ឧបសម្ព័ន្ធ-៥(ANNEXE-5)

ពង្រីក សញ្ញាណ អាំងតេក្រាល

(Extension de la notion d'intégrale)

1. អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ ជាប់ ដោយ កង់ៗ

គេឲ្យ អនុគមន៍ f *មួយ ជាប់ លើចន្លោះ* [a ; b] *ក្រៅតែពីចំណុចខ្លះ*

ដែលមានចំនួនកំនត់ ដូចជា $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ $(a < t_1 < t_2 < \ldots\ldots t_n < b)$

ដែលអនុគមន៍នោះ មិនជាប់ ក៏ប៉ុន្តែ ត្រង់ចំណុចទាំងនោះ f *មានលីមីតខាងឆ្វេង*

និងខាងស្តាំ[1] *។ បើដូច្នេះ គេដឹងថា* $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt$ *មាន ហើយតាមនិយមន័យ អាំងតេ*

ក្រាលនៃ f *លើចន្លោះ* [a ; b] *គឺជា ផលបូកនៃអាំងតេក្រាលខាងលើនេះ គឺ ៖*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{t_1} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt + \ldots\ldots + \int_{t_n}^{b} f(t)dt$$

2. អាំងតេក្រាល ឌីវ៉ាល់ លើចន្លោះ $[a\,;\,+\infty[$ (Intégrale généralisée).

2.1 និយមន័យ

គេឲ្យ អនុគមន៍ f *មួយ យកតម្លៃ ក្នុង* R *ឬ* C *ជាប់ ឬ ជាប់ ដោយកង់ៗ លើចន្លោះ*

$[a\,;\,+\infty[$ $(a \in R$ *ដូច្នេះ* a *អាចអវិជ្ជមាន ក៏បាន)* *។ អាំងតេក្រាល* $\int_a^b f(t)dt$

ជាអាំងតេក្រាល កំនត់ $\forall b > a$ *។*

គេថា អាំងតេក្រាលឌីវ៉ាល់ (intégrale généralisée) $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *រួម បើ* $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)dt$

[1] *សូមបញ្ជាក់ថា ពាក្យថា « មានលីមីត « បានន័យថា លីមីតនោះជាចំនួន មិនអនន្ត ។*

មាន (ក្នុង R ឬ C) ។ គេសរសេរ ៖

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)dt}$$

2.2 លក្ខណវិនិច្ឆ័យ នៃការរួមរីក កាលណា អនុគមន៍ f យកចំនួនពិត វិជ្ជមាន (Critère de convergence lorsque f est réelle positive)

តទៅនេះ អនុគមន៍ ដែលយកមកនិយាយ គឺ សុទ្ធតែ ជាប់ ឬ ជាប់ដោយកង់ៗ លើចន្ទោះ $[a\,;\,+\infty[$ ។ បំណងយើង គឺចង់ដឹង ថា តើអាំងតេក្រាលដែល យើងសិក្សានោះ រួម ឬទេ បានន័យថា តើវាមាន តម្លៃ មិនអនន្ត ទេ ? ហេតុអ្វី បានជាគេចង់ដឹងជាមុន ? ព្រោះថា បើសិនជាអាំងតេក្រាលនោះ អត់មានតម្លៃផង យើងមិនចាំបាច់ខាតពេល ទៅរក តម្លៃត្រឹមត្រូវ របស់វានោះទេ ។

A. ប្រៀបធៀបដោយ ឲ្យតម្លៃធំ (Comparaison par majoration)

គេឲ្យ អនុគមន៍ ពីរ f និង g វិជ្ជមាន លើចន្ទោះ $[a\,;\,+\infty[$ ហើយដែល $\forall\, t > a$ ឬក៏ ចំពោះ t ធំបង្ស្ថរ គេបាន $f(t) \le g(t)$ នៅពេលនោះ ៖

បើ $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ រួម	នោះ $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ រួម
បើ $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ រីក	នោះ $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ រីក

B. ប្រៀបធៀបដោយ តម្លៃ សមមូល (Comparaison par équivalence)

គេឲ្យ អនុគមន៍ ពីរ f និង g វិជ្ជមាន លើចន្លោះ $[a\,;\,+\infty[$ ។ ចូរនឹកឡើងវិញ ៖ គេថា អនុគមន៍ពីរ f និង g សមមូលគ្នា នៅជិតអនន្ត $(+\infty)$ ហើយគេសេសេរ $f \sim g$ នោះ បានន័យថា ៖ $f(t) = g(t) + \varepsilon(t)$ ដោយ $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$

បើ $f \sim g$ នៅពេលនោះ អាំងតេក្រាលទាំង ពីរ $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ និង $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ មានភាពដូចគ្នា គឺ រួម ទាំងអស់គ្នា ឬ រីកទាំងអស់គ្នា ។

2.3 លក្ខណវិនិច្ឆ័យ ក្នុងការរួមរីក នៃ អនុគមន៍ទូទៅ (Critère de convergence des fonctions quelconques)

A. អាប់សូលុយ រួម (Absolue convergence)

<u>និយមន័យ</u>

គេថា អាំងតេក្រាល $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ <u>អាប់សូលុយ រួម</u> កាលណា $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ រួម ។

ហើយនៅពេលនោះ គេបានលទ្ធផល ដូចខាងក្រោមនេះ ៖

បើ $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ រួម នោះ $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ រួម

តែ បើផ្ទុយទៅវិញនោះ មិនត្រូវទេ ។

B. របៀបផ្សេង (Autre méthode)

ចំពោះអនុគមន៍យកចំនួនពិត ដោយ ដូរ សញ្ញាច្រើនដងដ៏លើសលប់ (អនន្តដង) លើចន្លោះ [a ; +∞ [, លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យក្នុងការរួមរីក មាន តែក្នុងករណីជាច្រើន ដើម្បីសិក្សាការរួមរីក គេច្រើនប្រើ អាំងតេក្រាល ដោយផ្នែក (intégrale par partie) ។

2.4 ឧទាហរណ៍ ដែលជាគ្រឹះ (Exemples fondamentaux)

$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt$ រួម	⇔ កាលណា $p > 0$
$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ រួម	⇔ កាលណា $\alpha > 1$

3. អាំងតេក្រាល ឌីវ៉ាល់ លើចន្លោះ $]-\infty\ ;\ a]$ (Intégrale généralisée sur $]-\infty\ ;\ a]$).

លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យ របស់ការរួមរីក លើចន្លោះ $[a\,;+\infty[$ អាចផ្ទេរ មកចន្លោះ $]-\infty\ ;\ a]$) បាន ដោយគ្រាន់តែប្តូរ អថេរ t ក្នុង អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ គឺថាយើងតាង $u = -t \Rightarrow du = -dt$ ដូច្នេះ $I = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ ទៅជា ៖

$I = \int_{+\infty}^{-a} f(-u)(-du) = \int_{-a}^{+\infty} f(-u)du$ ដែលជាអាំងតេក្រាល លើចន្លោះ $[-a\,;+\infty[$ ដែលយើង ធ្លាប់ឃើញរួចមកហើយ ។

4. អាំងតេក្រាល ឌីវ៉ាល់ លើចន្លោះ $]a\ ;\ b]$ ឬ $[a\ ;\ b[$

បើអនុគមន៍ f មិនមានលីមីត ត្រង់ a ឬ ត្រង់ b នោះអាំងតេក្រាល $\int_a^b f(t)dt$ ក៏ពុំអាចថា មាន តាមន័យធម្មតា ។ ដូច្នេះ ជាចាំបាច់ ត្រូវតែ ពង្រីកនិយមន័យ ។

4.1. និយមន័យ

<u>ករណី ទី-១</u> ភាពប្លែកពីគេ ត្រង់ b (ឧបមាដូចជា $\lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} f(t) =$ អនន្ត)

អនុគមន៍ f ជាប់ ដោយកង់ៗ លើចន្លោះ [a ; c] ដែលនៅក្នុង $[a\,;b[$ ហើយគ្មាន លីមីត ត្រង់ចំណុច b ។ គេថា អាំងតេក្រាលឱ៉រ៉ាល់ $\int_a^b f(t)dt$ រួម បើកាលណា $c \to b$ $\int_a^c f(t)dt$ មានលីមីត ក្នុង R ឬ C ។ គេសរសេរជា ៖

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{c\to b}\left[\int_a^c f(t)dt\right]}$$

<u>*ករណី ទី-២*</u> ភាពប្លែកពីគេ ត្រង់ a (ឧបមាដូចជា $\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} f(t)$ = អនន្ត)

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{c\to a}\left[\int_c^b f(t)dt\right]}$$

<u>4.2 *លក្ខណវិនិច្ឆ័យ ក្នុងការរួមរីក* (Critère de convergence)</u>

លក្ខណវិនិច្ឆ័យ ដូចគ្នានឹងលក្ខណវិនិច្ឆ័យ នៃអាំងតេក្រាលឱ៉រ៉ាល់ លើចន្លោះ [a ; +∞[, *ការរកតម្លៃធំ ការរក សមមូល នៅពេលនេះ គឺនៅជិត ចំណុចភាពប្លែក* (a ឬ b) ។

<u>4.3 *ឧទាហរណ៍ ជាគ្រឹះ* (Exemples fondamentaux)</u>

α ចំនួនពិត ,	$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$	*រួម* ⇔ *បើ* $\alpha < 1$
α ចំនួនពិត , b > a	$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$	*រួម* ⇔ *បើ* $\alpha < 1$
	$\int_0^1 \ln(t)dt$	*រួម*