<u>ចំណោទ-ទី៧</u>

<u>*គោលបំណង* :</u>

បកស្រាយ សមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដោយអង្គទី ២ ជាអនុគមន៍ខួប ។

<u>ប្រធានបទ</u>

គេចង់រកចម្លើយ នៃ សមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដោយប្រើបំប្លែងឡាប្លាស ហើយចម្លើយ

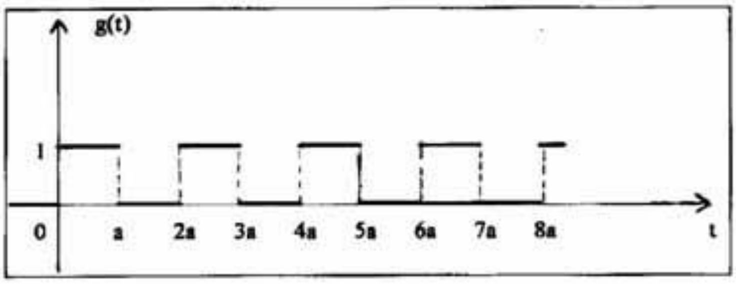
នោះ ជាអនុគមន៍ សហេតុ ជាប់ និងមានដេរីវេជាប់ លើ R^+ *ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង*

$x(0) = x'(0) = 0$ *ហើយជាចម្លើយ ក្នុងន័យដែលបានថ្លែងនៅ* **§ IX-2-B** ។

សមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល នោះគឺ៖

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = g(t) \quad \textbf{(1)}$$

ដោយ g *ជា អនុគមន៍សហេតុ ខួប មានខួប* T = 2a, *ដែលមានក្រាបខាងក្រោមនេះ ៖*



1/ *រកបំឡាប្លាស* G *នៃអនុគមន៍* g

2/ *រកចំនួន* A, B, C *ដែល* $\forall p \in R^* - \{1\}$ *គេបាន៖*

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-1}$$

3/ *ចំពោះ* $p > 0$ *បង្ហាញ ៖* $\frac{1}{1+e^{-ap}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nap}$

4/ ដោយប្រើបំប្លែងឡាប្លាស រកអនុគមន៍ $t \to x(t)$ ចម្លើយរបស់ សមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល **(1)** លើ R^* ។

<u>ចម្លើយ</u>

<u>1/ រកបំឡាប្លាស G នៃអនុគមន៍ g</u>

g ជា អនុគមន៍ សហេតុ ខួប មានខួបស្មើនឹង 2a (T = 2a)ហើយ

$g_0(t) = 1$ កាលណា $t \in [0 ; a[$ **(2)** (មើលក្រាប ខាងលើ)

$g_0(t) = 0$ កាលណា $t \in [a ; 2a[$ **(3)**

ដោយតាង G_0 ជាបំប្លែងឡាប្លាស នៃ g_0 ហើយដោយប្រើរូបមន្ត **(F-S-XIII-1)** នៅក្នុង

ចំណោទ ទី៦ ប្រធានបទ-ទី១ យើងបាន៖

$G(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}.G_0(p) = \frac{1}{1-e^{-p2a}}.G_0(p)$ **(4)**

$g_0(t) = [U(t) - U(t-a)] + 0[(U(t-a) - U(t-2a)]$

ដូច្នេះ ៖

$G_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}(e^{-ap}) = \frac{1}{p}(1 - e^{-ap})$

ដូច្នេះដោយ (4) ៖ $G(p) = \frac{1}{p}(\frac{(1-e^{-ap})}{1-e^{-p2a}})$

$$G(p) = \frac{1}{p}(\frac{(1-e^{-ap})}{1-e^{-2ap}})$$

2/ រកចំនួន A, B, C ដែល $\forall p \in R^* - \{1\}$ គេបាន៖

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-1} \quad (5)$$

a/ ដោយគុណ (5) នឹង p សម្រួល ឲ្យ p = 0 គេបាន៖

$$p[\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-1}]$$

$$\frac{1}{(p-1)^2} = \frac{A}{} + \frac{pB}{(p-1)^2} + \frac{pC}{p-1} \Rightarrow 1 = A \qquad \boxed{A = 1} \quad \textbf{(6)}$$

b/ ដោយគុណ (5) នឹង $(p-1)^2$ សម្រួល ឲ្យ $(p-1)^2 = 0$ (រឺ p = 1) គេបាន៖

$$(p-1)^2[\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-1}]$$

$$\frac{1}{p} = \frac{(p-1)^2 A}{p} + \frac{B}{} + \frac{(p-1)^2 C}{p-1} \Rightarrow 1 = 0 + B + 0 \qquad \boxed{B = 1} \quad \textbf{(7)}$$

c/ ដើម្បីរក C យើងជំនួស A និង B ក្នុង (5) ដោយ តម្លៃក្នុង (6) និង (7)

ហើយ ដើម្បីពហុធា២ ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ មេគុណទាំងពីរខាង ស្មើគ្នាទាំងអស់ គឺថា

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-1}$$

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-1} = \frac{(p-1)^2 + p + p(p-1)C}{p(p-1)^2}$$

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1-(1+C)p+(1+C)p^2}{p(p-1)^2} \Rightarrow 1+C = 0 \Rightarrow C = -1 \qquad \boxed{C = -1} \quad \textbf{(8)}$$

3/ ចំពោះ p > 0 បង្ហាញ ៖ $\frac{1}{1+e^{-ap}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nap}$

យើងតាង $u_n = (-1)^n e^{-nap}$ ដោយ n = 0, 1, 2, ……., n, ………

ដូច្នេះ $u_{n+1} = (-1)^{n+1} e^{-(n+1)ap}$

រឺ $u_{n+1} = (-1)(-1)^n e^{-nap-ap} = (-1)^n e^{-nap}(-1)e^{-ap} = (-e^{-ap})u_n$

ដោយតាង $r = -e^{-ap}$ យើងបាន $u_{n+1} = r\,u_n$ => $(u_n)_{n\in N}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $r = -e^{-ap}$ ។ ដើម្បីរកផលបូក S គេអាចប្រើរូបមន្ត

$S = \frac{lq-a}{q-1}$ ($q = -e^{-ap}$, $a = u_0$, $l = u_n$) , គេបាន៖

$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nap} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i e^{-iap}$

$$= \lim_{n\to+\infty}(1 - e^{-ap} + e^{-2ap} - e^{-3ap} + \ldots + (-1)^n e^{-nap})$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-1)^n e^{-nap}(-e^{-ap}) - 1}{-e^{-ap} - 1}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1} e^{-(n+1)ap} - 1}{-e^{-ap} - 1}\right] = \boxed{\frac{1}{1+e^{-ap}}}$$

4/ ដោយប្រើបំប្លែងឡាប្លាស រកអនុគមន៍ $t \to x(t)$ ចម្លើយរបស់ សមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

(1) លើ R^* ។

មុននឹងរកអនុគមន៍ដើម $t \to x(t)$ ខ្ញុំ សូមរំលឹកឡើងវិញនូវរូបមន្តខ្លះក្នុងបំប្លែងឡាប្លាស

លេខរៀង	អនុគមន៍ ដើម	បំប្លែង ឡាប្លាស	អត្ថាធិប្បាយ
1	$U(t)$	$\frac{1}{p}$	
2	$tU(t)$	$\frac{1}{p^2}$	
3	$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{p+a}$	ដោយ 5
4	$f(t-\tau)$	$F(p)e^{-\tau p}$	
5	$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$	
6	$tU(t)e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	ដោយ 2 និង 3
7	$te^{t}U(t)$	$\frac{1}{(p-1)^2}$	ដោយ 6

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = g(t) \quad \textbf{(1)}$$

ដោយតាង X ជាបំលែងឡាប្លាស នៃ x , (1)ឲ្យ ៖

p[p.X(p) - x(0⁺)] - x' (0⁺) -2 [pX(p) – x(0⁺)] + X(p) = G(p)

p^2X(p) - px(0⁺) – x'(0⁺) - 2p X(p) + 2 x(0⁺) + X(p) = G(p)

p^2X(p) - 2p X(p) + X(p) = G(p) (ដោយ ($x(0^+)$ = $x'(0^+)$ = 0)

(p^2 - 2p + 1) X(p) = G(p) => X(p) = $\frac{G(p)}{(p-1)^2}$

ដោយ G(p) = $\frac{1}{p}$ ($\frac{(1-e^{-ap})}{1-e^{-2ap}}$) ដូច្នេះ X(p) = $\frac{1}{p(p-1)^2} \times \frac{(1-e^{-ap})}{(1-e^{-2ap})}$

ដោយ $(1-e^{-2ap})$ = (1 - e^{-ap})(1 + e^{-ap}) ដូច្នេះ ៖

X(p) = $\frac{1}{p(p-1)^2} \times \frac{1}{1+e^{-ap}} = \frac{1}{p(p-1)^2} \times \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nap}$ (ដោយ 3/)

X(p) = $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{e^{-nap}}{p(p-1)^2}$

ដោយតាង $X_n(p) = (-1)^n \frac{e^{-nap}}{p(p-1)^2}$ **(9)** យើងរកអនុគមន៍ដើម x_n នៃបំលែងឡាប្លាស X_n

$(-1)^n \frac{e^{-nap}}{p(p-1)^2} = (-1)^n \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1}\right) \times e^{-nap}$ (ដោយគណនា A, B, C ខាងលើ)

$= (-1)^n \left[\frac{e^{-nap}}{p} + \frac{e^{-nap}}{(p-1)^2} - \frac{e^{-nap}}{p-1}\right]$

ដោយប្រើតារាងរូបមន្តខាងលើ ៖

$\frac{e^{-nap}}{p}$ មានអនុគមន៍ដើម $U(t-na)$

$\frac{e^{-nap}}{(p-1)^2}$ មានអនុគមន៍ដើម $(t-na)\,U(t-na)\,e^{(t-na)}$

$\frac{e^{-nap}}{p-1}$ មានអនុគមន៍ដើម $U(t-na)\,e^{(t-na)}$

ដូច្នេះ ដោយ **(9)** យើងបានចំពោះ ៖

$n = 0$, x_0 (t) = U(t) + t U(t)e^t - U(t)e^t = (1 + t e^t - e^t)U(t)

$n = 1$, x_1 (t) = - [U(t-a) + (t-a) U(t-a) $e^{(t-a)}$ - U(t-a)$e^{(t-a)}$]

= - (1 + (t-a) $e^{(t-a)}$ - $e^{(t-a)}$) U(t –a) = - [1+ (t –a – 1)$e^{(t-a)}$]U(t-a)

រួមសេចក្តីទៅ យើងអាចសរសេរ $x(t)$ ជារាង ៖

$x(t) = [1 + t\,e^t - e^t]\,U(t) - [1 + (t-a-1)e^{(t-a)}]U(t-a) + \ldots\ldots$

$+ (-1)^n [1 + (t-na-1)\,e^{(t-na)}]U(t-na) + \ldots\ldots$

គេអាចពិនិត្យបញ្ជាក់ថា x ជាអនុគមន៍ ថ្នាក់ C^1 ក្នុងចន្លោះ លើ R^+ ។