

ឧបសម្ព័ន្ធ-៤ (ANNEXE-4)

ស៊េរី គត់ (Séries entières)

1. និយមន័យ និង កម្មសិទ្ធិ (définitions et propriétés)

1.1-និយមន័យ

ស៊េរី ដែលមាន តួទូទៅ $u_n = a_n z^n$ ដោយ a_n ជាចំនួន ពិត ឬ កុំផ្លិចគេឲ្យ និង z អថេរ នៃចំនួនពិត ឬ កុំផ្លិច ស៊េរីនោះ ហៅថា ស៊េរីគត់ (ព្រោះ $n \in \mathbb{N}$)។ គេសរសេរ $\sum a_n z^n$ ។

1.2-កម្មសិទ្ធិ

1°) ការបូក

ទៅតាមតម្លៃ ដែលឲ្យទៅ z ស៊េរី ដែលមាន តួទូទៅ $u_n = a_n z^n$ អាច រួម ឬ រីក ហើយ បើរួម គេកំនត់ អនុគមន៍ផលបូក f នៃស៊េរី ដោយ៖

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

ចំពោះ ស៊េរី អនុគមន៍យកតម្លៃកុំផ្លិច អថេរក៏ជាចំនួនកុំផ្លិច ហើយ កម្មសិទ្ធិ ស្តីពី រួមអ៊ុយនីហ្វ័រម ក៏ដូចគ្នា ដូចបានថ្លែងនៅ **ឧបសម្ព័ន្ធ-៣** ដែរ ។

2°) កាំរួម (rayon de convergence)

ដើម្បី ដឹងថា ស៊េរីគត់ រួម គេច្រើនតែ ប្រើ ក្លូន ដាឡាំប៊ែ (d'Alembert) ដែលតម្រូវឲ្យមាន

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ (គេតាងដោយ } l) \text{ ។ ដូច្នេះ } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = l|z|$$

- បើ $l = 0$ នៅពេលនោះ ស៊េរីគត់ រួមអាប់សូលុយ (convergence absolue) $\forall z \in \mathbb{C}$

- បើ $l \neq 0$ នៅពេលនោះ ស៊េរីគត់ រួមអាប៉ូស្តូលុយ (convergence absolue)
តែចំពោះ $z \in \mathbb{C}$ ដែលមាន $|z| < \frac{1}{l}$
- បើ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ នៅពេលនោះ ស៊េរីគត់ រួម តែកាលណា $z = 0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ

អ្វីដែលបានដោយ ក្បួនដាឡាំប៊ែរ គឺជាស្ថានភាពទូទៅ ។

ចំពោះ ស៊េរីគត់ ឬ ស៊េរី ដែលរួម គ្រប់តែចំនួន z នោះគេមាន ចំនួន $R \geq 0$ ដែល ៖

$$\begin{cases} |z| < R \Rightarrow \sum |a_n z^n| \text{ រួម} \\ |z| > R \Rightarrow \sum |a_n z^n| \text{ រីក} \end{cases}$$

ចំនួនពិត R នោះហៅថា កាំរួម (rayon de convergence) នៃស៊េរីគត់ ហើយចន្លោះ

$] -R ; +R[$ ហៅថា ចន្លោះរួម (intervalle de convergence) ។ ក្នុងករណីដែល ស៊េរីរួម គ្រប់តែ

ចំនួន z គេសន្មតថា $R = +\infty$ ។ ក្នុងករណីដែលគេប្រើក្បួនដាឡាំប៊ែរ $R = \frac{1}{l}$ ។

3°) កម្មសិទ្ធិ អនុគមន៍ផលបូក (ដោយ អថេរ ជាចំនួនពិត)

$$\text{គេឲ្យ } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

គ្រប់ចំនួន x ដែលនៅក្នុងចន្លោះរួម $] -R ; +R[$ គេបាន៖

a/ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ អនន្តដេរីវ៉ាប (indéfiniment dérivable) គឺថា

$f', f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(n)}, \dots$ មានរហូតដល់ $n \rightarrow +\infty$, ដូចជា ៖

$$\forall x \in] -R ; +R[$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \text{ ហើយក៏ដូចគ្នាចំពោះ ដេរីវេ}$$

ឯទៀតៗ ។

b/ បើអនុគមន៍ $f \equiv 0$ លើចន្លោះ $]-r; +r[$ ដោយ $r < R$ នៅពេលនោះ មេគុណ a_n ទាំងអស់ ស្មើនឹងសូន្យ (កម្មសិទ្ធិ នេះ ក៏ដូចគ្នានឹង កម្មសិទ្ធិ ក្នុងពហុធា ដែរ)។

2. អនុគមន៍ដែលអាចបំបែក ជា ស៊េរីគត់ (Fonctions développables en séries entières)

ចំពោះស៊េរីគត់ខ្លះ គេដឹងអនុគមន៍ដែលបូករួចទៅហើយ ។ នេះ ជាការបំបែកខ្លះ ដែលអាចមានប្រយោជន៍ ៖

a/ ការបំបែក ប្រើបាន កាលណា $x \in]-1; +1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

b/ ការបំបែក ប្រើបាន $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

ចំពោះ $x = 1$, $e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n}{n!}$

$$\text{ឆ្នាំ, } e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \varepsilon\left(\frac{1}{n!}\right)$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n!} + \left(\frac{1}{n!}\right) \text{ ដែលជាប្រមាណមួយ សម្រាប់គណនា}$$

ចំនួន អសនិទាន e (nombre irrationnel e) ។