<u>សង្កេត</u>

1- ចំពោះ $t = \frac{\pi}{2}$ យើងបាន

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{8}{\pi}\left(\sin(\tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{3^3}\sin\left(3\tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5^3}\sin\left(5\tfrac{\pi}{2}\right) + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} + \ldots\ldots\right)$$

ដោយ $f(t) = t(\pi - t)\ \forall t \in [0, \pi] \Rightarrow f(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

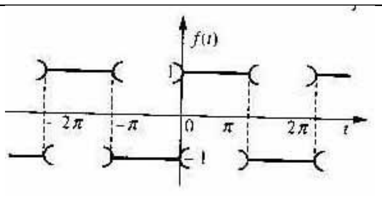
$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}(-1)^n\right. \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad \text{(F4)}$$

រូបមន្ត (F4) នេះ បង្ហាញថា ចំនួនពិត π ដែល បានដោយបូក តួទាំងឡាយ នៃ សេរីហ្វួរីយេ ដែលមានរហូតដល់ អនន្ត នោះ ដាចំនួនដែលយើងដឹងបាន ត្រឹមតែ ប្រហាក់ប្រហែលតែប៉ុណ្ណោះ (*valeur approchée*) ពីព្រោះយើងពុំអាចធ្វើលេខបូក ដល់អនន្តបានទេ ។ ហេតុនេះហើយ ដែលគេហៅថាជាចំនួន អសនិទាន (*nombre irrationnel*)។

2- តាមធម្មតា តួទាំងឡាយនៃសេរីហ្វួរីយេ មាន អនុគមន៍ *sin* ផង និង *cos* ផង។ ហើយយើងដឹងថា *cosinus* ជាអនុគមន៍ គូ និង *sinus* ជាអនុគមន៍ សេស ។ នៅក្នុង ចំណោទនេះ យើងឃើញ សេរីហ្វួរីយេនៃ អនុគមន៍ f មានតែតួ *sinus* តែប៉ុណ្ណោះ គឺថាគ្មានតួ *cosinus* មួយសោះ ។ នេះមកពីហេតុអ្វី ? ហេតុមកពី ដោយ អនុគមន៍ f ស្មើនឹង សេរីហ្វួរីយេដែលយើងត្រូវរក នោះបើអនុគមន៍ f ដែលគេឲ្យ ជាអនុគមន៍ សេស ដូច្នេះ សេរីហ្វួរីយេដែលយើងរកឃើញនោះ ក៏ត្រូវតែ ជាអនុគមន៍ សេសដែរ គឺថា តួ នីមួយៗ នៃសេរីហ្វួរីយេ ជាអនុគមន៍សេស ហើយដោយ អនុគមន៍ *sinus* ជាអនុគមន៍សេស ហេតុនេះហើយបានជា តួនៃសេរីនេះ សុទ្ធតែ ជា *sinus* ។ ផ្ទុយទៅវិញ បើ អនុគមន៍ f ដែលត្រូវរកសេរីហ្វួរីយេ ជាអនុគមន៍ គូ ដូចជានៅក្នុង ចំណោទទី៣ ជាដើម នោះតួទាំងអស់របស់ សេរីហ្វួរីយេ មានសុទ្ធតែជាអនុគមន៍ *cosinus* ក្រៅតែពី a_0 ដែលជាតួ មិនផ្លាសផ្តូរស្រាប់ ។

--------------- ចប់លំហាត់លើសេរីហ្វួរីយេ ----------------------

10- តារាងសេរីហ្វួរីយេ នៃអនុគមន៍ខ្លះដែលជួបញឹកញាប់

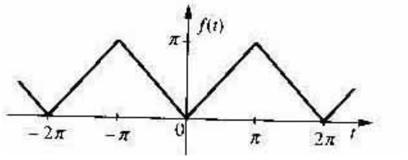


$f(t) = 1$ លើ $t \in [0,\pi[$

$= -1$ លើ $t \in [\pi,2\pi[$

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \ldots\right)$$

....

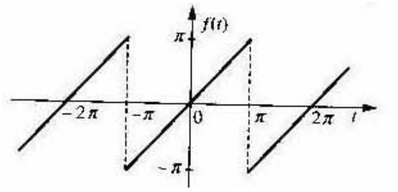


$f(t) = t$ លើ $t \in [0,\pi[$

$= -t + 2\pi$ លើ $t \in [\pi,2\pi[$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \ldots\right)$$

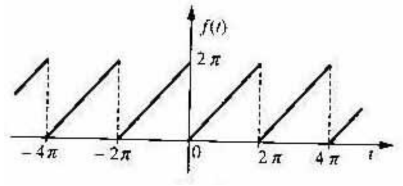
....



$f(t) = t$ លើ $t \in [0,\pi[$

$= t - 2\pi$ លើ $t \in [\pi,2\pi[$

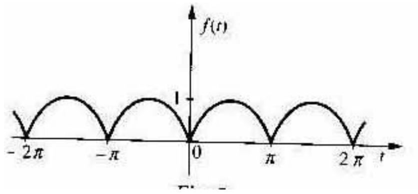
$$2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \ldots\right)$$



$f(t) = t$ លើ $t \in [0,2\pi]$

$$\pi - 2\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \ldots\right)$$

....

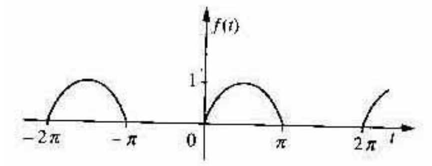


$f(t) = \sin(t)$ លើ $t \in [0,\pi[$

$= -\sin(t)$ លើ $t \in [\pi,2\pi[$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1.3} + \frac{\cos 4t}{3.5} + \frac{\cos 6t}{5.7} + \ldots\right)$$

....



$f(t) = \sin(t)$ លើ $t \in [0,\pi[$

$= 0$ លើ $t \in [\pi,2\pi[$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1.3} + \frac{\cos 4t}{3.5} + \frac{\cos 6t}{5.7} + \ldots\right)$$

មាតិកា --- ទំព័រ

អារម្ភកថា... ១

បុព្វយោគ...២

១- សញ្ញាណស៊ីត (notion de suite) ២

២- សញ្ញាណសេរី (notion de série) ៣

៣- រូបមន្តខ្លះ នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ៤

៤- សេរីហ្វួរីយេ ៥

៥- គណនាមេគុណ a_n និង b_n ៥

៥-១ គណនាមេគុណ a_0 ....៦

៥-២ គណនាមេគុណ a_n ($n \geq 1$) ៧

៥-៣ គណនាមេគុណ b_n ($n \geq 1$) ៩

៦- បកស្រាយតាមផ្នែកក្រឡាពិជគណិតនៃខ្សែកោង...១៣

៦-១ ឧទាហរណ៍ ១៤

៦-២ បើ e ជាអនុគមន៍គូ ($b_n = 0,\ n \geq 1$) ១៥

៦-៣ លំហាត់ ១៧

៧- ឧទាហរណ៍ ១៨

៧-១ ឧទាហរណ៍-1 ....១៨

៧-២ ឧទាហរណ៍-2 ....២៣

៨- ការបំបែកជាសេរីហ្វួរីយេ...២៧

៨-១. អនុគមន៍ខួបថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗ លើ R...២៧

A/ ការដាច់ប្រភេទទី១ ....២៧

B/ អនុគមន៍ ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗ លើចន្លោះ $I = [a,b] \subset R$..........................២៨

- បើលក្ខ័ណ្ឌ ទាំងបីខាងក្រោមនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំងអស់គ្នា..២៨

- ឧទាហរណ៍-8-1...២៨

- ឧទាហរណ៍-8-2 .... ៣០

មាតិកា -- **ទំព័រ**

C/ អនុគមន៍ ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗ លើ R ៣១
៨-២. ទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ (Dirichlet) ៣២
A/ ចំណោទ ៣២
B/ ទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ (Dirichlet) ៣៣
ទាហរណ៍-8-3 .... ៣៣
ឧទាហរណ៍-8-4 .... ៣៥
៨-៣. ភាពកុំផ្លិចនៃសេរីហ្វួរីយេ ៣៩
រូបមន្ត អឺលែ (Euler)........................ ៣៩
ឧទាហរណ៍-8-5 .... ៤១
៨-៤. រូបមន្ត បារសឺវាល (PARSEVAL) ៤៣
ការបកស្រាយរូបមន្តបារសឺវាលតាមរូបវិជ្ជា........................ ៤៤
៨-៥. ការបំប្លែងតាមត្រីកោណមាត្រសាស្ត្រ ៤៥
៨-៦. វិភាគអារម្មូនីកនៃសញ្ញា ៤៦
ឧទាហរណ៍-8-6 .... ៤៧
៩- ចំណោទដោយមានចំលើយ ៤៨
៩-១ ចំណោទទី១ .... ៤៨
៩-២ ចំណោទទី ២ .... ៥៨
៩-៣ ចំណោទទី ៣ .... ៧៦
៩-៤ ចំណោទទី ៤ .... ៨០
១០- សេរីហ្វួរីយេ នៃអនុគមន៍ខួបខ្វះ ដែលជួបញឹកញាប់ ៨៤