ជំពូក-III (Chapitre-III)

ការសាងសង់នូវ ចំនួនគត់

(Construction des nombres entiers)

1.*លំនាំដើម*

ដោយយើងបានទទួលយកនូវ សញ្ញាណនៃ សំនុំ ហើយ យើងនឹងឃើញថា ឲ្យអត្ថន័យ ដោយតឹងរ៉ឹងនូវ សញ្ញាណនៃ ចំនួន ។ នោះយើងគ្រាន់តែបកប្រែមកជាពាក្យ គណិតសាស្ត្រ របៀបរាប់ដែលបានប្រើមកតាំងពីបូរាណកាល ។

ជំរឿន វត្ថុទាំងឡាយនៅក្នុង សំនុំ ឬ រាប់ចំនួនវត្ថុ (ដែលមាននៅក្នុងសំនុំ) គឺ យកវត្ថុទាំងនោះ ទៅ ផ្គូផ្គង ជាមួយនឹងសំនុំ គំរូមួយ ដែលមានធាតុជា ពាក្យ (mot) *ឬ ជា សញ្ញា* (signe) *។ ដូចជាកូនក្មេងដែលរៀនរាប់ជាដំបូង គឺ យកម្រាមដៃ ទៅ ផ្គូ នឹងពាក្យ* « *មួយ ពីរ បី បួន ប្រាំ* » *(ពីព្រោះម្រាមដៃមានតែប្រាំក្នុងដៃម្ខាង) ។ នៅពេលបោះឆ្នោតក្នុងគណៈកម្មាធិការណាមួយ ដល់ពេលរាប់សន្លឹកឆ្នោតដែល បេក្ខជនម្នាក់ៗបាន គេគូស សញ្ញា ជើងក្អែក ១ កាលណាបេក្ខជននោះបាន ១សម្លេង ឬ មួយគេប្រើ ម៉ាស៊ីន* (machine) *ដើម្បីបញ្ចូល សញ្ញានោះ ចំពោះការបោះឆ្នោតធំៗ។*

របៀបធ្វើយ៉ាងនេះ គឺ ការផ្គូ សមនុំ ពីរ ។ ម្ខាងជា សមនុំ នៃវត្ថុ ហើយ ម្ខាងទៀត គឺជា សមនុំ នៃ ពាក្យ ឬ នៃសញ្ញា ។ ហើយ ការអនុវត្តិន៍ រវាងសំនុំទាំងពីរនេះ គឺការអនុវត្តន៍ ប៊ីសេចទីវ (application bijective) *។ ហើយយើង សន្មតថា សមនុំទាំងពីរនេះ មាន ចំនួនធាតុ ស្មើគ្នា ។ តើអ្វីទៅ ដែលហៅថា* **ចំនួន ?**

ចំនួន មិនអាចកំនត់ក្រៅពី កម្មសិទ្ធរួមជាមួយគ្នា នៃសំនុំទាំងឡាយ ដែល ប៊ីសេចទីវ នឹងសំនុំគំរូ ។ ដូចជាពណ៌ដែរ ចំនួនគឺជាពាក្យ អរូបី ដែលសំដៅ ថ្នាក់សមមូល

ទាំងឡាយ (des classes d'équivalence) ដោយគ្រាន់តែ ថែងថា សំនុំ ពីរ សមមូលនឹងគ្នា កាលណា សំនុំទាំងពីរនោះ មាន **ចំនួនធាតុស្មើគ្នា** ៖

« A $\boldsymbol{R}$ B <=> A និង B មាន ចំនួនធាតុស្មើគ្នា »

នៅពេលនោះយើងបាន សញ្ញាណ នៃ ចំនួន មានទំរង់ ជាទូទៅជាទីបំផុត គឺថា មិនជាប់ទាក់ទងនឹង វត្ថុ ដែលនៅក្នុងសំនុំ ។ ឧទាហរណ៍ ដូចជាថា រថយន្ត ១០០ ឬ ទោចក្រយាន ១០០ ចំនួន គឺ ១០០ ដដែល ។ ហើយនៅក្នុង ឧទាហរណ៍នេះ សំនុំ A គឺ ពេងដាក់ឡាន និង សំនុំ B គឺពេងដាក់ កង់។ បើនិយាយពី វត្ថុ សំនុំ A និង សំនុំ B ខុសគ្នា ពីព្រោះ A ដាក់ឡាន ហើយ B ដាក់កង់ ។ តែបើ និយាយពី ចំនួន វិញ សំនុំ A និង សំនុំ B សមមូលនឹងគ្នា ពីព្រោះ សំនុំទាំងពីរ មានចំនួនធាតុស្មើគ្នា គឺ ១០០ ។ យើងនឹងឃើញ នៅខាងមុខ តើ ចំនួន ដែលយើងធ្លាប់ប្រើរួចមកហើយ គឺ ១ ២ ៣ ៤.......ដែលគេហៅថា ចំនួន ប្រក្រតី « **បកតិសំខ្យា** » (les nombres cardinaux usuels) មានព្រំដែន នឹងមានលក្ខណៈ ដូចម្តេច ។

ម្យ៉ាងទៀត ការមាន ទំនាក់ទំនងលំដាប់ (relation d'ordre) នៅលើចំនួនប្រក្រតី អាចឲ្យបញ្ចូលសញ្ញាណ នៃ ចំនួនប្រាប់ ជាថ្នាក់ ជាជាន់ ថា ទី១ ទី២ ទី៣ .... ដែលគេហៅថា « **បូរណសំខ្យា** » (nombre ordinal) ។ ដល់បន្ទាប់មក យើងនៅខ្វះតែ សំនុំ សញ្ញា ដែលអាចឲ្យយើង សរសេរនូវចំនួនប្រក្រតី មានព្រំដែន បាន (permettant d'écrire tous les cardinaux finis) ដែលគេ ហៅថា « **ប្រព័ន្ធសរសេរចំនួន** » (système de numération)

2. បកតិសំខ្យា (ចំនួនប្រក្រតី) (Nombres cardinaux) [1]

[1] សូមបញ្ជាក់ថា ការសិក្សាឲ្យបានទូលំទូលាយនូវ បកតិសំខ្យា ត្រូវមានការតឹងរ៉ឹងប្រាកដប្រជាយ៉ាងខ្លាំងបំផុត។ នៅទីនេះ យើងសិក្សាត្រឹមតែលើសំនុំ ដែលមានចំនួនធាតុមានព្រំដែន។ ពីព្រោះថា

<u>និយមន័យ-I</u>

ថា សំនុំ B « អេគីប៉ូតង់ (équipotent) » នឹងសំនុំ A កាលណាមាន ប៊ីសេចស្យុង ពី A ទៅ B ។

<u>*ការស្នើ* (III,2,1)</u>

ទំនាក់ទំនង $\mathcal{E}$: « B អេគីប៉ូតង់ (équipotent) នឹង A » ជា រឺឡាស្យុងសមមូល រវាង សំនុំ ។

ពីព្រោះថា[2] ៖

1/ « A *អេគីប៉ូតង់* (équipotent) *នឹង* A » ⇔ *កាលណាមាន ការអនុវត្តន៍ ប៊ីសេចទីវ មួយ ពី* A *ទៅ* A ។

ដោយការអនុវត្តន៍ យកជាតុដដែល (application identique) *ពី* A *ទៅ* A *ជា ការអនុវត្តន៍ ប៊ីសេចទីវ ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង* $\mathcal{E}$ *រេផ្លិចស៊ីវ ។*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longrightarrow & x \end{array}$$

2/ *បើ* f *ប៊ីសេចទីវ ពី* A *ទៅ* B *ដូច្នេះ អនុវត្តន៍ ច្រាស* f^{-1} *ក៏ ប៊ីសេចទីវ ពី* B *ទៅ* A *ដែរ ។ ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង* $\mathcal{E}$ *ឆ្លុះ។*

3/ *បើ* f *ប៊ីសេចទីវ ពី* A *ទៅ* B *ហើយ បើ* g *ប៊ីសេចទីវ ពី* B *ទៅ* C

ចំពោះសំនុំដែលមានធាតុច្រើនរហូតដល់ អនន្ត គ្មានទីបញ្ចប់ នោះអាចនាំឲ្យយើងយល់ច្រឡំៗឧបមាដូចជា យើងយល់ថា បន្ទាត់ (la droite) *និង ប្លង់* (le plan) *មិនអាច អេគីប៉ូតង់* (équipotent) *នឹងគ្នាបាន ។ តែតាមការពិត វាមាន ប៊ីសេចស្យុង ពី មួយ ទៅ មួយ បាន ។*

[2] *ខ្ញុំសុំអនុញ្ញាតប្រើពាក្យ « ទំនាក់ទំនង » និង « រឺឡាស្យុង » ពាក្យទាំងពីរនេះអាចជំនួសគ្នាបាន ។*

ដូច្នេះ $g \circ f$ ប៊ីសេចទីវ ពី A ទៅ C :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)] = (g \circ f)(x)$$ ។

ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង $\mathcal{E}$ ត្រង់ស៊ីទីវ ។

ដោយ 1/ 2/ និង 3/ យើងអាចសន្និដ្ឋានថា៖ ទំនាក់ទំនង $\mathcal{E}$ ជា រីឡាស្យុងសមមូល រវាង សំនុំ ។

<u>និយមន័យ-II[3]</u>

បកតិសំខ្យា នៃសំនុំ A គឺជា ថ្នាក់សមមូល (est la classe d'équivalence) មូឌុយឡូ $\mathcal{E}$ (modulo $\mathcal{E}$) ដែលមាន សំនុំ A នៅក្នុងនោះ ។

ទំនាក់ទំនង card(A) = card(B) ⇔ « B អេគីប៉ូតង់ (équipotent) នឹង A »។

<u>សង្កេត</u>

គេសរសេរ បកតិសំខ្យា ដោយ អក្សរកាត់ card មកពីពាក្យ cardinal ។ ដូច្នេះ card(A) គឺ បកតិសំខ្យានៃ សំនុំ A ។

បំពោះពាក្យ « **មូឌុយឡូ $\mathcal{E}$** » (modulo $\mathcal{E}$) មាន ន័យដូច តទៅនេះ ៖

$\mathcal{E}$ ជា រីឡាស្យុង សមមូល ហើយ កាលណា សំនុំ ពីរ សមមូលនឹងគ្នា ឧបមាថា A និង B សមមូលនឹងគ្នា នោះគេនិយាយថា « A និង B សមមូលនឹងគ្នា **មូឌុយឡូ $\mathcal{E}$** » ឬ ក៏ថា « A = B មូឌុយឡូ $\mathcal{E}$ » ជួនកាលដើម្បីឲ្យខ្លី គេសរសេរ : A = B [$\mathcal{E}$] ។

<u>ឧបមា មួយទៀត</u> A ជា សំនុំ មុម វេចទ័រយែល (ensemble des angles vectoriels) $(\overrightarrow{V1},\overrightarrow{V2})$ ហើយនៅក្នុង សំនុំ A គេ ឲ្យ រីឡាស្យុង $\mathcal{R}$ មួយកំនត់ដោយ ៖

---

[3] បើមិនថា « បកតិសំខ្យា » គេអាចថា « ចំនួនបកតិសំខ្យា » ឬ ក៏ថា « ស្វ័យគុណ » នៃសំនុំ A

« មុមពីរ α និង β សមមូលនឹង គ្នា កាលណា $\alpha - \beta$ ស្មើនឹង $k(2\pi)$ ដោយ k ជាចំនួន រឺឡាទីប »។

យើងអាចបង្ហាញថា រឺឡាស្យុង ($\mathcal{R}$) សមមូល ៖

1/ រឺឡាស្យុង ($\mathcal{R}$) រេផ្លិចស៊ីវ ពីព្រោះ

$\alpha \ \mathcal{R} \ \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \alpha = 0 \quad = 0\ (2\pi)$ ដូច្នេះ ពហុគុណនឹង 2π

2/ រឺឡាស្យុង ($\mathcal{R}$) ឆ្លុះ ពីព្រោះ

$\alpha \ \mathcal{R} \ \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta = k(2\pi) \Rightarrow \beta - \alpha = -k(2\pi) = k1(2\pi)$

ដោយ k ជាចំនួនរឺឡាទីប ដូច្នេះ k1 = - k ក៏ ជាចំនួនរឺឡាទីប ដែរ ។

$\beta - \alpha = k1(2\pi) \Rightarrow \beta \ \mathcal{R} \ \alpha$ ។

3/ រឺឡាស្យុង ($\mathcal{R}$) ត្រង់ស៊ីទីវ ពីព្រោះ

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \ \mathcal{R} \ \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta = k1(2\pi) \\ \beta \ \mathcal{R}\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \beta - \gamma = k2(2\pi) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha - \gamma = (k1 + k2)(2\pi) \\ \text{ឬ} \quad \alpha - \gamma = k(2\pi) \Rightarrow \alpha \ \mathcal{R} \gamma \ \text{។} \end{array}$$

ដូច្នេះ រឺឡាស្យុង ($\mathcal{R}$) ជា រឺឡាស្យុង សមមូល ។ នៅវិទ្យាល័យ យើងធ្លាប់ឃើញ គេ សរសេរជា មូឌុឡូ 2π ចំពោះ រឺឡាស្យុង ($\mathcal{R}$) នេះ។

បើ មុម វ៉ិចទ័រយែល α និង β ស្មើគ្នា នោះគេសេសេរ $\alpha = \beta\ [2\pi]$ នេះបានន័យ ថា $\alpha = \beta + 2k\pi$ ។

តែ បើសិនជាក្នុងប្រធានបទ គេបានបញ្ជាក់ថា $0 \leq \alpha < 2\pi$ និង $0 \leq \beta < 2\pi$ នៅពេលនោះយើងត្រូវ យក k = 0 ពីព្រោះថា k = 1 ឲ្យ $\alpha = \beta + 2\pi$ ដូច្នេះ $\alpha > 2\pi$ ។

<u>ឥឡូវយើងត្រឡប់មក និយមន័យ-II នេះវិញ</u> ៖

<u>ឧទាហរណ៍</u> : បកតិសំខ្យា 5 ជា កម្មសិទ្ធរួម របស់សំនុំទាំងអស់ ដែលអាច ផ្គូ ជាប៊ីសេចទីវ ជាមួយនឹង ម្រាមដៃ 5 នៃដៃខាងឆ្វេង ឬ ដៃខាងស្តាំ ។

ករណីពិសេស :   *បកតិសំខ្យា នៃសំនុំទទេ* (∅) *ហៅថា សូន្យ* (zéro) *ហើយ ហើយចាត់តាំងដោយ* 0។ *ម្យ៉ាងទៀត សំនុំទាំងអស់ដែលមាន ធាតុតែ មួយ នោះ មាន បកតិសំខ្យាដូចគ្នា ហៅថា* « *ចំនួន មួយ* » *ហើយ ចាត់តាំង ដោយ* 1 ។ *ដោយគ្មានប៊ីសេចទីវ រវាង សំនុំទទេ នឹង សំនុំ មិនទទេ   នោះគេបាន* : $0 \neq 1$ ។

សង្កេត

យើងអាចចង់និយាយថា « *សំនុំ នៃ បកតិសំខ្យា* » ។ *តាមពិត បកតិសំខ្យា មិនអាច រួមបានជា សំនុំ នោះទេ ។ នេះជា ឧទាហរណ៍ មួយ នៃ* « *រឺឡាស្យុង មិនប្រមូលផ្តុំ* » (un nouvel exemple de relation non collectivisante) ។ *បើយល់ព្រមថា មាន* « *សំនុំ នៃ បកតិសំខ្យា* » *នោះនឹងនាំឲ្យមានការផ្ទុយ* (contradiction) *ដូចគ្នា នឹងការផ្ទុយដែលថាមាន* « *សំនុំ នៃ គ្រប់សំនុំទាំងអស់* » (l'existence de l'ensemble de tous les ensembles) ។ *នេះគឺចង់និយាយថា* « ***សំនុំ នៃ គ្រប់សំនុំទាំងអស់*** » *មិនមានទេ ពីព្រោះ បកតិសំខ្យា ជាសំនុំរួចទៅហើយ ហើយ បកតិសំខ្យា អាចមានទៅដល់ អនន្ត តែយើងរៀនត្រឹមតែ បកតិសំខ្យា មានព្រំដែនទេ ។*

3. *វិធីគណនាលើចំនួនបកតិសំខ្យា* (opérations sur les cardinaux)

វិធីបូក

យើងត្រូវកំណត់ នូវផលបូក នៃ ពីរបកតិសំខ្យា កាលណា A *និង* B *ជា សំនុំ ដាច់ពីគ្នា នោះយើងបាន* :

$$\boldsymbol{card}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{card}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{card}(\boldsymbol{B})$$

កាលណាសំនុំពីរដាច់ពីគ្នា បកតិសំខ្យា នៃ $(A \cup B)$ ***ស្មើ នឹង ផលបូក នៃបកតិសំខ្យានៃសំនុំ នីមួយៗ ។***

ចំណោទ នៅពេលនេះ គឺ កាលណា សំនុំ A និងសំនុំ B ជាន់គ្នា គឺថា $(A \cap B) \neq \emptyset$

នៅពេលនោះ $card(A \cup B) \neq card(A) + card(B)$ ។

ដូច្នេះយើងពុំអាចថា ផលបូក របស់ $card(A) + card(B)$ គឺ $card(A \cup B)$ គ្រប់តែពេល នោះទេ ។ ដើម្បីបំរែរពីការលំបាកនេះ យើងត្រូវត្រឡប់មក ករណីដែល សំនុំពីរ ដាច់ពីគ្នា ៖ កាលណា គេឲ្យសំនុំពីរ A និង B យើងបង្កើតពីនោះ នូវសំនុំ A’ និង B’ ដោយ [A’ អេគីប៉ូតង់ (équipotent) នឹង A] និង [B’ អេគីប៉ូតង់ (équipotent) នឹង B] ហើយ សំនុំទាំងពីរ A' និង B' ដាច់ពីគ្នា ។ របៀបបង្កើត A' និង B' ដោយប្រើសំនុំ A និង B មានដូចតទៅនេះ ៖

យើងយកវត្ថុពីរ a និង b ផ្សេងគ្នា (ឧទាហរណ៍ដូច 0 និង 1) ហើយយើងកំណត់

A' គឺ សំនុំ នៃ គូ (x,a) $[x \in A]$

និង B' គឺ សំនុំ នៃ គូ (y,b) $[y \in B]$ ។

ដោយ x ជា អថេរជាតុ នៃ A[4] ដូច្នេះ $card(A') = card(A)$ ហើយដោយ ជាតុ របស់ A មិនដូចគ្នានឹងជាតុរបស់ A' ដូច្នេះ សំនុំ A និង សំនុំ A' ដាច់ពីគ្នា ពីព្រោះឥតមាន ជាតុរួមគ្នា ។ ចំពោះ B និង B' ក៏សន្និដ្ឋានដូចគ្នាដែរ គឺថា $card(B') = card(B)$ ហើយ B និង B' ជាសំនុំដាច់ពីគ្នា ។ ម្យ៉ាងទៀត យើងឃើញថា A' និង B' ជាសំនុំដាច់ពីគ្នា ពីព្រោះគ្មានជាតុដូចគ្នា មកពី a និង b ផ្សេងគ្នា។ ម្យ៉ាងទៀត បកតិសំខ្យា នៃ $A' \cup B'$ ជាប់ទាក់ទងតែនឹងបកតិសំខ្យា នៃ A និងបកតិសំខ្យា នៃ B ។

---

[4] x ជា អថេរ របស់ A ដូច្នេះ x អាចយកជាតុទាំងអស់ដែលមាននៅក្នុង A ។ឧបមា A = { a1, a2, a3, a4, a5, a6} នៅពេលនោះ x = a1 ឬ x = a2 ឬ x = a3 ឬ x = a4 ឬ x = a5 ឬ x = a6 ។ ដូច្នេះ card(A) = 6 ។ ចំពោះ A’ វិញ ដែលមានជាតុ ជា គូ (x,a) នោះ A’ ទៅជា A’ = { (a1,a), (a2,a), (a3,a), (a4,a), (a5,a), (a6,a) } ។ យើងឃើញថា card(A’) = 6 ដូច card(A) ដែរ តែ ជាតុ របស់ A’ មិនដូចជាតុររបស់ A ទេ។ ដូច្នេះ $A \cap A' = \emptyset$ ។

ដូច្នេះ យើងអាច ចាត់តាំង ដោយច្បាស់ថា ៖

$$card(A) + card(B) = card(A' \cup B')$$ ។

និយមន័យ-I

ផលបូក នៃ បកតិសំខ្យារបស់សំនុំ A និង សំនុំ B ជា បកតិសំខ្យា នៃប្រជុំសំនុំពីរដាច់គ្នា ដែល អេគីប៉ូតង់ (équipotent) រៀងៗខ្លួន នឹង A ហើយនឹង B ។ បើ $A \cap B = \emptyset$ គេបាន $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$ ។

ការស្នើ (III,3,1)

ការបូក បកតិសំខ្យា ជា ការធ្វើលេខមួយ ដែលមានលក្ខណៈ ត្រលប់ និង ផ្តុំ ហើយមាន សូន្យ ជា ធាតុនប៉ុសកលិង្គ[5] ។

ទំនាក់ទំនង $A \cup B = B \cup A$ ត្រូវគ្រប់ សំនុំ A, B ណាក៏ដោយនោះ បណ្តាលឲ្យបាន ទំនាក់ទំនង ៖

$$card(A) + card(B) = card(B) + card(A)$$

ក៏ដូចគ្នាដែរ ទំនាក់ទំនង $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ បណ្តាលឲ្យបាន ៖

$$[card(A) + card(B)] + card(C) = card(A) + [card(B) + card(C)]$$

ដើម្បីធ្វើលេខខាងលើនេះ យើងអាចត្រឡប់មកករណី ដែល សំនុំទាំង ៣ នេះ ដាច់ពីគ្នា ម្តង២ ម្តង២ ។ លើកទី១ យើង ត្រឡប់មកករណី ដែល A និង B ដាច់ពីគ្នា ។ ដល់បន្ទាប់មក យើង ជំនួស C ដោយ សំនុំអេគីប៉ូតង់ C' ដាច់ពី សំនុំ $(A \cup B)$ ។

ចំពោះ 0 ជា ធាតុនប៉ុសកលិង្គ នោះមកពី ៖

$$card(A) + 0 = 0 + card(A) = card(A \cup \emptyset) = card(A)$$ ។

---

[5] យើងប្រើភាសារបស់ទ្រឹស្តី សំនុំ នៅទីនេះ ថ្វីបើ បកតិសំខ្យាទាំងអស់មិននៅក្នុងសំនុំ ។

រួមសេចក្ដីទៅ កម្មសិទ្ធិ នៃវិធីបូកនូវចំនួនបកតិសំខ្យា ចេញមកពី កម្មសិទ្ធិ នៃការប្រជុំសំនុំ ។

ការសង្កេត

យើងអាចឲ្យនិយមន័យ នៃចំនួន 2 ដោយ $2 = 1 + 1$,

ចំនួន 3 ដោយ $3 = 2 + 1 = 1 + 2$, ហើយចេះតែ តៗ ទៅ ។ យើងនឹងត្រឡប់មកចំនួនទាំងនេះ បន្តិចទៀត ។

វិធីគុណ

វិធីគុណ នៃ បកតិសំខ្យា មិនចោទជាបញ្ហា ដូច វិធីបូកទេ ។ ពីព្រោះថា ចំពោះសំនុំ A' ណាក៏ដោយ អេគីប៉ូតង់នឹង A និង ចំពោះសំនុំ B' ណាក៏ដោយ អេគីប៉ូតង់នឹង B ផលគុណ $A \times B$ អេគីប៉ូតង់នឹង $A' \times B'$ ។ ពីព្រោះថា បើ f ប៊ីសេចទីវ ពី A ទៅ A' ហើយ បើ g ប៊ីសេចទីវ ពី B ទៅ B' នោះ $h : (x,y) \to [f(x), g(y)]$ ជា ប៊ីសេចទីវ ពី $A \times B$ ទៅ $A' \times B'$ ។ ដូច្នេះ បកតិសំខ្យា $A \times B$ ជាប់ទាក់ទង តែនឹង បកតិសំខ្យា នៃសំនុំ A និង បកតិសំខ្យានៃសំនុំ B ។ យើងអាច តាំងថា ៖

$$\boldsymbol{card(A) \times card(B) = card\,(A \times B)}$$

និយមន័យ-II

ផលគុណ នៃ [បកតិសំខ្យារបស់ សំនុំទី១] គុណនឹង [បកតិសំខ្យារបស់ សំនុំទី២] ជា បកតិសំខ្យា នៃ [សំនុំទី១ គុណ នឹងសំនុំទី២] ។

ការស្នើ (III,3,2)

ការគុណ បកតិសំខ្យា ជា ការធ្វើលេខមួយ ដែលមានលក្ខណៈ ត្រលប់ និង ផ្តុំ ហើយមាន ចំនួន « មួយ » ជា ធាតុនប៉ុសកលិង្គ ។ លើសពីនេះទៅទៀត ការធ្វើលេខនេះ មានលក្ខណៈបំបែកធៀបនឹងការបូក ។

1/ដើម្បី ពន្យល់ លក្ខណៈត្រលប់ នៃការគុណ យើងត្រូវកុំនិយាយថា ការគុណនៃសំនុំ មានលក្ខណៈត្រលប់ ពីព្រោះមិនត្រូវទេ។ តែយើងអាចសង្កេតថា មាន ប៊ីសេចស្យុង រវាង $A \times B$ និង $B \times A$ ៖ យើងគ្រាន់តែ ផ្គូ ធាតុ (x, y) របស់ $A \times B$ ទៅនឹង ធាតុ (y, x) របស់ $B \times A$ គឺថា យើង យក ការអនុវត្តន៍ f ដោយ ៖

$f : A \times B \longrightarrow B \times A$

$(x, y) \xrightarrow{f} (y, x) : f(x, y) = (y, x)$

យើងឃើញថា f ប៊ីសេចទីវ ពីព្រោះ មួយគូ (x, y) ផ្គូបានតែគូ (y, x) តែមួយគត់។ ដូចជា គូ $(0,1)$ ផ្គូដោយ f បានជាគូ $(1,0)$ ជាដើម ។

ដោយ ប៊ីសេចទីវនេះហើយ បានជា $A \times B$ និង $B \times A$ មាន ចំនួន ធាតុស្មើគ្នា ថ្វីបើ ធាតុ នៃសំនុំទាំងពីរនេះខុសគ្នាក៏ដោយ ។ ឧបមាដូចមានល្អី ២ ល្អីទី១ មានក្រូច 10 ផ្លែ ហើយល្អីទី ២ មាន ល្មុត10 ផ្លែដែរ ។ ដូច្នេះ ចំនួនរបស់នៅក្នុងល្អី ទាំងពីរនេះ ស្មើគ្នា ថ្វីបើ ល្អីមួយមានធាតុជាផ្លែក្រូច ហើយល្អីមួយទៀតមានធាតុជាផ្លែល្មុត ។

ដូច្នេះយើងបាន៖

$$card(A) \times card(B) = card(B) \times card(A)$$

2/ ចំពោះលក្ខណៈ ផ្តុំ គេបង្ហាញថា មាន ប៊ីសេចស្យុង ពី $(A \times B) \times C$ ទៅលើ $A \times (B \times C)$ នោះដោយគ្រាន់តែ ផ្តុំ គូ $[(x, y), z]$ ទៅនឹង គូ $[x, (y, z)]$ ។

3/ ចំពោះ 1 ជាធាតុ នប៉ុសកលិង្គ ៖

បើ B ជាសំនុំ មានធាតុតែមួយ b នោះ ការអនុវត្តន៍ x -----→ (x, b) គឺ ប៊ីសេចទីវ ពី A ទៅ $A \times B$។ ដូច្នេះ $card(A) = card(A \times B) = card(A) \times card(B) = card(A) \times 1$ ពីព្រោះ B មានធាតុតែមួយ បណ្តាលឲ្យ $card(B) = 1$ ។

ដូច្នេះ យើងបាន ៖ $card(A) \times 1 = card(A)$

4/ ចំពោះបំបែក ៖ តាមទ្រឹស្តីសំនុំ ចំពោះសំនុំ ជាទូទៅ A, B, C គេមាន ទំនាក់ទំនង៖ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ ដែលគេនិយាយថា ៖ ការគុណ នៃសំនុំ មាន

លក្ខណៈបំបែក នូវ ការប្រជុំនៃសំនុំ ។

ដូច្នេះ ដោយសន្មតថា សំនុំ A និង B ដាច់ពីគ្នា នោះគេបាន ៖

$$[card(A) + card(B)] \times card(C) = card(A) \times card(C) + card(B) \times card(C)$$

ដូច្នេះយើងបាន ការបំបែក លេខគុណ ធៀបទៅនឹង លេខបូក (la distributivité de la multiplication par rapport à l’addition)៕

<u>កម្មសិទ្ធិ ឯទៀតៗ នៃចំនួន សូន្យ និង មួយ</u>

តទៅទៀត យើងត្រូវការប្រើ ការស្នើទាំងឡាយ ដូចតទៅនេះ ៖

<u>ការស្នើ (III, 3, 3)</u>

***a* និង *b* ជា បកតិសំខ្យា។ ទំនាក់ទំនង $a + b = 0$ ស្មើនឹង**

($a = 0$ និង $b = 0$) ។

ការស្នើនេះចេញមកពី ការប្រជុំ នៃសំនុំពីរ ទៅជាទទេបាន ($\emptyset$)

នោះទាល់តែសំនុំទាំងពីរនោះ ទទេ ។

<u>ការស្នើ (III, 3, 4)</u>

***a* និង *b* ជា បកតិសំខ្យា។ ទំនាក់ទំនង $a \times b = 0$ ស្មើនឹង**

($a = 0$ ឬ $b = 0$) ។

ការស្នើនេះចេញមកពី ការគុណ នៃសំនុំពីរ ទៅជាទទេបាន ($\emptyset$)

នោះទាល់តែ យ៉ាងហោចណាស់ សំនុំណាមួយ ទទេ ។

<u>ការស្នើ (III, 3, 5)</u>

***a* និង *b* ជា បកតិសំខ្យា។ ទំនាក់ទំនង $a + 1 = b + 1$ ផ្តល់ឲ្យ $a = b$ ។**

<u>ការបង្ហាញ</u>

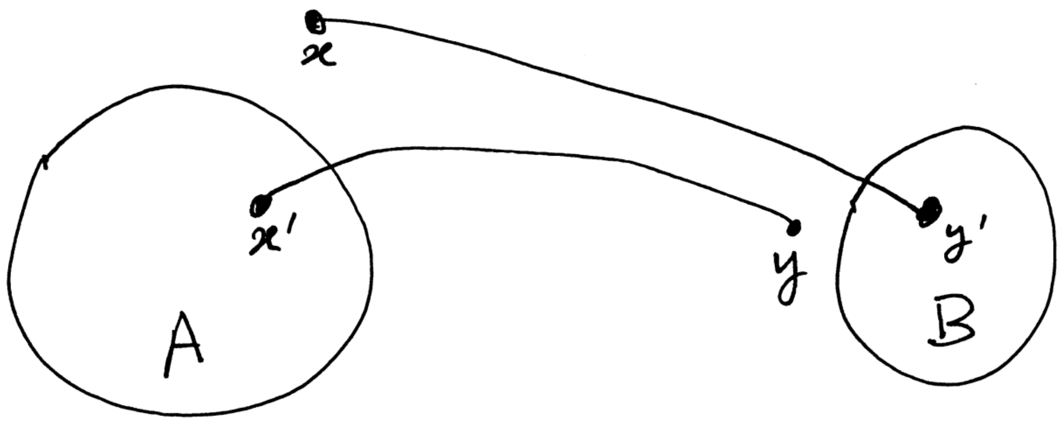
យើងតាំងដោយ $a = card(A)$ និង $b = card(B)$ ។ នៅពេលនោះ $a+1$ ជា បកតិសំខ្យា នៃសំនុំ A' បានមកដោយ បន្ថែម ទៅក្នុង A វត្ថុ x មួយដែលមិនទាន់មាន នៅក្នុង A ។ $b+1$ ជា បកតិសំខ្យា នៃសំនុំ B' បានមកដោយ បន្ថែម ទៅក្នុង B វត្ថុ y មួយ ដែលមិនទាន់មាននៅក្នុង B ។

បើ $a+1 = b+1$ **នោះបានន័យថា មាន ប៊ីសេចស្យុង f មួយ ពី A' ទៅលើ B'** ។

1/ បើ $f(x) = y$, ការបន្តយ f ឲ្យចេញតែពីសំនុំ A ធ្វើឲ្យ f ប៊ីសេចទីវពី A ទៅ B ។

ដូច្នេះ $card(A) = card(B)$ => $\boldsymbol{a = b}$

2/ បើ $f(x) \neq y$ => $f(x)$ នៅក្នុង សំនុំ B ដូច្នេះ មាន $y' \in B$ ដែលឲ្យ $y' = f(x)$ ហើយ មាន $x' \in A$ ដែលឲ្យ $f^{-1}(y) = x'$ ។



យើងតាងដោយ A'' សំនុំ បានដោយ សំនុំ A ដក ធាតុ x' ចេញ និង B'' សំនុំ បាន ដោយ សំនុំ B ដកធាតុ y' ចេញ ។ នៅពេលនោះ ការបន្តយ f ឲ្យចេញតែពីសំនុំ A'' ធ្វើ ឲ្យ f ប៊ីសេចទីវពី A'' ទៅ B'' ។ ហើយ បើគេបន្ថែម $f(x') = y'$ នោះ f ប៊ីសេចទីវពី A ទៅ B ។ ដូច្នេះ $card(A) = card(B)$ => $\boldsymbol{a = b}$ ។

<u>**សង្កេត**</u>

យើងមិនចាំបាច់ តាំងថា $a = b$ បណ្តាលឲ្យ $a+1 = b+1$ នោះទេ ។ ពីព្រោះយើង អាចកំណត់ ផលបូកនៃ បកតិសំខ្យា ទាំងពីរ ដោយមិនជាប់ទាក់ទងនឹងសំនុំ ដែលជា

ដំណាងរបស់វា ។ ចំពោះ $a+1=b+1 \Rightarrow a=b$ មិនមែនដោយផលបូកទេ ពីព្រោះ យើង ដក 1 ចេញ ទាំង សង្ខាង ។

4. *បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន* (les cardinaux finis)

និយមន័យ-I

បកតិសំខ្យា a មួយ មានព្រំដែន (គឺមិនទៅដល់អនន្ត) កាលណា a បំពេញ លក្ខណៈ $a+1 \neq a$ ហើយ សំនុំ មួយ មានព្រំដែន ឬ មិនមានព្រំដែន[6] ទៅតាម បកតិសំខ្យារបស់សំនុំនោះ មានព្រំដែន ឬ មិនមានព្រំដែន ។ បកតិសំខ្យា មានព្រំដែន ហៅថា ចំនួនគត់ធម្មតា **(nombres entiers naturels) ។**

និយមន័យនេះ ជាដំបូង គួរឲ្យភ្ញាក់ ត្រូវនឹងគំនិតដែលថា វត្ថុតែមួយ គឺមើលមិន ឃើញទេ នៅចំពោះមុខវត្ថុដ៏ច្រើនឥតគណនា ។

ការស្មើ (III, 4, 1)

ទំនាក់ទំនង "a ជា បកតិសំខ្យាមួយ មានព្រំដែន" មានន័យស្មើនឹងថា "$a+1$ ជាបកតិសំខ្យាមួយ មានព្រំដែន" ។

ដោយយក ***ការស្មើ*** **(III, 3, 5)** *មកប្រើ* $a = b \Leftrightarrow a+1 = b+1$

ដោយ យក $b = a+1$ *យើងបាន* ៖ $a = a+1 \Leftrightarrow a+1 = (a+1)+1$ ។

ឧទាហរណ៍ នៃ បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន

---

[6] *ដោយការសិក្សាតទៅនេះ គេថា សំនុំមួយមានព្រំដែន កាលណា សំនុំនោះ ពុំមាន ប៊ីសេចស្យុង លើផ្នែកណាមួយ របស់ខ្លួន ក្រៅតែពីខ្លួនឯងតែម្តង ។*

ទំនាក់ទំនង $0 \neq 1$ ដែលបានពីមុននោះ បង្ហាញថា សូន្យ ជា បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន ក៏ដូច បកតិសំខ្យា 1, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, …. ដូច្នេះ ចំពោះ បកតិសំខ្យាទាំងអស់ ដែល បានមក [អំពី 0 បូកនឹង 1] ហើយ [បូកនឹង 1 ម្តងទៀត] ដដែលៗ តមក ។ យើង ទទួលយក ជា ស្វ័យស័ត្យ (nous admettrons comme axiome) ថា បកតិសំខ្យា មានព្រំដែន អាចបានដោយ របៀបនេះ ។ តែ ស្វ័យស័ត្យនេះ នឹងថ្លែង ឲ្យបានច្បាស់ និង អាចប្រើប្រាសបាន ដូចតទៅនេះ ៖

ស្វ័យស័ត្យ នៃ អនន្ត (Axiome de l'INFINI).

បកតិសំខ្យាមានព្រំដែនទាំងអស់ ផ្សំបានជាសំនុំមួយ ។

ស្វ័យស័ត្យថ្មីនេះ អាចឲ្យយើងយក ពាក្យក្នុងទ្រឹស្តីសំនុំ មកប្រើបានចំពោះ **ចំនួនគតធម្មតា** ។ ជាពិសេស អាចឲ្យយើងថ្លែង គោលការណ៍ រេគារ៉ង់ (principe de récurrence) ដោយច្បាស់លាស់ដូចខាងក្រោមនេះ[7] ៖

ការថ្លែងមួយទៀត របស់គោលការណ៍ រេគារ៉ង់

បើ N ជាសំនុំនៃចំនួនគត់ធម្មតា ហើយបើ A ជាផ្នែកមួយនៃ N ។

បើ $0 \in A$ និង $a \in A \Rightarrow a + 1 \in A$ នៅពេលនោះ $A = N$ ។

ការកត់ត្រា (Notations)

នៅទីនេះ យើងសន្មត ថា សូន្យ នៅក្នុងសំនុំ នៃចំនួនគត់ធម្មតា ហើយយើង តាំងដោយ $\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2 \ldots\ldots, n \ldots\}$ សំនុំនោះ ។ តែនៅក្នុងសំនួរខ្លះ គេត្រូវយកតែ ចំនួនគត់ធម្មតា ខុសពី សូន្យ ហើយគេតាំងដោយ $\mathbf{N}^*$ សំនុំនោះ។ យើង នឹងតំកល់

[7] គេច្លង ពី ការថ្លែងមួយ ទៅការថ្លែងមួយទៀត ដោយ តាំង A ជាសំនុំនៃបកតិសំខ្យាមានព្រំដែន ដែលបំពេញលក្ខណ្ឌ របស់ទំនាក់ទំនង R ។

នូវកម្មសិទ្ធិ ជាលក្ខណៈនៃ ចំនួននៅក្នុងសំនុំ $\mathbf{N}^*$ នេះ ដែលត្រូវការ ជាញយនៅខាងមុខ (ជាពិសេស កាលណាយើងសិក្សា ពី រឺឡាស្យុងលំដាប់ នៅលើ N) ។

ការស្នើ (III, 4, 2)

ដើម្បី a ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន មិនសូន្យ នោះត្រូវតែ (il faut) និង គ្រាន់តែ (et il suffit) គេអាចរកបាននូវ បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន x មួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $a = x + 1$ ។

1/ *លក្ខណ្ឌត្រូវតែ* **(condition nécessaire)**

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន} \\ a = x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន មិនសូន្យ}$$

$a = x + 1 \Rightarrow a \neq 0$ ដោយ **ការស្នើ (III, 3, 3)**

2/ *លក្ខណ្ឌគ្រាន់តែ* (condition suffisante)

a ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន មិនសូន្យ => អាចរក x បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a = x + 1$ ។

យើងតាំងដោយ A សំនុំមិនទទេ ($A \neq \emptyset$) ដូច្នេះ A យ៉ាងហោចណាស់ មានធាតុ $\propto$ មួយដែរ ។ ដូច្នេះ យើងតាង $A = \{\propto\} \cup A'$ ។ សំនុំ A' អាចទទេ តែ A' មិនជាន់នឹង $\{\propto\}$ ទេ ។ ដូច្នេះ $card(A) = card[\{\propto\} \cup A'] = card(\{\propto\}) + card\,(A')$

ឬ $card(A) = 1 + card(A')$ => ដូច្នេះ $a = card(A)$ ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន មិនសូន្យ នោះគេមាន បកតិសំខ្យា $x = card(A')$ ដែលឲ្យ $a = 1 + x$ ។ ដូច្នេះ x មានព្រំដែន ដោយ **ការស្នើ (III, 4, 1)** ។

យើងអាច ធ្វើការដេញរកហេតុផល ដោយ ការប្រកែកនូវផល (raisonnement par absurde) គឺថា ឧបមា[8] $\forall x \in N,\ a \neq x+1$ ហើយដល់ទីបញ្ចប់ យើងត្រូវទៅដល់ការប្រកែកនៃហេតុ តែដោយហេតុគេឲ្យ ដូច្នេះយើងមិនអាចប្រកែកហេតុនោះបានទេ ។

ដូច្នេះ បើយើងថា $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{x}+\mathbf{1}$ តើវានឹងផ្តល់លទ្ធផលដូចម្តេច ?

យើងតាងដោយ A = N – {a} (1)

ដោយ a មិនសូន្យ ហើយ $0 \in N$ ដូច្នេះ ដោយ (1), $0 \in A$ ហើយ $\forall x \in N,\ x+1 \in A$ (ពីព្រោះ $x+1 \neq a$ ហើយ សំនុំ A និង N ខុសគ្នាតែធាតុ a មួយប៉ុណ្ណោះ) ។

ដូច្នេះ A ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង គោលការណ៍ រេគាំរ៉េ => $A = N$ ដែលខុស ពីព្រោះ (1) ។

<u>**អនុសាធ្យ (Corollaire)**</u>

ការអនុវត្តន៍ $x \longrightarrow x+1$ ជា ប៊ីសេចស្យុង ពី N ទៅ N^* ។

មុននឹងពន្យល់អនសាធ្យនេះ ខ្ញុំសូមធ្វើការសង្កេតដូចតទៅនេះ ៖

ដើម្បី បញ្ជាក់ថា ការអនុវត្តន៍ f ប៊ីសេចទីវ ត្រូវ f អាំងសេចទីវផង និង ស៊ៀសេចទីវផង ។

ចំពោះ **ការស្មើ** (III, 3, 5)_ $a+1 = b+1 \ \Rightarrow\ a = b$ មានន័យ ដូចជាថា

ការអនុវត្តន៍ $f:\ N \longrightarrow N$

$x \longrightarrow x+1$ អាំងសេចទីវដែរ ។

ពីព្រោះតាមនិយមន័យ អាំងសេចទីវ គេថា f អាំងសេចទីវដែរ ពី X ទៅ Y កាលណា [$x1 \neq x2 \Rightarrow f(x1) \neq f(x2)$] នេះក៏ដូចជាថា ដោយការប្រកែក

[8] ចូរចាំថា នៅក្នុង គណិតសាស្ត្រ ការប្រកែក របស់ $\exists x \in N$ គឺ $\forall x \in N$ ។
ហើយការប្រកែក របស់ = គឺ ≠ ។ $\exists x \in N$ មានន័យថា យ៉ាងហោចណាស់ មាន x មួយ នៅក្នុង N ។
ដូច្នេះ ចំពោះ $\exists x \in N$ ដែលឲ្យ $a = x+1$ ដោយប្រកែកទៅជា
$\forall x \in N$, គេត្រូវបាន $a \neq x+1$ ។

$\{non\,[f(x1) \neq f(x2)] \;\; => \; non[x1 \neq x2\,]\} \;\Leftrightarrow\; \{\,[f(x1) = \; f(x2)] => \;\; [x1 = x2\}]\,\}$ ។

ដោយការសង្កេតនេះ ការអនុវត្តន៍ $\boldsymbol{x} \;----\rightarrow\; \boldsymbol{x+1}$ អាំងសេចទីវ ពី N ទៅ N^*

ដោយប្រើ ការស្មើ (III, 3, 5) ។

ដោយប្រើ **ការស្មើ (III, 4,** 2) និងនិយមន័យ សឿសេចទីវ នោះយើងឃើញថា

ការអនុវត្តន៍ $x \;----\rightarrow\; x+1$ សៀសេចទីវ ពី N ទៅ N^* ដែរ ។ ពីព្រោះថា

តាម **ការស្មើ (III, 4,** 2) មានន័យថា ៖ $\forall a \in N^*$ គេមាន $x \in N$ ដែលឲ្យ $a = x+1$

$$f\;:\; N \;\;------\rightarrow\; N^*\,,\; f(x) = \; x \; + \; 1\,.$$

$$x------\;\; a \text{ ដែលឲ្យ } a = x+1 \text{ ។}$$

ដូច្នេះ ការអនុវត្តន៍ $x \;----\rightarrow\; x+1$ ប៊ីសេចទីវ ពី N ទៅ N^* ។៕

គំនិតរបស់ខ្ញុំ

នេះជាគំនិតរបស់ខ្ញុំទេ លោកអ្នកអាចលោតផ្នែកនេះ ទៅមេរៀននៅផ្នែកបន្ទាប់បាន ។

យើងមើលតាមនិយមន័យ ឃើញថា N មាន ធាតុ 0 ហើយ N^* ឥតមានធាតុ 0 ទេ ។

តែ ស្រាប់ តែមាន ប៊ីសេចស្យុង រវាង N និង N^* ។ នេះមកអំពី អ្វី ?

ថ្វីបើ N និង N^* ខុសគ្នាតែ ធាតុ 0 មួយប៉ុណ្ណោះ ក្រៅពីនោះមានធាតុដូចគ្នាទាំងអស់ ។

តែ សំនុំទាំងពីរនេះមិនធម្មតាទេ គេមានធាតុដ៏ច្រើនអនេក ពីព្រោះគេសន្មតថា

បើ $\boldsymbol{a}$ នៅក្នុងសំនុំ $\boldsymbol{N}$ នោះ $\boldsymbol{a+1}$ ក៏នៅក្នុងសំនុំ $\boldsymbol{N}$ ដែរ ។

បើយើងបែរ រឿងក្នុងជីវិតវិញ a បូកនឹង 1 មិនច្រើនទេ 1 នោះ ។ តែដល់បូក បន្ត 1 ហើយ 1ទៀត នោះអាចច្រើនរហូតដល់រាប់មិនអស់ ដូច សំនុំ N ដែលមានធាតុច្រើនអនេកអញ្ចឹង ។ ដូច្នេះ កុំមើលងាយ ពាក្យចាស់លោកថា « **តក់ៗ ពេញបំពង់** » (ដូចទឹកត្នោត) ។ ម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ N និង N^* ខុសគ្នាដោយធាតុ 0 មែនពិត តែដោយមានធាតុច្រើនអនេក នោះគេមើលមិនឃើញទេ ធាតុតែមួយនោះ ។ ដូចគេ ជាអ្នកមានប្រាក់ច្រើនរាប់លានរាប់កោដិ ហើយយើងមានតែ មួយពាន់ នោះគេមើលយើងមិន

យើញទេ កុំតូចចិត្តអី ខំតទៅទៀតទៅ ។ តែបើប្រៀបធៀបនឹងការចេះដឹងវិញ យើងចេះមែនពិត តែអាចមានគេចេះច្រើនជាងយើង ដូច្នេះយើងគប្បីដាក់ខ្លួនប្រសើរជាង ។ ហើយក៏មានសុភាសិតខ្មែរយើងមួយថា « **ងើយវាស្កក អោនវាដាក់គ្រាប់** » (នេះលោកប្រៀបធៀបទៅនឹងដើមស្រូវក្នុងស្រែ) ។

ខ្ញុំសូមជូន ឧទាហរណ៍ ចំពោះ ការអនុវត្តន៍ អាំងសេចទីវ និង សៀសេចទីវ ៖

ខ្ញុំតាំងដោយ A សំនុំនៃប្រជាជននៅក្នុងភូមិកំណើតខ្ញុំ ដែលមាន ក្មេងប្រុស ក្មេងស្រី កម្លោះ ក្រមុំ មនុស្សមានប្តីប្រពន្ធ ស្រីមេមាយ ប្រុសពោះមាយ ជាដើម។

នៅក្នុង A (ភូមិខ្ញុំ) នោះ ខ្ញុំតាងដោយ **X សំនុំ នៃប្តី** ហើយ **Y សំនុំនៃប្រពន្ធ**

ហើយ f ការអនុវត្តន៍ ពី X ទៅ Y ។ ដូច្នេះ $X \subset A$ ហើយ $Y \subset A$ ។

$$\begin{array}{ccc} X & ----f----\rightarrow & Y \\ x & --f--\rightarrow & y \end{array}$$

យើងសន្មត ថា ប្រុសម្នាក់ មានប្រពន្ធតែមួយ ហើយ ស្រីម្នាក់មានប្តីតែមួយ ហើយអ្នកទាំងពីរ រស់នៅជាមួយគ្នានៅក្នុងភូមិ A ។

<u>1/ f អាំងសេចទីវ បានន័យថា ៖</u>

$[\,x1 \neq x2 \quad => \quad f(x1) \neq f(x2)$ ឬ $y1 \neq y2\,] \Leftrightarrow$

[ប្តី ពីរ ផ្សេងគ្នា => ស្រីជាប្រពន្ធ ក៏ ផ្សេងគ្នាដែរ]

<u>2/ f សៀសេចទីវ បានន័យថា ៖</u>

$\forall y \in Y, \quad \exists\, x \in X$ ដែលឲ្យ $f(x) = y$ $\Leftrightarrow$ បើគេយក ប្រពន្ធណាក៏ដោយនៅក្នុងសំនុំ Y នោះគេអាចរកប្តីរបស់អ្នកនោះនៅក្នុងសំនុំ X បានជានិច្ច ។ (**ចប់**)

==

<u>ឥឡូវនេះ ខ្ញុំ ត្រឡប់មក មេរៀនយើងវិញ</u>

យើងឃើញថាមាន ប៊ីសេចស្យុង ពី N ទៅ N^* ។

ដូច្នេះ យើងអាចទាញ លទ្ធផល បានជា : $\boldsymbol{card(N) = card(N^*)}$

ហើយដោយម្យ៉ាងទៀត $card(N) = card(N^*) + 1$ នោះយើងអាចថ្លែងថា ៖

<u>ការស្នើ</u> (III, 4, 3)

***N* ជាសំនុំ អនន្ត** **(N est un ensemble infini.)**

ពីព្រោះ ៖ $card(N) = card(N^*) + 1$ ហើយដោយ : $\boldsymbol{card(N^*) = card(N)}$

ដូច្នេះ $card(N) = card(N) + 1$ ដែល មិនអាចមាន ចំពោះ $card(N)$ ជា បកតិសំខ្យា <u>មានព្រំដែន</u> ។ ដូច្នេះ ត្រូវតែ N ជាសំនុំអនន្ត ។

<u>**ការថ្លែងម្យ៉ាងទៀត ចំពោះស្វ័យសត្យនៃអនន្ត**</u> **(Autre énoncé de l'axiome de l'Infini)**

យើងទើបនឹងឃើញថា ស្វ័យសត្យនៃអនន្ត សន្មតនូវផលវិបាក ថាមាន សំនុំអនន្ត (l'existence d'un ensemble infini) ។ ប្រាស់មកវិញ យើងអាចពន្យល់ថា ដោយមាន សំនុំអនន្ត នោះបណ្ដាលឲ្យមាន ស្វ័យស័ត្យនៃអនន្ត ។ ដូច្នេះយើងអាចជំនួសការថ្លែង នូវ ស្វ័យស័ត្យនៃអនន្ត ដោយ ការថ្លែងសមមូលថា ៖ **« សំនុំអនន្តមាន »** (Il existe un ensemble infini) ។ ហើយមកពីនេះបានជាមានឈ្មោះដែលគេឲ្យថា ស្វ័យស័ត្យ « នៃ អនន្ត » ។

<u>បូក និង គុណ នៃបកតិសំខ្យាមានព្រំដែន</u>

យើងមើលទៅដូចជាសំដែរ ដោយថា បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន បូក នឹងគ្នា ឬ គុណនឹង គ្នា នោះបានជា បកតិសំខ្យាមានព្រំដែន ។ ដោយគោលការណ៍ រេគារ៉ង អាចឲ្យ យើងពន្យល់ការសំនេះ ដោយតឹងរ៉ឹងបាន ។

<u>ការស្នើ</u> (III, 4, 4)

ដើម្បីឲ្យ ផលបូក $a+b$ នៃ បកតិសំខ្យាពីរ a និង b មានព្រំដែន នោះ ត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ a និង b ទាំងពីរ មានព្រំដែន ។

<u>1/ *លក្ខណ្ឌត្រូវតែ* (condition nécessaire)</u>

a និង b បកតិសំខ្យា

***a និង b ទាំងពីរ មានព្រំដែន* => $(+b)$ មានព្រំដែន (1) ។**

<u>ហង្ហាញ ៖</u> យើងនឹងបង្ហាញ ដោយ រេគារ៉ង លើ $(\mathbf{1})$ ។

$b \in N$ យើងទុកនៅដដែល ហើយយើង ឲ្យ a យកចំនួន តាំង ពី $0, 1, 2, \ldots\ldots, a$

បំណងយើងគឺ បង្ហាញថា (1) ត្រូវ ចំពោះ គ្រប់ចំនួន a ទាំងអស់ ។

យើងតាងដោយ A សំនុំនៃធាតុ a ដែលឲ្យ (1) ត្រូវ គឺថា $(+\boldsymbol{b})$ **មានព្រំដែន ។**

-*ចំពោះ* $a=0$, *យើងបាន ៖ $0+b=b$ (មានព្រំដែន ដោយសម្មតិកម្ម) ដូច្នេះ* **(1) *ត្រូវ***

=> $0 \in A$ *។ ហើយយើងសន្មតថា* **(1) *ត្រូវ*** *រហូតដល់ $a=a$ គឺថាយើងបាន*

<u>$a \in A$ និង $(a+b)$ មានព្រំដែន</u> ។ ឥឡូវយើងត្រូវបង្ហាញថា ចំពោះ $a=a+1$, **(1)** *នៅ*

តែត្រូវដដែល ។

-*ចំពោះ* $a=a+1$, $(\mathbf{1})$ *ទៅជា ៖ $(\mathrm{a}+1)+b=(a+b)+1$*

ដោយយើងបានសន្មតថា $(a+b)$ មានព្រំដែន នោះតាម **<u>*ការស្មើ* (III, 4, 1</u>**

$(a+b)+1$ ក៏មានព្រំដែនដែរ ។ ដូច្នេះ $(a+1) \in A$ ។ ដូច្នេះ យើងឃើញថា

$a \in A$ => $(a+1) \in A$ ដូច្នេះ $A=N$ ។

នៅទីបញ្ចប់ ៖ $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{N}$ និង $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N}$ => $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{N}$ ។

<u>2/ *លក្ខណ្ឌគ្រាន់តែ* (condition suffisante)</u>

a និង b បកតិសំខ្យា

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ មានព្រំដែន => [$\boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{b}$ **មានព្រំដែន** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{N}$ និង $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N}$]

<u>បង្ហាញ</u> ក្នុងការបង្ហាញនេះ យើងប្រើ ***ការស្នើ* (III, 4,** 1)

$(a + b)$ មានព្រំដែន => $(a+b)+1 = (a + b + 1)$ មានព្រំដែន =>

$(a + b + 1) + 1 = (a+1) + (b + 1)$ មានព្រំដែន ។

ដូច្នេះ $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ **មានព្រំដែន** => $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1}) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{1})$ **មានព្រំដែន** **(2)**

ក៏ដូចជាយើងថា បើយើងតាងដោយ A និងដោយ B សំនុំ ដែល $a \in A$ និង $b \in B$

នោះ គេបាន $(a + b)$ មានព្រំដែន ។ ទំនាក់ទំនង (2) មានន័យថា ៖

$a \in A$ និង $b \in B$ => $(a+1) \in A$ និង $(b+1) \in B$ ដូច្នេះ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{N}$ និង $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}$

នេះតាម ស្វ័យស័ត្យ នៃ អនន្ត (Axiome de l'INFINI) ។

នៅទីបញ្ចប់ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{N}$ => $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{N}$ និង $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{N}$ ។

<u>***ការស្នើ* (III, 4, 5)**</u>

***a* និង *b* ជាបកតិសំខ្យា ។ ផលគុណ *ab* មានព្រំដែន កាលណា *a* និង *b* ទាំងពីរ មានព្រំដែន។**

ដោយយើងទុក ជាតុ $b \in N$ មិនឲ្យកំរើក ហើយយើងតាងដោយ A សំនុំ នៃបកតិសំខ្យា a ដែលមានព្រំដែន ហើយដែលឲ្យ ផលគុណ ab មានព្រំដែន ។

ដូច្នេះ $0 \in A$ ពីព្រោះ $0 \times b = 0$ (មានព្រំដែន តាមនិយមន័យរបស់ សូន្យ)

ដូច្នេះ បើ ab មានព្រំដែន ហើយដោយ $b \in N$ ក៏មានព្រំដែនដែរ ដូច្នេះ តាម

ការស្នើ (III, 4, 4) $ab + b = (a+1)b$ ក៏មានព្រំដែន ដែរ ។

ដូច្នេះ $a \in A$ => $(a+1) \in A$ ដូច្នេះតាម គោលការណ៍រេគារ៉ង់ $A = N$ ។

<u>***ការស្នើ* (III, 4, 6)**</u> (នេះជាការពង្រីក នៃការស្នើ (III, 4, 5))

បើ a ជាបកតិសំខ្យា មានព្រំដែន ហើយ b និង c ជាបកតិសំខ្យាទូទៅ ដែលបំពេញ $a+b=a+c$ នោះ គេបាន $b=c$ ។

យើងធ្វើការបកស្រាយ ដោយប្រើ គោលការណ៍ រេគារ៉េង លើ a ។ យើងតាងដោយ A សំនុំ នៃបកតិសំខ្យា a មានព្រំដែន ដែលបំពេញ $a+b=a+c \;\Rightarrow\; b=c$ ។

ជាដំបូងយើងឃើញថា $0 \in A$ ពីព្រោះ $0+b=0+c \;\Rightarrow\; b=c$

ឥឡូវយើងសន្មតថា យើងមាន a មានព្រំដែន ដែលបំពេញ

$[\; a+b=a+c \;\Rightarrow\; b=c \;]$ (1)

ហើយយើងត្រូវបង្ហាញថា (1) នេះ ក៏ត្រូវចំពោះ $(a+1)$ ដែរ គឺ ៖

$$(a+1)+b=(a+1)+c \;\Rightarrow\; b=c$$

ឥឡូវយើងចេញដំណើរពី

$(a+1)+b=(a+1)+c$ (2)

ដោយប្រើ លក្ខណៈផ្តុំ និង ត្រលប់ យើងអាចសរសេរ (2) ទៅជា ៖

$(a+b)+1=(a+c)+1$ ហើយដោប្រើ ការស្មើ (III, 3, 5) យើងបាន

$(a+b)=(a+c) \;\Rightarrow\; b=c$ ដោយសំអាងលើ (1) ។

ដូច្នេះ $(a+1)+b=(a+1)+c \;\Rightarrow\; b=c$ ។ ដូច្នេះ $A=N$ ។

5. វិធីសង - ទំនាក់ទំនងលំដាប់ លើ N (Soustraction. Relation d'ordre sur N.)

និយមន័យ

a និង b តាងជាបកតិសំខ្យាមានព្រំដែន។ គេថា a ធំជាង b ហើយគេសរសេរ $a \geq b$ ឬ $b \leq a$ បើកាលណាមាន បកតិសំខ្យា c ដែលឲ្យ

$\boldsymbol{a = b + c}$ ។

ដូច្នេះតាម ការស្មើ (III, 4, 4) និង ការស្មើ (III, 4, 6) បកតិសំខ្យា c ត្រូវ មានតែមួយ ហើយមានព្រំដែនទៀត ៖ គេថា c គឺ ការខុសគ្នា (la différence) រវាង a និង b ហើយគេ សរសេរ $\boldsymbol{c = a - b}$ ។

នៅពេលនេះ យើងអាចថ្លែង ចំពោះការស្មើ (III, 4, 2) ថាគេគ្មាន ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\boldsymbol{a}$ ឯណាដែល បំពេញ $0 < a < 1$ (**ទំនាក់ទំនង** $\boldsymbol{b} < a \iff b \le a$ និង $\boldsymbol{b \neq a}$) ។

ហើយជាទូទៅ យើងមានការស្មើតទៅនេះ ដែលគេច្រើនប្រើនៅ លេខគណិត (arithmétique) ៖

ការស្មើ (III, 5, 1)

ទំនាក់ទំនង $\boldsymbol{a} > b$ ស្មើនឹង $\boldsymbol{a} \ge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{1}$ ។

$a > b \Rightarrow$ គេមាន $c \neq 0$ ដែលឲ្យ $a = b + c$ ហើយ ដោយ ការស្មើ (III, 4, 2) គេមាន x ដែលឲ្យ $c = x + 1$ ។ ដូច្នេះគេបាន $a = b + c = b + x + 1 = (b + 1) + x$

$a = (b + 1) + x \Rightarrow a \ge b + 1$ ។

ផ្ទុយទៅវិញ បើ $a \ge b + 1$ តាមនិយមន័យខាងលើ គេមាន x ដែលឲ្យ $a = b + 1 + x$ ឬ $a = b + (x + 1) \Rightarrow [\ a \ge b$ និង $a \neq b\ ] \Leftrightarrow a > b$ ។

ការស្មើ (III, 5, 2)

ទំនាក់ទំនង $\boldsymbol{b} \le \boldsymbol{a}$ កំណត់ លំដាប់ទាំងមូល (définit un ordre total sur N) លើ $\boldsymbol{N}$ ។

ដើម្បីបង្ហាញថាជា ទំនាក់ទំនងលំដាប់ទាំងមូល ត្រូវបង្ហាញថា គ្រប់ធាតុនៃ N ទំនាក់ទំនង $b \le a$ វា រេផ្លិចស៊ីវ ត្រង់ស៊ីទីវ និង ប្រឆាំងធ្លុះ ។

1/ ទំនាក់ទំនង $a = a + 0$ បង្ហាញថា ទំនាក់ទំនងនេះ រេផ្លិចស៊ីវ

2/ $a \geq b$ និង $b \geq c$ តើនាំឲ្យ $a \geq c$ ឬទេ ?

$a \geq b$ => គេអាចរក $d \in N$ ដែលឲ្យ $a = b + d$ (1)

$b \geq c$ => គេអាចរក $e \in N$ ដែលឲ្យ $b = c + e$ (2)

ដោយ (1) និង (2) យើងបាន ៖ $a = b + d = (c + e) + d = c + (e + d)$

$a = c + (d + e)$ => $a \geq c$ ដូច្នេះ វិឡាស្បុងនេះ ត្រង់ស៊ីទីវ

3/ $a \geq b$ និង $b \geq a$ តើនាំឲ្យ $a = b$ ឬទេ ?

$a \geq b$ => គេអាចរក $c \in N$ ដែលឲ្យ $a = b + c$ (3)

$b \geq a$ => គេអាចរក $d \in N$ ដែលឲ្យ $b = a + d$ (4)

ដោយ (3) និង (4) យើងបាន ៖ $a = b + c = (a + d) + c = a + (c + d)$

$a = a + (c + d)$ => $(c + d) = 0$ ដោយប្រើ ការស្នើ (III, 4, 6)

$c + d = 0$ => $c = 0$ និង $d = 0$ ដោយប្រើ ការស្នើ (III, 3, 3) ដូច្នេះ វិឡាស្បុងនេះ ប្រឆាំងធ្លុះ ។

ដើម្បីនឹងបង្ហាញថាជា **<u>លំដាប់ ទាំងមូល លើ N</u>** យើងប្រើគោលការណ៍ រេគារ៉ង់ ហើយ ប្រើ ការស្នើ (III, 4, 6) ។ ដូចយើងឃើញរួចមកហើយ គេប្រើគោលការណ៍ រេគារ៉ង់ នៅពេលណា ? ឆ្លើយនៅពេលដែលគេចង់បង្ហាញថា រូបមន្តអ្វីមួយ ដែលមាន អថេរជាចំនួនគត់ យើងចង់បង្ហាញថា រូបមន្តនោះត្រូវ គ្រប់ចំនួន a ទាំងអស់នៅក្នុង N ។ តើត្រូវធ្វើរបៀបណា ដើម្បី ថា រូបមន្តនោះត្រូវ គ្រប់ចំនួន a ទាំងអស់នៅក្នុង N ? របៀបគឺគេតាំង សំនុំ A មួយ ដែលមានជាតុសុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងរូបមន្តនោះ ហើយមុនដំបូងយើងបង្ហាញ ថា $A \neq \emptyset$ ដូចជា $0 \in A$ ឬក៏ $1 \in A$ ជាដើម ។ បន្ទាប់មក ដោយសន្មត ថា $a \in A$ នោះយើងត្រូវបង្ហាញថា $(a + 1) \in A$ ។ ដូច្នេះ តាមស្វ័យស័ត្យ យើងអាចសន្និដ្ឋានថា $A = N$ ។ ដែលមានន័យថា រូបមន្តត្រូវទាំងមូល លើ N ។

ឥឡូវយើងត្រឡប់មក ការបបង្ហាញថា **លំដាប់ ទាំងមូល លើ N** ។

យើងតាងដោយ A សំនុំដែលមានធាតុ a នៃ N ប្រៀបបាននឹងធាតុឯទៀតៗ គឺ ថា បើ $b \in N$ នោះ គេបាន $a \geq b$ ឬ $b > a$ ។ យើងឃើញថា $0 \in A$ (ដូច្នេះ $A \neq \emptyset$) ម្យ៉ាងទៀត $a \geq b$ => $a+1 \geq b$ ហើយ $b > a$ => $b \geq a+1$ ។ ដូច្នេះ $a \in A$ => $a+1 \in A$ ហើយតាមគោលការណ៍ កើតរ៉ង $A = N$ ។

កម្មសិទ្ធិ នៃ វិសមាមាត្រ (Propriétés des inégalités)

ដោយហេតុថា លំដាប់កំណត់លើ N ជាលំដាប់ទាំងមូល នោះ គេអាចទាញយកផល វិបាកដោយងាយ ដូចតទៅ ដែលហៅថា « **កម្មសិទ្ធិនៃ វិសមាមាត្រ** » ហើយដែល សំខាន់យ៉ាងខ្លាំងចំពោះ សិស្ស ក្នុងការប្រើប្រាស់ ។

ការស្នើ (III, 5, 3)

ទំនាក់ទំនង $a \geq b$ មានន័យស្មើគ្នានឹង $a+c \geq b+c$

ហើយ $a > b$ មានន័យស្មើគ្នានឹង $a+c > b+c$ ។

ការស្នើ (III, 5, 4)

បើ $c \neq 0$ ទំនាក់ទំនង $a \geq b$ មានន័យស្មើគ្នានឹង $ac \geq bc$

ហើយ $a > b$ មានន័យស្មើគ្នានឹង $ac > bc$ ។

តាមនិយមន័យ $a \geq b$ => $a+c \geq b+c$ និង $ac \geq bc$

ហើយក៏ដូចគ្នាដែរ $a > b$ => $a+c > b+c$ និង បើ $(c \neq 0)$ $ac > bc$ ។

ការផ្ទុយទៅវិញ បង្ហាញដោយ មិនសមហេតុសមផល ដោយសង្កេតថា

$$non\,(y \geq x) \iff y < x$$

នេះជារបៀបបង្ហាញ ដែលក្នុងភាសាដឹងដោយការពិភាល់ (langage intuitif) គេថា ការសង្កេតគ្រប់ករណី ដែលអាចមានទាំងអស់ (examen de tous les cas possibles)។

ដូចជាឧទាហរណ៍នៅទីនេះគឺ ៖

ក្នុងការស្មើ (III,5,4) មានពីរ ផ្នែក ផ្នែកទី ១ គឺ

បើ $c \neq 0$ ទំនាក់ទំនង $a \geq b$ => $ac \geq bc$ (1)

ហើយផ្នែកទី ២ ដែលផ្ទុយពីផ្នែកទី ១ គឺ

បើ $c \neq 0$ ទំនាក់ទំនង $ac \geq bc$ => $a \geq b$ (2)

ឥឡូវនេះ យើងចង់បង្ហាញ (2) ដោយប្រើការប្រកែក ឬ បង្ហាញដោយ មិនសមហេតុសមផល ។ យើងថា ការអះអាង **(2)** នេះខុស គឺថា $non(a \geq b)$ ។

$non(a \geq b)$ => $a < b$ => ដោយ $(c \neq 0)$ => $\boldsymbol{ac} < bc$ [ដោយប្រើ (1)នៃ ការស្មើ (III, 5, 4)] ដែលខុសពី សម្មតិកម្ម នៃ **(2)** ។ ដូច្នេះ មានតែ $a \geq b$ ។ គឺថាការប្រកែក $non(a \geq b)$ នោះមិនត្រូវទេ ។

6. ចំណោទ នៃការបន្ថែម និង ការបន្ថយ (Problèmes de majoration et de minoration.)

សង្កេត សំនុំតម្រៀប N មាន សូន្យ (0)ជាធាតុតូចបំផុត ។ យើងនឹងឃើញថា N អត់មាន ធាតុដែលធំជាងគេទាំងអស់នោះទេ ។

***ការស្មើ* (III, 6, 1)**

នៅក្នុង N អត់មានធាតុដែល ធំជាងគេបង្អស់នោះទេ ។

ឧបមាថា នៅក្នុង N មាន ធាតុ a មួយ ដែល $x \in N$ => $x \leq a$ $(\mathbf{1})$ ។

បើដូច្នោះ ដោយថា a នៅក្នុង N ដែរនោះ ដូច្នេះ គេក៏មាន $a+1$ ក៏នៅក្នុង N ដែរ ។

$a+1 \in N$ => $\boldsymbol{a+1} \leq \boldsymbol{a}$ ដោយ (1) ។ ដែលវា មិនធម្មតា (C′est absurde)។

ជួនកាល គេថ្លែង *ការស្នើ* (III, 6, 1) ដោយថា ស៊ីត (la suite) នៃចំនួនគត់ គ្មានព្រំដែន (la suite des nombres entiers est illimitée)។ វាស្រួលយល់ តែមិនសូវច្បាស់លាស់ ។

ការស្នើ (III, 6, 1) នេះអនុញ្ញាតឲ្យយើង បង្ហាញថា N មានកម្មសិទ្ធិមួយដ៏ខ្លាំងជាងកម្មសិទ្ធិ ដែលថា N មានលំដាប់ទាំងមូល (N totalement ordonné) ។

<u>និយមន័យ</u>

គេថា សំនុំ E មួយ មាន « <u>លំដាប់ល្អ</u> » (bien ordonné) កាលណា ផ្នែកមិនទទេ ណាក៏ដោយនៃ E តែងតែមានធាតុដែលតូចជាងគេនៅក្នុងផ្នែកនោះ ។

(ដោយយក សំនុំ E ដែលមានតែ ធាតុពីរ យើងឃើញថា សំនុំ មានលំដាប់ល្អ ក៏ត្រូវតែជា សំនុំ មានលំដាប់ទាំងមូលដែរ) ។

<u>*ការស្នើ* (III, 6, 2)</u>

***សំនុំ* N *មាន លំដាប់ល្អ ដោយ រ៉ឺឡាស្យុង* $b \le a$ ។**

យើងតាងដោយ A ផ្នែកមួយមិនទទេ នៃ N ហើយ B ជាសំនុំ នៃចំនួនគត់ y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹង $y \le x \ \forall x \in A$ (គឺគ្រប់ចំនួន x នៅក្នុង A)[9] ។ ដោយ $A \neq \emptyset$

ដូច្នេះ ដោយ **ការស្នើ (III, 6,** 1) B មិនអាច ស្មើនឹង N បានទេ ហើយម្យ៉ាងទៀត $0 \in B$ ។ ដោយ គោលការណ៍ រេគារ៉េង់ នោះ ត្រូវមាន $z \in B$ ដែលឲ្យ $z+1$ មិននៅក្នុង B ។ ពីព្រោះថា បើ $z+1$ នៅក្នុង B នោះដោយ គោលការណ៍រេគារ៉េង់ដដែលនេះ គេតហរូវបាន B = N ។

រួមសេចក្តីទៅ មាន $z \in B \Rightarrow z \le x, \forall x \in A$ $\quad(\mathbf{1})$ ហើយ

[9] ឧទាហរណ៍ ដូច B = {0, 1, 2, 3, 4} និង A = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

$z+1$ មិននៅក្នុង A <=> non [$z+1 \leq x, \forall x \in A$] <=> $\exists x \in A,\ z+1 > x$ (2)

ដូច្នេះ ដោយ (1) និង (2) យើងបាន ៖ $\exists x \in A,\ z \leq x < z+1 \Rightarrow \boldsymbol{x = z}$

ដូច្នេះ z ជាធាតុ ដែលតូចជាងគេ នៃ *A* ។ ដូច្នេះតាមនិយមន័យខាងលើ

N **មានលំដាប់ល្អ ។**

សង្កេត

នៅលេខគណិតថ្នាក់តូច គេមិនប្រើ កម្មសិទ្ធិ មាន លំដាប់ល្អ នោះទេ ដែលការបង្ហាញ ដូចជាមើលមិនឃើញ តែគេប្រើ កម្មសិទ្ធិខ្សោយ ដូចខាងក្រោមនេះ[10] ៖

ការស្នើ (III, 6, 3)

ផ្នែក*[11] *នីមួយៗ នៃ* N *មិនទទេ* (chaque partie non vide) *ហើយនិង មាន ចំនួនបន្ថែម* (majorée) *ផ្នែកនោះ មាន ជាតុមួយ ដែលធំជាងគេ ។

យើងតាងដោយ A *សំនុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ* ***a*** *ដែលមានកម្មសិទ្ធិ ដូចតទៅនេះ ៖*

ល័ក្ខខ័ណ្ឌ-1

ផ្នែកនីមួយៗ មិនទទេ* (toute partie non vide) *នៃ* N *ហើយ បន្ថែម* (majorée) *ដោយ* a *ផ្នែកនោះ មាន ជាតុមួយ ដែលធំជាងគេ។

---

[10] *គេអាចបង្ហាញ ថា ផ្នែក មិនទទេ ហើយ បន្ថែម* (majoré) *នៃសំនុំមានលំដាប់ល្អ នោះមាន គោលទាល់លើ ដែលជា ចំនួនបន្ថែម តូចជាងគេបំផុតរបស់ផ្នែកនោះ ។ ហើយម្យ៉ាងទៀត ការស្នើ* (III,5,1) *អាចពន្យល់ថា គោលទាល់លើ និង គោលទាល់ក្រោម នៃផ្នែកណាមួយ របស់* N *ក៏ជារបស់ផ្នែកនោះដែរ ។*

[11] *យើងធ្លាប់ឃើញនៅក្នុងចំនួនពិត* (R) *នូវចន្លោះ បើក*] a, b[*ឬ ចន្លោះ បិទ* [a ,b] *ឥឡូវនេះ ផ្នែក នៅ ក្នុង* N *ក៏មានន័យដូច ចន្លោះនៅក្នុង* R *ដែរ ។ នៅក្នុង* N *ផ្នែក និង សំនុំ មិនដូចគ្នាទេ ដូច ជា សំនុំ* { 2, 3, 5, 6, 7,8 } *មាន ពីរ ផ្នែកគឺ* {2,3} *និង* {5, 6, 7, 8} ។

ដើម្បី យល់ សំនុំ A ខ្ញុំ យកឧទាហរណ៍ ដូចខាងក្រោមនេះ

ឧបមាថា បើ A = {0, 1, 2, } នោះ ផ្នែកទាំងឡាយនៃ N ដែល បំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ-1 មាន ដូចតទៅ៖

a/ ផ្នែក នៃ N ដែល បន្ថែមដោយ 0 (សូន្យ) គឺ {0} ហើយធាតុដែលធំជាងគេ គឺ 0

b/ ផ្នែក នៃ N ដែល បន្ថែមដោយ 1 គឺ {0} , {0, 1}

c/ ផ្នែក នៃ N ដែល បន្ថែមដោយ 2 គឺ {0}, {0, 1}, {0, 1, 2 } ហើយ

ចំពោះ ផ្នែក {0} ជាតុធំជាងគេ គឺ 0 ជាតុបន្ថែម គឺ 2

ចំពោះ ផ្នែក {0, 1} ជាតុធំជាងគេ គឺ 1 ជាតុបន្ថែម គឺ 2 (ជាតុបន្ថែម មិននៅក្នុងផ្នែក)

ចំពោះ ផ្នែក {0, 1, 2} ជាតុធំជាងគេ គឺ 2 ជាតុបន្ថែម គឺ 2 (ជាតុបន្ថែម នៅក្នុងផ្នែក)

យើងត្រឡប់មកការបង្ហាញវិញ

យើងឃើញថា $0 \in A$ ពីព្រោះ ផ្នែកនៃ N មិនទទេ ហើយ បន្ថែមដោយ សូន្យ គឺ {0} ។ ម្យ៉ាងទៀតបើ $a \in A$ ហើយ បើ X ជាផ្នែកមួយនៃ N មិនទទេ ហើយ បន្ថែមដោយ $a+1$ នោះមានតែពីរ ករណី ទេ ៖

ឬ មួយ $a+1$ នៅក្នុង X ដូច្នេះ $a+1$ ជាជាតុធំជាងគេ ។

ឬ មួយ $a+1$ មិននៅក្នុង X ដូច្នេះ X ក៏អាចបន្ថែម ដោយ *a* បានដែរ (ពីព្រោះ នៅក្នុង N ជាតុតូចមុន *a*+1 គឺ *a*) ដូច្នេះ $a+1 \in A$

នៅទីបញ្ចប់ $[a \in A => a+1 \in A] => A = N$ តាម គោលការណ៍ រេគារ៉ង់ ។

នេះក្រៅ មេរៀនទេ

ចំពោះ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ត្រូវតែ ឬ ល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ (condition nécessaire : il faut) និង ល័ក្ខខ័ណ្ឌ គ្រាន់តែ ឬ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ គ្រប់គ្រាន់ (condition suffisante : il suffit) យើងច្រើនជួប

លក្ខខណ្ឌ ទាំងពីរនេះ ក្នុង ទ្រឹស្តីបទ ឬ ក្នុង ការស្នើ ខ្លះ ។ ដូច្នេះយើងត្រូវស្គាល់ លក្ខខណ្ឌទាំងពីរនេះឲ្យច្បាស់ ដើម្បី បែក អ្វីជា សម្មតិកម្ម (hypothèse) អ្វីជា ការសន្និដ្ឋាន (conclusion) ។

ដើម្បីងាយយល់ យើងយកឧទាហរណ៍ ដូចតទៅនេះ ៖

យើងដឹងហើយថា ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប អវិជ្ជមាន -25 មិនអាចជា ការេពេញលេញ បានទេ (carré parfait) តែ $25 = 5^2$ ។ ម្យ៉ាងទៀត ចំនួនគត់វិជ្ជមាន 35 មិនអាចជា ការេពេញលេញទេ ។ ទាល់តែ 36 បានជា ការេពេញលេញ ពីព្រោះ $36 = 6^2$ ។

បើយើតាងដោយ ៖

A = ការស្នើថា « ចំនួន គត់រ៉ឺឡាទីប វិជ្ជមាន »

B = ការស្នើថា « ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ជា ការេពេញលេញ (carré parfait) »

យើងអាចថា ៖ « ចំនួន គត់រ៉ឺឡាទីប វិជ្ជមាន » ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ ចំពោះ « ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ជា ការេពេញលេញ (carré parfait) » ពីព្រោះ ចំនួន អវិជ្ជមាន មិនអាចជា ការេពេញលេញ (carré parfait) បានទេ ។

តែ « ចំនួន គត់រ៉ឺឡាទីប វិជ្ជមាន » មិនមែនជា លក្ខខណ្ឌ គ្រប់គ្រាន់ ចំពោះ « ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ជា ការេពេញលេញ (carré parfait) » ទេ ដូចយើងឃើញស្រាប់ ហើយ 35 ជាចំនួនវិជ្ជមាន តែមិនមែនជា ការេពេញលេញ (carré parfait) » ទេ ។

ឧទាហរណ៍មួយទៀត

A = ការស្នើថា « ចតុរង្ស ABCD ជា បួនជ្រុងស្មើ (carré) »

B = ការស្នើថា « ចតុរង្ស ABCD ជា ឡូសង់ (losange) »

យើងអាចថា « ចតុរង្ស ABCD ជា បួនជ្រុងស្មើ (carré) » ជា លក្ខខណ្ឌ គ្រប់គ្រាន់ សម្រាប់ ការអះអាងថា « ចតុរង្ស ABCD ជា ឡូសង់ (losange) » ។ ពីព្រោះថា បើគេដឹងថា ABCD មានរាង បួនជ្រុងស្មើហើយ នោះវាក៏ជា ឡូសង់ដែរ ។

ចំពោះ គណិតសាស្ត្រ

A ជា លក្ខខ័ណ្ឌ ត្រូវតែ (nécessaire) ចំពោះ B កាលណា $B \Rightarrow A$ A ជា លក្ខខ័ណ្ឌ គ្រាន់តែ (suffisante) ចំពោះ B កាលណា $A \Rightarrow B$

បើកាលណា $B \Rightarrow A$ និង $A \Rightarrow B$ នោះគេថា លក្ខខ័ណ្ឌ « ត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ » (condition « nécessaire et suffisante ») *ហើយគេសរសេរ $B \Leftrightarrow A$ ។* (**ចប់**)

ការស្នើ (III, 6, 4)

ផ្នែក មួយនៃ N មានទីបញ្ចប់ (une partie finie) លុះត្រាតែ និង គ្រាន់តែ ផ្នែក នោះ ជាផ្នែកបន្ថែម (partie majorée)។

1/ *លក្ខខ័ណ្ឌលុះត្រាតែ (ផ្នែកបន្ថែម)*

យើងតាងដោយ A សំនុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ a ដែលផ្នែកណាក៏ដោយនៃ N មាន មាន ចំនួនធាតុ ស្មើនឹង a ផ្នែកនោះ ជាផ្នែកបន្ថែម។

យើងឃើញថា ផ្នែក $\emptyset$ នៃ N ជាផ្នែកបន្ថែម ដោយចំនួនណាក៏បានដែរ ។ ដូច្នេះ $0 \in A$ ។ ម្យ៉ាងទៀត បើ $a \in A$ ហើយ បើ X ជាផ្នែកមួយនៃ N ដែលមាន ចំនួនធាតុ $a+1$ នោះ យើង អាច យកធាតុ x ចេញពី X[12] ហើយធាតុដែលនៅសល់យើងតាងដោយផ្នែក Y គឺ ថាយើងបាន $X = \{x\} \cup Y$ ។ ដោយ X មានចំនួនធាតុ $a + 1$ ដូច្នេះ Y មានចំនួនធាតុ a ។ តាមគោលការណ៍ រេការ៉េង Y ជាផ្នែកបន្ថែម ហើយ បើ

[12] *ឧបមា* a =5 *ហើយ* X = {101, 102, 103, 104, 105, 106} = {101} U Y *ដោយ* Y = {102,103,104,105,106}

y ជាចំនួនបន្ថែម របស់ Y នោះចំនួន បន្ថែមរបស់ X គឺចំនួនណាមួយដែលធំ រវាង

x និង y ។ ដូច្នេះ [$a \in A$ => $a+1 \in A$] => A = N ។

2/ លក្ខខ័ណ្ឌគ្រាន់តែ (ផ្នែកមានទីបញ្ចប់[13])

យើងតាងដោយ A សំនុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ a ដែលផ្នែកណាក៏ដោយនៃ N ដែលមាន a ជាធាតុបន្ថែម នោះជាផ្នែកមាន ទីបញ្ចប់ ។

យើងឃើញថា $0 \in A$ (ដោយ សំនុំ $\emptyset$) ។ $a \in A$ => $a+1 \in A$ ពីព្រោះ ផ្នែក នៃ N ដែល បន្ថែម ដោយ $a+1$ អាច ប្រៀបបានទៅនឹង ផ្នែកមួយនៃ N ដែលបន្ថែមដោយ a ប្រជុំ នឹង $\emptyset$ ឬក៏ប្រជុំនឹង សំនុំដែលមានធាតុតែមួយគត់ ដែលជាធាតុក្នុង N ។ ដូច្នេះ ក៏ជាផ្នែកមានទីបញ្ចប់ដែរ ។ ដូច្នេះ A = N ។

ការស្មើ (III, 6, 5)

p និង q ជាចំនួនគត់ ពីរ ដែលគេឲ្យ ហើយ A ជាផ្នែកមួយ នៃ N ដែល ៖

1/ $p \in A$;

2/ ទំនាក់ទំនង [$x \in A$ និង $x < q$ => $x+1 \in A$]

នៅពេលនោះ គេបាន ៖ នៅក្នុង A មាន ចន្លោះ $[p,q]$ (គឺសំនុំ នៃចំនួនគត់ ដែល បំពេញ $p \le x \le q$) ។

យើងតាងដោយ B សំនុំ នៃចំនួនគត់ x ដែល យ៉ាងហោចណាស់ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹងលក្ខខ័ណ្ឌ ណាមួយក្នុង លក្ខខ័ណ្ឌទាំងបី គឺ $x < p,\ x \in A,\ x > q$ [14]។ នៅពេល

---

[13] ចំនួនធាតុ មានទីបញ្ចប់ គឺថាចំនួនធាតុ មិន អនន្ត គឺ យើងអាចរាប់បាន មិនមែន អនន្តដែលច្រើន រាប់មិនបាន ទៅមិនដល់នោះទេ ។

[14] បើយើង គូរ បន្ទាត់ អ័ក្ស (axe) យើងឃើញថា គឺជា បន្ទាត់ N តែម្តង ។ ម្យ៉ាងទៀត

នោះ យើងឃើញថា $0 \in B$ ។ ហើយ បើ $x \in B \Rightarrow x+1 \in B$ ដូច្នេះ $B = N$ ។ ដូច្នេះ A ត្រូវតែ មាន ចន្លោះ $[p,q]$ នៅខាងក្នុង ។

7. ចំណោទ នៃការតម្រៀប សំនុំអាចរាប់បាន ស៊ីត

(Problèmes d'ordination. Ensembles dénombrables. Suites)

យើងតាងដោយ A សំនុំ ដែលមាន អាំងសេចស្យុង $(injection)$ f ទៅសំនុំមានលំដាប់ B ៖ ទំនាក់ទំនង $f(x) \leq f(y)$ កំណត់នូវ លំដាប់ លើ A ហើយ បើសិន B មានលំដាប់ នោះ A ក៏មានលំដាប់ដែរ ។ ដោយ អាំងសេចស្យុង $(injection)$ ពី A ទៅ B ក៏ជា ប៊ីសេចស្យុង ពី A ទៅ ផ្នែកមួយនៃ B ដូច្នេះ សំនុំ អេគីប៉ូតង់ $(équipotent)$ នឹង ផ្នែកមួយ នៃសំនុំមានលំដាប់ (ល្អ) ក៏អាចជា សំនុំមានលំដាប់ (ល្អ) ដែរ ។ ដោយហេតុនេះ យើងពិនិត្យ ជាពិសេស នូវ សំនុំ អេគីប៉ូតង់ នឹង ផ្នែកមួយ នៃ N ៖ សំនុំទាំងនោះ នឹងហៅថា « **អាចរាប់បាន** » $(\,dénombrables)$ ។ យើងនឹងឃើញ ថា សំនុំដែលអាចរាប់បាន $(ensembles\ dénombrables)$ មានតែសំនុំ មានទីបញ្ចប់ $(ensembles\ finis)$ និង សំនុំអេគីប៉ូតង់ នឹង N តែប៉ុណ្ណោះ ។ នៅក្នុងការសិក្សានេះ ផ្នែកនៃ N ដែលជាចន្លោះ ចាប់ផ្តើម ពី 0 ឬ ពី 1 មាននាទីពិសេស ៖ យើង សន្មតតាំងដោយ N_n ចន្លោះ $[0\,,\,n[\; = \;[0,\,n-1]$ ហើយ ដោយ N_n^* ចន្លោះ $[1\,,\,n\,]$ ។ សំនុំ N_0 និង N_0^* បង្រួញមកជា សំនុំ $\emptyset$ (ទទេ) ។

<u>ការស្នើ</u> (III, 7, 1)

$x \in A$ និង $x < q \Rightarrow x+1 \in A$ ដោយ q នៅដដែល តែ $x \in A$ ចេះតែឡើង ដូច្នេះ នៅពេលណាមួយ x ត្រូវតែ ស្មើ នឹង q ។ ហេតុនេះហើយ បានជា គេបាន ចន្លោះ $[p,q]$ នៅក្នុង A ។

ចំពោះ ចំនួនគត់ n ណាក៏ដោយ ការឌីណាល[15] ($\boldsymbol{cardinal}$) ***នៃ N_n ស្មើនឹង n ។***

គេមាន $card(N_0) = 0$ *។ម្យ៉ាងទៀត* N_{n+1} *ជាប្រជុំនៃ សំនុំ ដាច់ពីគ្នា* N_n *និង* $\{n\}$ *ដូច្នេះ* $card(N_{n+1}) = card(N_n) + 1$ *ហើយបើ* $card(N_n) = n$ *គេបាន* $card(N_{n+1}) = n + 1$ *។ ដូច្នេះ ការស្មើ នេះ ត្រូវតាមគោលការណ៍រេគារ៉ង់ ។*

<u>អនុសាធ្យ</u>

សំនុំ ដែលមាន ចំនួនធាតុ n មានប៊ីសេចស្យុង លើ N_n (ដូច្នេះក៏ លើ សំនុំ អេគីប៉ូតង់ N_n^* ដែរ) ។

ដោយយើងកំណត់ ប៊ីសេចស្យុង បែបនេះ យើងស្រួលនិយាយថា យើងបានរៀប សំនុំ ដែលមានទីបញ្ចប់ (*un ensemble fini*) *។ ហើយលទ្ធផលដែលយើងទើបនឹងបាន ត្រូវនឹង របៀបដែលយើងធ្លាប់តែរាប់ ដោយយើងមើល វត្ថុ នៅក្នុងសំនុំ ហើយយើង រាប់ថា ៖ មួយ ពីរ បី …… ។ល។ ។ នេះបានន័យ ថា សំនុំមួយមាន ធាតុ ចំនួន* n *កាលណា យើងអាច ផ្គូ ដោយ ប៊ីសេចទីវ សំនុំនោះ នឹង សំនុំ* N_n^* *(ដែល អេគីប៉ូតង់ នឹង* $N_{\rm n}$ *) ។ ដូច្នេះ ចំណោទ រាប់ចំនួន វត្ថុ* (numération) *នៅជាប់ គ្នា នឹងចំណោទ រៀប វត្ថុ* (rangement)*។*

សំនុំដែលអាចរាប់បាន (*ensembles dénombrables*) *នឹងមាន លក្ខណៈ គ្រប់គ្រាន់ កាលណា យើងតាំងថា « ផ្នែក អនន្ត នៃ* N (*toute partie infinie de* N) *គឺ អេគីប៉ូតង់ នឹង* N *» នេះដោយ មកពី ការស្មើ ខាងក្រោមនេះ ៖*

---

[15] *ការឌីណាល គេសរសេរ ជា អក្សរកាត់* $card$ *គឺជាចំនួន ប្រាប់ទំហំនៃសំនុំ ។ បើសំនុំនៅក្នុង* N *គឺ ចំនួន ធាតុរបស់សំនុំនោះ ។*

<u>ការស្នើ (III, 7, 2)</u>

បើ A ជាផ្នែក អនន្ត នៃ N នោះ មាន ការអនុវត្តន៍ កើនជានិច្ច តែមួយគត់ ពី A <u>ទៅលើ N</u> ។

ហើយ បើ A ជាផ្នែកមានព្រំដែន នៃ N ដោយមានចំនួនធាតុ n នោះ មាន ការអនុវត្តន៍ កើនជានិច្ច តែមួយគត់ ពី A ទៅលើ N_n ។

យើងតាងដោយ A_x សំនុំនៃធាតុ របស់ A ដែល តូចជាង x [16] (តូចដោយប្រិតប្រៀប strictement inférieur à x)។

<u>ឧបមាថា មាន</u> ការអនុវត្តន៍ f មួយ កើនដោយប្រិតប្រៀប ពី A ទៅលើ N ឬ ពី A ទៅលើ N_n នោះ $f(A_x)$ ត្រូវជា សំនុំ នៃធាតុនៃ N (ឬ នៃ N_n^*) ដែលតូចជា $f(x)$ [ពីព្រោះដោយមកពី f ជាអនុគមន៍កើន ហើយ $x > y, \forall y \in \mathrm{A_x}$ => $f(x) > f(y), \forall y \in A_x$)]។

ដូច្នេះ យើងបាន $card(A_x) = card\,[N_{f(x)}] = f(x)$ [17] ។ ដោយកំណត់ f យ៉ាងនេះ យើង បាន ការអនុវត្តន៍ f តែមួយគត់ ហើយ កើនដោយ ប្រិតប្រៀប

---

[16] ឧបមា $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ នោះ $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{1\}, A_3 = \{1,2\}$, ... $A_9 = \{1,2,3,,5,6,7,8\}$, $A_{10} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ។ $card(A_1) = 0$, $card(A_2) = 1$, $card(A_9) = 8$, $card(A_{10}) = 9$ ។ $card(A) = 10$ ។

[17] អនុគមន៍ f កំណត់យ៉ាងនេះ ទុកដូចជាមានមុខងាររាប់នូវចំនួនធាតុក្នុង A ហើយ $f(x)$ គឺជាចំនួន ធាតុនៃ A ដែលតូចជាង ($<$) ធាតុ x នៅក្នុង A ។ បើ A មានចំនួនធាតុទាំងអស់ ដប់ ដូចឧទាហរណ៍នេះ ហើយបើ $x = 10$ នោះ $f(x) = f(10) = ?$ គឺ តាម ការកំណត់នៃ f ខាងលើ គឺស្មើនឹង $card(N_{f(10)}) = [0, f(10)[= [0, f(9)]$ ។ តាមនិយមន័យខាងលើនៃ f $f(1) = card(A_1) = 0$; $f(2) = card(A_2) = 1$; $f(3) = card(A_3) = 2$; $f(9) = card(A_9) = 8$ ដូច្នេះ $[0, f(9)] = [0,8]$ => $card([0,8]) = 9$ ហើយ $card(N_{f(10)}) = 9 = card(A) - 1$ ។ តែ

(ដូច្នេះ អាំងសេចទីវ)។

ផ្ទុយទៅវិញ ការអនុវត្តន៍ ពី A ទៅក្នុង N កំណត់ដោយ $f(x) = card(A_x)$ គឺ កើន ដោយប្រិតប្រៀង ។ ហើយដើម្បី ថា f កើនពី A ទៅលើ N យើងត្រូវបង្ហាញ ថា កាលណា A ជាផ្នែក អនន្ត នៃ N នោះ $f(A) = N$ ។ យើងនឹងបង្ហាញដោយ វេគារ៉ង់ ។ យើងតាងដោយ x_0 ជាតុតដែលតូចជាងគេបំផុតនៅក្នុង A នៅពេលនោះយើង បាន $f(x_0) = 0$ ។ ដោយ $f(x_0) \in f(A)$ ពីព្រោះ $x_0 \in A$ ដូច្នេះ $0 \in f(A)$ ។ យើងយក ធាតុ x មួយនៅក្នុង A ដែលមិនមែន ធំជាងគេ ហើយ បើ x' ជាធាតុមួយតូច ជាងគេនៅក្នុង A ដែលធំជាង x $(x < x')$ នោះគេបាន ៖

$f(x') = card\,[\,A_x \cup \{x\}\,] = card(A_x) + 1 = f(x) + 1$ ។

តែ x អាចជាធាតុធំជាងគេ បំផុត នៅក្នុង A លុះត្រាតែ $f(x) = card(A) - 1 \Rightarrow card(A) = f(x) + 1$ (1) ។

ដូច្នេះ បើ A ផ្នែក គ្មានព្រំដែននៃ N នោះ $y \in f(A) \Rightarrow y + 1 \in f(A)$ ដោយ (1) ដូច្នេះ តាមគោលការណ៍ វេគារ៉ង់ $f(A) = N$ ។ ដូច្នេះ f ជាការអនុវត្តន៍ តែមួយគត់ ដែលកើនជានិច្ច ពី ផ្នែក A គ្មានព្រំដែននៃ N ទៅលើ N ។

បើ A ជាផ្នែកមួយមានកំណត់ នៃ N (une partie finie de N) នោះ $y \in f(A)$ និង $y < card(A) - 1 \Rightarrow y + 1 \in f(A)$ (ដោយ (1)) នោះតាមការស្នើ (III, 6, 5) $f(A) = N_n$[18] ដោយ $n = card(A)$ ។

ដូច្នេះ ការស្នើ (III,7,2) បានបញ្ជាក់ដោយសព្វគ្រប់ហើយ ៕

ដោយ $card(A) = 10$ តើ $card[f(A)] = ?$ បើយើងដឹងថា f ជាការអនុវត្តន៍ ពី A ទៅ N កើនជានិច្ច ដូច្នេះ អាំងសេចទីវ ។

អាំងសេចទីវ ។

[18] $N_n = [0, n[= [0, n-1]$ តាមការកត់ត្រា ពីមុនមក ។

ការសង្កេត

ការអនុវត្តន៍ កើនដោយប្រិតប្រៀប ពី សំនុំមានលំដាប់ A ទៅសំនុំ មានលំដាប់ B ជា ប៊ីសេចស្យុង ពី A ទៅលើ B ។ ដូច្នេះ អនុគមន៍ f ជា ប៊ីសេចស្យុង ហើយ អនុគមន៍ច្រាស f^{-1} ជា ការអនុវត្តន៍ កើនដោយប្រិតប្រៀប ពី N (ឬ N_n)ទៅលើ A ។

អនុគមន៍ច្រាស f^{-1} នោះ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ដូចតទៅនេះ ៖

$1°$ $f^{-1}(0)$ ជាធាតុមួយតូចជាងគេបំផុតនៅក្នុង A

$2°$ $f^{-1}(n+1)$ ជាធាតុមួយ តូចជាងគេបំផុតនៅក្នុង A ដែលធំដោយប្រិតប្រៀបជាង $f^{-1}(n)$ ។

គេអាច បង្ហាញដោយ រេគារ៉េង ថា ល័ក្ខខ័ណ្ឌទាំងពីរ កំណត់ឲ្យបាន f^{-1} តែមួយគត់ ។ ដូច្នេះគេបាន ការបង្ហាញមួយទៀត នៃ ការស្នើ(III,7,2) ដែលអាចពិបាកជាងមុន តែ អាចពង្រីក ទៅសំនុំមានលំដាប់ទាំងឡាយ ជាទូទៅ [19]។

អនុសាធ្យ (Corollaire)

សំនុំ អនន្ត ណាក៏ដោយ ដែលអាចរាប់បាន (tout ensemble infini dénombrable) ជា សំនុំ អេគីប៉ូតង់ នឹង N ។

ការឌីណាល នៃ N [(card(N)] ហៅថា « ស្វ័យគុណនៃអាចរាប់បាន » (puissance du dénombrable) ។

សញ្ញាណ នៃស៊ីត (Notion de suite)

ស៊ីត គឺ ធាតុ ដែលមានបន្តគ្នា នៅក្នុង សំនុំ E គេកំណត់បានដោយ ឲ្យ ការអនុវត្តន៍ ពី

[19] ពីព្រោះ ការស្នើ (III,7,2) និយាយតែអំពី សំនុំ N តែប៉ុណ្ណោះ ។

ផ្នែកមួយនៃ N ដែលគេតាំង ដោយអក្សរ I ទៅក្នុង E [20]។

I ហៅថា សំនុំ នៃ សន្ទស្សន៍ (ensemble des indices) ។ ធាតុ មួយនៃ E ដែលជារូបភាព នៃ ធាតុ $i \in I$ ដោយការអនុវត្តន៍ ដែលគេតាំងដោយ x_i ហៅថា តួ សន្ទស្សន៍ i $(x_i \in E)$ ។

គេមិនបានថា ការអនុវត្តន៍ នោះ អាំងសេចទីវ ទេ ។ ដូច្នេះ ធាតុ x_i មិនចាំបាច់តែខុសគ្នានោះទេ ។ ជាពិសេស ចំពោះស្វីត អនន្ត ដែលថា « នៅនឹង » (stationnaire) កាលណា មាន សន្ទស្សន៍ j មួយ ដែល កាលណា $i \geq j$ នោះ $x_i = x_j$ ។

បើ I មានព្រំដែន ហើយបើ $card(I) = n$ នៅពេលនោះគេថា ស្វីត មាន ប្រវែង n (suite de longueur n) ។ នៅពេលនោះ គេអាច កំណត់ ការអនុវត្តន៍ កើនដោយប្រិតប្រៀបមួយ ពី N_n ឬ ពី N_n^* ទៅលើ I គឺ $p \to i_p$ ហើយយើង តាំង ស្វីត ដោយ $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, \ldots\ldots, x_{i_n}, \ldots\ldots)$, ឬ ដោយខ្លី (x_{i_n}) ។ ដូច្នេះយើង ត្រឡប់មកករណីដែល សំនុំ សន្ទស្សន៍ គឺ N^* ហើយយើងថា x_{i_n} គឺជា តួ ទី n (terme de rang n) ។

បើ សំនុំ សន្ទស្សន៍ គឺ N តែម្តងនោះ តួទី ១ នៃ ស្វីត គឺ x_0 ហើយតួទី n គឺ x_{n-1} ។

ដូច្នេះ ចំពោះ ចំនួន បកតិសំខ្យា n (nombre cardinal) នោះមានចំនួន បូរណសំខ្យា (nombre ordinal) ជាគូ ហៅថា ទី១ ទី២ ទី៣ ……. ។ល។ ដែលប្រាប់ទីលំដាប់ (rang) នៃ តួ នៅក្នុង ស្វីត ។

ឧទាហរណ៍ នៃ ស្វីត

1/ ចំនួន គត់ធម្មតា បង្កើតបានជា ស្វីត ហើយ ជាពិសេសទៅទៀត ផ្នែកមួយនៃ N ក៏ផ្សំបានជាស្វីតដែរ ក្នុងករណីដែល តួមានសន្ទស្សន៍ i នោះស្មើនឹង i គឺថា $x_i = i$ [21]។

---

[20] I ---- ការអនុវត្តន៍ --→ E (ដោយ I ជាផ្នែកមួយនៃ N)

[21] ដូចជា ស្វីត ៖ $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots)$ ជាដើម

2/ ពាក្យនីមួយៗ បង្កើត ដោយស្វីតនៃតួ អក្សរ ។ គេយក តួមួយៗ នៃ ស្វីត នៅក្នុងសំនុំនៃ អក្សរ ។ អក្សរ មួយៗ អាចប្រើបានច្រើនដង តាមដែលគេចង់ ។ ឧទាហរណ៍ នេះបង្ហាញថា តួ នៃស្វីត មិនមែនត្រូវតែ ផ្សេងគ្នានោះទេ ។ឧបមាដូចពាក្យ ballon បានជា ជា ស្វីត (b, a, l, l, o, n) ។

3/ ក៏ដូចគ្នាដែរ មួយឃ្លា គឺជា ស្វីត នៃពាក្យ និង សញ្ញា ផ្សេងៗ ដូចជា , ; . ជាដើម ។

8. លេខចែក - និទស្សន្ត (Division - Puissances)

a/ លេខចែក (Division)

ក្នុងការចែក ចំនួន a ដោយចំនួន b យើងអាច កំណត់ លទ្ធផល នៃការចែកដាច់ ដោយ ការស្មើតទៅនេះ ដែលមាន លំនាំដូច ការស្មើ (III, 4, 6) ដែលចេញមក ពី ការស្មើ (III,3 ,4) ។

ការស្មើ (III, 8, 1)

a, b, c សំដៅ ចំនួនគត់ ទំនាក់ទំនង $ab = ac$ និង $a \neq 0$ បណ្តាលឲ្យបាន $b = c$ ។

និយមន័យ

គេថា a ចែកនឹង b ដាច់ កាលណា មានចំនួន q ដែលឲ្យ $a = bq$ ។

បើគេសន្មតថា $b \neq 0$ ការស្មើ (III, 8, 1) បង្ហាញថា ចំនួន q នោះ មានតែមួយគត់[22] ហើយគេហៅថា លទ្ធផលត្រឹមត្រូវ (quotient exact) នៃការចែក a ដោយ b ។

[22] ពីព្រោះថា បើមាន q' មួយទៀតដែលឲ្យ $a = bq'$ នោះយើងបាន $bq = bq'$ ហើយដោយ $b \neq 0$ នោះ $q = q'$ តាមការស្មើ (III, 8, 1) ។

បើ $b = 0$, q មានកាលណា $a = 0$ នៅពេលនោះ ជា ករណី ដែល <u>មិនអាចកំណត់បាន</u> (auquel cas, il est indéterminé) ។

<u>**លទ្ធផលប្រហែល**</u> (quotient approché)

ជាទូទៅ បើ a និង b ជាចំនួនគត់ ហើយបើ $b \neq 0$ នោះសំនុំ Q នៃធាតុ c ជាចំនួនគត ដែល បំពេញ $bc \leq a$ សំនុំ Q នោះ បន្ថែម ដោយ a[23](majoré par a) ដូច្នេះ Q មានធាតុ មួយដែលធំជាងគេ q ដែលហៅថា <u>លទ្ធផលប្រហែល</u> ($quotient\ approché$) <u>ខ្វះ មួយឯកតា</u> (à une unité près par défaut) នៃ ការចែក a ដោយ b ។ ចំនួន q នេះ មាន ល័ក្ខខ័ណ្ឌ គឺ $q \in Q$ ហើយ [មិន $(q+1 \in Q)$][24] គឺថា ត្រូវបំពេញ $bq \leq a < b(q+1)$ ។

ដូច្នេះ គេអាចតាំង $a = bq + r$ ដោយ $r < b$ ហើយហៅថា <u>សំណល់</u> (le reste) នៃការចែក a ដោយ b ។ បើ $r = 0$ q ជា លទ្ធផលត្រឹមត្រូវ នៃការចែក a ដោយ b ហើយនៅពេលនោះ គេអាច សរសេរ ជា $\frac{a}{b}$ ឬ $a : b$ ។

ទំនាក់ទំនង $\boldsymbol{a = bq + r}$ និង $\boldsymbol{r < b}$; នោះគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់គណនា $\boldsymbol{q}$ និង $\boldsymbol{r}$ ។

បើ $a < b$ លទ្ធផលប្រហែល នៃការចែក a ដោយ b គឺ សូន្យ ហើយ $r = a$[25]។

<u>b/ និទស្សន្ត (Puissances)</u>

[23] ដោយ $b \neq 0$ ដូច្នេះ $b \geq 1 \Rightarrow bc \geq c$ ដូច្នេះ $c \leq bc \leq a$ ។

[24] ខ្ញុំចង់និយាយថា $q+1$ មិននៅក្នុង Q ។

[25] ដោយ រូបមន្ត (F-III-8-1)

ការស្មើ (III, 8, 2)

***a* ជាចំនួនគត់មួយ ជាទូទៅ នោះគេមាន ការអនុវត្តន៍ *f* តែមួយគត់ ពី *N* ទៅ *N* ដែល បំពេញ $f(0) = 1$ និង $f(n+1) = af(n), \ \forall n \in N$ ។**

គោលការណ៍ រេគារ៉ង់ បង្ហាញយើងថា f(n) កំណត់បានដោយរបៀបតែមួយគត់ចំពោះ គ្រប់ ចំនួន $n \in N$ ។

ការកត់ត្រា

យើងតាង $f(n) = a^n$ ហើយយើងថា a^n ជា a ស្វ័យគុណ n ឬ a^n គឺ និទស្សន្តទី n នៃ a (a^n *est la puissance* $n^{\text{ième}}$ *de* a). ។

និយមន័យ ដឹងដោយញាណ (*Définition intuitive*)

បើ $n \geq 1$ គេ អាចនិយាយថា a^n ជា ផលគុណ នៃ n កត្តា ដែលស្មើនឹង a [26] ។

និយមន័យ តាមស្វ័យស័ត្យ ដែលយើបានឲ្យ មានប្រៀបត្រង់អនុញ្ញាត ឲ្យកំណត់ដោយសមហេតុសមផល នូវនិមិត្តរូប a^0 ទោះបី $a = 0$ ក៏ដោយ។ យើងមាន $0^0 = 1$ ដែលពិបាកនឹងបកស្រាយ កាលណាយើងប្រើ ការគុណ នៃ កត្តា ។

កម្មសិទ្ធ

***a*, *b*, *c* សំដៅ ចំនួនគត់ធម្មតា ជាទូទៅ នោះគេអាចបង្ហាញ ដោយប្រើ គោលការណ៍ រេគារ៉ង់ នូវ ការស្មើ ដូចតទៅ ៖**

$$a^b a^c = a^{b+c} \qquad (ab)^c = a^c b^c \qquad (a^b)^c = a^{bc}$$

---

[26] ពីព្រោះថាបើ $n = 0$ នោះ $a^0 = 1$ ។ ហើយ បើ $n = 1$ នោះ $a^1 = a$ ដូច្នេះ គេអាចនិយាយថា $a \times a \times a \times \ldots \times a$ n ដង ។

ការសង្កេត

ការអនុវត្តន៍ $(a,b) \rightarrow a^b$ កំណត់ បានជា ច្បាប់តាក់តែងផ្សំក្នុង[27](*loi de composition interne*) លើ N ។ តែ កម្មសិទ្ធិ ដែលយើងទើបនឹងបាននេះ ពិបាកនឹងនិយាយដោយពាក្យ សាមញ្ញ ចំពោះវិធីគណនា ។ ហើយគេ បង្ហាញ ដោយ យកឧទាហរណ៍ប្រឆាំង[28] (*par des contre – exemples*) ថា ច្បាប់នេះ មិនត្រលប់ មិនផ្តុំ ។ ហេតុនេះហើយ បានជា ក្នុងការសិក្សា នូវ a^n គេនិយាយ ថាជា អនុគមន៍ វិញដើម្បីឲ្យបាន ទូលំទូលាយ ហើយគេក៏ភ្លេចថា ការអនុវត្តន៍នោះ គឺ ការគណនា ។

ការកើននៃ a^n

គេអាចបង្ហាញដោយស្រួល ដោយវេគារ៉ង់ នូវការស្មើ ដូចតទៅនេះ ៖

1/ ទំនាក់ទំនង $a > b$ និង $n > 0$ ផ្តល់ឲ្យ [=>] $a^n > b^n$;

2/ ទំនាក់ទំនង $a > 1$ និង $n > p$ ផ្តល់ឲ្យ [=>] $a^n > a^p$ ។

ដោយថា ចំពោះ $n > 0$ (ដោយកំណត់) a^n ជាអនុគមន៍កើតដោយប្រិតប្រៀប ទៅតាម a ។ ហើយ ចំពោះ $a > 1$ (ដោយកំណត់) a^n ជាអនុគមន៍កើតដោយប្រិតប្រៀប ទៅតាម n ។

ហើយ ដោយ ពិចារណា ជាជំទាស់ (*raisonnement par absurde*) គេឃើញថា ផ្ទុយទៅវិញ ៖

---

[27] ផ្សំក្នុង បានន័យថា ចេញ ពី N ហើយចូលក្នុង N ដដែល។ គឺ នៅតែក្នុង សំនុំ តែមួយ ។

[28] ដូចជា $2^1 \neq 1^2$ ហើយ $(2^1)^2 \neq 2^{(1^2)}$ ។ គេសង្កេតចំពោះរឿងនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា ការគណនានោះ មិនត្រលប់ គេគ្រាន់តែបង្ហាញ ថាមាន មួយគូ ឬ ពីរជាតុ (a,b) ដែលឲ្យ $a * b \neq b * a$ ។

ហើយដើម្បីបង្ហាញថា ការគណនានោះ មិនផ្តុំ គេគ្រាន់តែបង្ហាញ ថាមាន បីជាតុ (a,b,c) ដែលឲ្យ $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ ។

1/ ទំនាក់ទំនង $a^n > b^n$ និង $n > 0$ => $a > b$;

2/ ទំនាក់ទំនង $a^n > a^p$ និង $a > 1$ => $n > p$ ។

នៅទីបញ្ចប់ យើងនឹងត្រូវការ នៅពេលខាងមុខ នូវ ការស្មើ ដូចតទៅនេះ ៖

ការស្មើ (III, 8, 3)

បើ $a > 1$ គេបាន $a^n > na$ ចាប់ពី $n \geq 3$ ។

a នៅដដែល យើងតាងដោយ A សំនុំ នៃ ចំនួនគត់ n ដែល ឲ្យ $a^n > na$ ។

យើង ឃើញថា $3 \in A$ ពីព្រោះ $a^3 > 3a$ ចំពោះ $a = 2$, $2^3 = 8 > 3 \times 2$ ។

ម្យ៉ាងទៀត បើ $n \in A$ ហើយ $n \geq 3$ នោះ គេបាន៖

$a^{n+1} = a\,a^n \geq 2\,(na)$ (ពីព្រោះ $a \geq 2$ ហើយ $a^n > na$

$2\,(na) = a\,(2n) = a\,(n+n) > a(n+1)$ (ពីព្រោះ $n \geq 3$ => $n > 1$) ។

ដូច្នេះ $n \in A$ => $(n+1) \in A$ ដូច្នេះ **ការស្មើ (III, 8, 3)** ត្រូវ ចំពោះ គ្រប់ $n \in N$ ចាប់ពី $n \geq 3$ ឡើងទៅ នេះតាមគោលការណ៍ រេគារ៉េង ។

9. របៀបសរសេរ ចំនួន (Systèmes de numération)

របៀបសរសេរចំនួន សព្វថ្ងៃនេះ គឺផ្អែកលើ គោលការណ៍ ដូចតទៅនេះ៖

គេ កំណត់យក ចំនួន a មួយ ដែលធំជាង មួយ $a > 1$ ហៅថា « បាត » (*appelé base*)

ហើយ ចំនួន a ដែលគេច្រើនប្រើ សព្វថ្ងៃនេះ គឺ $2, 10$ និង 12 ។

ដើម្បី នឹងរាប់ ចំនួនធាតុ ទាំងអស់ នៅក្នុងសំនុំណាមួយនោះ មុនដំដំបូង គេ ផ្តុំធាតុ ជាកញ្ចប់ៗ ដោយមួយកញ្ចប់មាន ចំនួនធាតុ ស្មើនឹង a ។ បន្ទាប់មក គេយក កញ្ចប់មួយៗ ទុកដូចជាធាតុ ហើយគេ ផ្តុំ កញ្ចប់ទាំងនោះ ជាកញ្ចប់តទៅទៀត ។ ដល់ទៅ ការផ្តុំ ទី n គេ បាន កញ្ចប់ ដែលមានចំនួនធាតុស្មើនឹង a^n ដែលហៅថា « ឯកតា លំដាប់ $n+1$ »

$(unités\ d'ordre\ \ n+1)$ [29] ។

ដល់កាលណាយើងចប់ហើយ (គឺអស់កញ្ចប់ដែលអាចប្រមូល ផ្តុំបានជាមួយដុំ) នោះ ចំនួនកញ្ចប់ ដែលនៅសល់ចំពោះ ឯកតាលំដាប់នីមួយៗ មានចំនួន តូចជាង a ជានិច្ច ។ ហើយដើម្បី បង្ហាញ ចំនួនជាតុទាំងអស់ របស់សំនុំ នោះគេគ្រាន់តែ បង្ហាញ ចំនួន ឯកតានៅសល់ របស់ឯកតាលំដាប់នីមួយៗ [30] ។ ឯកតានៅសល់នេះ បានមក តាំងពី ការប្រមូលផ្តុំ ឲ្យបាន a^1 ហើយបន្ទាប់មកឲ្យបាន a^2 ហើយបន្ទាប់មកឲ្យបាន a^3 ..... ។ល។ ។ ឧទាហរណ៍ដូចជា សំនុំ E ផ្សំបានដោយ 3ខ្ទង់ពាន់ 5ខ្ទង់រយ 9ខ្ទង់ដប់ និង 7ខ្ទង់រាយ ជាដើម ។

ដូច្នេះយើងបែរជាមករកការដោះស្រាយនូវចំណោទខាងទ្រឹស្តី ដូចខាងក្រោម គឺថា ចូរដាក់ ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x នីមួយៗ (chaque entier naturel x) ជាទម្រង់ដូចខាងក្រោម នេះ ៖

$$x = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + x_3 a^3 + \dots\dots\dots + x_n a^n$$

---

[29] ឧទាហរណ៍ យើងមានលុយមួយស្បោង សុទ្ធតែក្រដាស់ មួយរៀល ហើយយើងចង់រាប់លុយ ក្នុងស្បោងនោះ តើមានប៉ុន្មានរៀល ? ដោយសព្វថ្ងៃនេះ គេប្រើ បាតស្មើនឹង 10 $(a = 10)$ នោះ ដំបូងឡើង យើងរាប់ លុយ ដាក់ជាដុំៗ ដោយមួយដុំ មាន 10សន្លឹក ។ ឧបមាយើងរាប់ទៅ បាន 34 ដុំ (មួយដុំ ស្មើនឹង 10រៀល) ហើយនៅសល់លុយរាយ 7 រៀល ។ តើយើងធ្វើដូចម្តេច តទៅទៀត ? គឺយើងធ្វើ ដូចកាលពី លុយជា រៀល អញ្ចឹង គ្រាន់តែនៅពេលនេះ លុយជា ដុំៗ វិញ ។ ដូច្នេះក្នុង 34 ដុំនោះ ប្រមូល ជាដុំៗ តទៅទៀត ហើយ យើងបាន 3 ដុំ ហើយនៅសល់ 4 ដុំ ។ ដូច្នេះ លុយក្នុងស្បោងនោះមាន ៖ 3 ដុំ ដែលមួយដុំស្មើនឹង 100 = a^2 និង 4 ដុំដែលមួយដុំ ស្មើនឹង 10 = a^1 ហើយ លុយរាយនៅសល់ 7 រៀល = $7a^0$ ។ រួមសេចក្តីទៅ លុយទាំងអស់ = $3a^2 + 4a^1 + 7a^0 = 300 + 40 + 7 = 347$ ។

[30] ដូចជា ចំពោះឧទាហរណ៍ ក្នុង លេខ 29 3ជាឯកតានៅសល់របស់ a^2 4ជាឯកតានៅសល់ របស់ a^1 7ជាឯកតានៅសល់របស់ a^0 ។

បើសិនជាយើងដោះស្រាយនូវចំណោទនេះបាន យើងគ្រាន់តែមាន សញ្ញាខុសគ្នា ចំនួន a ហៅថា លេខ $(chiffres)$ ដើម្បីនឹងតាង ចំនួនគត់ ដែល តូចជាង a ដោយ ប្រិតប្រៀប $(pour\ désigner\ les\ entiers\ strictement\ inférieurs$ à $a)$ ។

ចំពោះ និង 1 យើបានកំណត់រួចហើយ ដូច្នេះនៅខ្វះតែ $a-2$ លេខទៀតទេ ។

ហើយដើម្បី កត់ចំនួន x យើងគ្រាន់តែ សរសេរ ស៊ីត នៃលេខ ដែលតាងដោយ x_i ។

តាមទម្លាប់ គេសរសេរ ស៊ីត នៃលេខ តាមលំដាប់ ផ្ទុយពី លំដាប់ ដែលយើងបានរក លេខទាំងនោះ គឺថា សរសេរដោយចាប់ពី ចំនួនឯកតា របស់ ឯកតាលំដាប់ដែលធំជាង គេ (គឺដូចយើងសរសេរ ពី ស្តាំ ទៅ ឆ្វេង) ។ ដូច្នេះយើងសរសេរ តែម្តង

$x = x_n x_{n-1} \dots\dots\dots x_1 x_0$ ហើយគេថា x_i ជាលេខ (chiffre) របស់ ឯកតាលំដាប់ $i+1$ ។

តែចំពោះសំនួរជាទ្រឹស្តី កាលណា x ជាចំនួនមិនកំណត់ គេមិនសរសេរបៀបនេះទេ ដោយខ្លាច ច្រឡំនឹង ផលគុណនៃចំនួន ដែលតាងដោយលេខ x_i ហើយយើងតាង x ដោយ សញ្ញា បូក គឺ $x = \sum_{i=0}^{n} x_i\, a^i$ ។

ការស្នើ(III, 9, 1).

គេកំណត់ $a \geq 2$។ ពីចំនួនគត់ធម្មជាតិ x មួយ គេ ផ្តង បាន ស៊ីត មានព្រំដែន តែមួយគត់ ដោយចំនួន x_i បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ ៖

$$\boldsymbol{x_i < a} \text{ និង } \boldsymbol{x = \sum_{i=0}^{n} x_i\, a^i} \text{ ។}$$

ការបង្ហាញ

ឧបមាថា ស៊ីត (x_i) នោះមាន ដូច្នេះយើងបាន

$x = x_0 + a y_1$ ដោយ $y_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, a^{i-1}$ និង $x_0 < a$

ដែលបង្ហាញថា $\boldsymbol{x_0}$ ជាសំណល់នៃការចែក $\boldsymbol{x}$ ដោយ $\boldsymbol{a}$ ហើយ $\boldsymbol{y_1}$ ជាផលចែកប្រហាក់ប្រហែល នៃការចែក $\boldsymbol{x}$ ដោយ $\boldsymbol{a}$ ។ ហើយបន្ទាប់មក បើយើងសរសេរជាពាយ

$y_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, a^{i-1}$ នោះយើងនឹងឃើញថា x_1 ជាសំណល់នៃការចែក y_1 ដោយ a ។ ដូច្នេះ x_0 និង x_1 គឺបានដោយរបៀបតែមួយគត់ ។ ជាទូទៅ គេអាចតាំង y_k ដោយទុក $y_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, a^{i-1}$ និង $x_0 < a$ ជារូបមន្ត ចំពោះ $k = 1$ **នោះយើងបាន ៖**

$y_k = \sum_{i=k}^{n} x_i\, a^{i-k}$ ដោយ $x_k < a$

$y_k = x_k + x_{k+1}a + x_{k+2}a^2 + x_{k+3}a^3 + \dots\dots\dots + x_n a^{n-k}$ ដោយ $x_k < a$ (1)

(1) បង្ហាញថា x_k ជា សំណល់ នៃការចែក y_k ដោយ a[31] ហើយ y_{k+1} ជា លទ្ធផល ប្រហាក់ប្រហែល នៃការចែក y_k ដោយ a ។ ដោយតាំង $y_0 = x$ ហើយ ដោយ ធ្វើ រេគារ៉េង លើ k យើងឃើញថា ស្វីត (x_k) បានដោយគ្រប់គ្រាន់ កាលណា គេឲ្យ $\boldsymbol{x}$ ។ ដូច្នេះ យ៉ាងច្រើន មាន ស្វីត (x_i) តែមួយ ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ ដែលគេតម្រូវ ។

ច្រាសមកវិញ (réciproquement) ឧបមា គេឲ្យ x ហើយ បើ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\{ y_0 = x$ និង $y_k = a y_{k+1} + x_k$ ដោយ $x_k < a \}$ កំណត់ ដោយរេគារ៉េង បាន ស្វីត ពីរ (x_k) និង (y_k) នៅពេលនោះគេបាន ៖

ដោយ $a \geq 2,\quad y_k \geq a y_{k+1} \geq 2 y_{k+1}$ **=>** ដោយរេគារ៉េង លើ $k = 0, 1, 2, \dots\dots..k-1$

គេបាន $x = y_0 \geq 2^k y_k$ ពីព្រោះ

$y_k \geq 2y_{k+1}$ ឲ្យ

ចំពោះ $k = 0,\quad y_0 \geq 2\cancel{y_1}$

ចំពោះ $k = 1\quad \cancel{y_1} \geq 2\cancel{y_2}$

ចំពោះ $k = 2,\quad \cancel{y_2} \geq 2\cancel{y_3}$

[31] ហើយដោយការចែកនេះហើយ បានជា នៅពេលមួយ ផលចែក y_n តូចជាង a ដូច្នេះ យើងត្រូវឈប់ (ពីព្រោះទីនេះ យើងសិក្សាអំពីចំនួនគត់) ហើយយើងក៏យក ផលចែកនោះ ទុក ជាសំណល់ $\boldsymbol{x_n}$ ទៅវិញ $(\boldsymbol{y_n = x_n})$ ។

………………………………………..

ចំពោះ $k = k-2,\quad y_{k-2} \ge 2\cancel{y_{k-1}}$

ចំពោះ $k = k-1,\quad \cancel{y_{k-1}} \ge 2\, y_k$

ដោយគុណ $x = y_0 \ge 2^k y_k$

ទាំងសង់ខាង

$x \ge 2^k y_k$ => $x \ge 2ky_k \ge ky_k$ (ពីព្រោះ $a^n \ge na$ បើ $a \ge 2$)

$x \ge ky_k$ => ដោយ k ឡើង តែ x នៅដដែល នោះកាលណា $k > x$, y_k ដែលជាផលចែក ត្រូវតែ ស្មើនឹងសូន្យ ។ ដូច្នេះបើយើងតាងដោយ n ចំនួនគត់ធំជាងគេ ដែលឲ្យ $y_n \ne 0$ នៅពេលនោះ យើងបាន

$y_n = x_n$ [32] (2)

$y_{n-1} = ax_n + x_{n-1}$ (3) ។

ដោយ វេគារ៉ង់ លើ សន្ទស្សន៍ k ដោយ (2) និង (3) គេបាន រីឡាស្យុង ជាទូទៅ ៖.. ចូរសង្កេតថា (2) ជា រីឡាស្យុង វេគារ៉ង់ ចំពោះ $k = 0$ ហើយ (3) ជារីឡាស្យុងវេគារ៉ង់ ចំពោះ k = 1 ហើយ n គឺ មិនប្រែប្រួល[33] ចំពោះ (3) យើអាចសរសេរ ចំពោះ k = 1

$\boldsymbol{y_{n-k} = a^k x_n + x_{n-k}}$ (4) ។ ហើយ បើយើងឲ្យ $k = 0$ នោះ (4)

ឲ្យ $y_{n-0} = a^0 x_n + x_{n-0}$

ឬ $y_n = 1 \times 0 + x_n$ (ពីព្រោះនៅក្នុង $a^0 x_n$ x_n ជាផលចែកចុងក្រោយបំផុត ដូច្នេះ ត្រូវសូន្យ ហើយ សំណល់គឺ x_{n-0}) ។ ម្យ៉ាងទៀត នៅក្នុង (4) ដោយ $\mathbf{x_n}$ ជាសំណល់

[32] x_n ជា សំណល់នៃការចែក y_n ដោយ a

[33] ពីព្រោះ n យើងបានកំណត់រួចមកហើយ គឺ ជា ចំនួនគត់ដែលធំជាងគេ ដែលឲ្យ $y_k \ne 0$ ។

ចុងក្រោយបំផុតនៃការចែក x ដោយ a នោះ k នៃ $a^k x_n$ ត្រូវតែចុះ ម្ដងមួយៗ រហូត ដល់ សូន្យ គឺថា ៖

$y_{n-k} = a^k x_n + a^{k-1}x_{n-1} + a^{k-2}x_{n-2} + \ldots\ldots + a^{k-(k-1)}x_{n-(k-1)} + x_{n-k}$ (5)

ដូច្នេះ ចំពោះ $k = n$ (5) ឲ្យ ៖

$x = y_0 = a^n x_n + a^{n-1}x_{n-1} + a^{n-2}x_{n-2} + \ldots\ldots + a x_1 + x_0 = \sum_{i=0}^{n} a^i x_i$ ។

ជាទីបញ្ចប់គេបាន ការបំបែកដែលចង់រក ៖

$$\boxed{x = y_0 = \sum_{i=0}^{n} a^i x_i}$$

<u>របៀបបញ្ជាក់មួយទៀត</u>

យើងបាន រក នូវចំនួន $x_{0,} x_{1,} x_{2,} \ldots\ldots x_n$ តាមលំដាប់ ធម្មតា ។ តែ គេក៏អាចរក ចំនួន $\boldsymbol{n}$ ជាមុនសិនក៏បាន ដោយល័ក្ខខ័ណ្ឌ « n ជាចំនួនគតធំជាងគេ ដែលបំពេញ $a^n < x$ »[34]។ គេអាចបង្កើត ស៊ីត ពីរ $\boldsymbol{z_n}$ និង $\boldsymbol{x_n}$ ដោយ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ៖

$z_0 = x \quad z_k = a^{n-k} x_{n-k} + z_{k+1} \quad z_{k+1} < a^{n-k}$

ហើយគេបង្ហាញថា ចំនួន x_k គឺជា ចំនួនដែលគេរក ។

តែចំពោះ ការប្រើប្រាស់វិញ កាលណាគេចង់ដូរ បាត (la base)នៃការសរសេរចំនួន របៀបទី មួយ ឃើញថា ងាយស្រួលជាង ពីព្រោះ គេអាចជៀសវាង រក n ជាមុនដោយ គណនា a^n ។

<u>វិធីគណនា នៅក្នុង បាត a</u>

[34] ដោយការស្នើ (III, 8, 3) ដែលថ្លែងថា សំនុំនៃចំនួន n ដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង វិសមភាព (<) នោះ បន្ថែមដោយ x ។

ក្បួន ប្រើប្រាស់ សម្រាប់គណនា នៅក្នុងបាត a ក៏មិនខុសពី ក្បួនគណនា នៅក្នុង បាត 10 ដែរ ដោយគ្រាន់តែប្តូរពាក្យតែប៉ុណ្ណោះ ។ យើងមិនបានឲ្យនៅទីនេះទេ លោកអ្នក អាច បន្ថែមដោយខ្លួនឯងបាន។

នៅ ជំពូកទី ៥ យើងនឹងឲ្យ របៀបរក ឫសការេ ប្រហាក់ប្រហែល ហើយយើងនឹង បង្ហាញភាពស្រដៀងគ្នា រវាង របៀបរក ឫសការេ ប្រហាក់ប្រហែល និង របៀបរក ផលចែក ប្រហាក់ប្រហែល ៕

10. ស្វ័យស័ត្យ ប៉េអាណូ (Les axiomes de Péano)

បើយើងគ្រាន់តែចង់ថ្លែងពី ទ្រឹស្តី នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះយើងអាចលោតរំលង ទ្រឹស្តី នៃចំនួន បកតិសំខ្យា (court-circuiter la théorie de cardinaux) ដោយយើងសន្មត ជា ស្វ័យ

ស័ត្យ ចំពោះកម្មសិទ្ធិ នៃចំនួនគត់ដែលបានមកពីការសិក្សា ធ្វើនៅ កថាខ័ណ្ឌ §3 និង §4 ហើយ លទ្ធផលដែលបាន បន្តមក គឺ បានមកពីកម្មសិទ្ធទាំងនោះ ។ ម្យ៉ាងទៀតយើងមិន ចាំបាច់ សន្មត ស្វ័យស័ត្យយ៉ាងច្រើននោះទេ ជាពិសេស កម្មសិទ្ធិនៃ

លេខបូក និងលេខគុណ ។ បើយើងទុក ស្វ័យស័ត្យ ទាំងពីរ ដែលយើងបានសន្មតរួច ហើយនោះ នៅ §4 (គោលការណ៍ រេគារ៉ង់ និង ស្វ័យស័ត្យ អនន្ត - principe de récurrence et axiome de l’infini) យើងនឹងឃើញ ថា យើងគ្រាន់តែបំពេញ ដោយយកជា ស្វ័យស័ត្យ នូវការស្មើមួយ ដែលសមមូលនឹង ការស្មើ (III, 3, 5)។ នៅពេលនោះ កម្មសិទ្ធិ ឯទៀតៗ គឺចេញមកតែពី ស្វ័យស័ត្យ ទាំងបីនោះ ដែលហៅថា ស្វ័យស័ត្យប៉េអាណូ ។ ក៏អាចមាន ប្រព័ន្ធនៃស្វ័យស័ត្យ ឯទៀត ដែលអាចបង្កើតទ្រឹស្តីនៃចមនួនគត់ដែរ តែ ប្រព័ន្ធប៉េអាណូ គឺ ងាយស្រួល ហើយប្រក្រតី ជាងគេ ។ គឺ បង្កើត ចំនួនគត់ N ដោយ ពឹងផ្អែកទៅលើ ការ បូក នឹង ១ ជាបន្តបន្ទាប់រហូតទៅ ។

ការថ្លែងស្វ័យស័ត្យ

នៅក្នុង ទ្រឹស្តីស្វយ័ត (théorie autonome) នៃចំនួនគត ស្វ័យស័ត្យ អនន្ត និង គោល ការណ៍ រេគារ៉េង ពុំអាចថ្លែងបានដូច កថាខ័ណ្ឌ §4 ។ ស្វ័យស័ត្យ អនន្ត នឹងថ្លែងមុនគេ ដោយអះអាងថា មានសំនុំ N មួយដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ ថ្លែងដោយ ស្វ័យស័ត្យ ឯទៀតៗ ។ គោលការណ៍រេគារ៉េង ត្រូវ ថ្លែងដោយមិនមានប្រើ សញ្ញា $a+1$ ពីព្រោះ យើង អាចថាពុំទាន់ស្គាល់ថា អ្វីទៅ ផល បូក ហើយ តើ លេខ 1 ដំណាងអ្វី ៖ យោះង គ្រាន់តែអះអាងថា មានការអនុវត្តន៍ $\boldsymbol{f}$ មួយ ពី $\boldsymbol{N}$ ទៅ $\boldsymbol{N}$ ដែលមានកម្មសិទ្ធិខ្វះ ហើយបន្ទាប់មក លេខបូក នឹងកំណត់របៀបណាដើម្បី ឲ្យ ការអនុវត្តន៍ f អាចទៅជារូបមន្ត ដែលឲ្យ $x\to\ x+1$ គឺថា $f(x)=x+1$ ។ មុននឹងបញ្ចប់ ដើម្បីជំនួស ការស្នើ (III, 3, 5) យើងគ្រាន់តែថា f អាំងសេចទីវ ។ ដល់ប្រមូលការថ្លែងទាំងអស់នោះមកជាការថ្លែងតែមួយ យើងមានប្រព័ន្ធដូចតទៅនេះ ៖

ស្វ័យស័ត្យ ប៉េអាណូ

មានសំនុំមួយដែលយើងតាងដោយ $\boldsymbol{N}$ ហើយនិង ការអនុវត្តន៍ f ពី $\boldsymbol{N}$ ទៅ $\boldsymbol{N}$ ដែល បំពេញ លក្ខ័ខ័ណ្ឌ ដូចតទៅនេះ ៖

I. f អាំងសេចទីវ ដែលមានន័យថា $f(x)=f(y)\ \Rightarrow\ x=y$

II. មាន ធាតុ មួយនៅក្នុង តាងដោយ 0 ដែលមិននៅក្នុង $f(N)$

III. បើ A ជាផ្នែកមួយ នៃ N ដែល $0\in A$ ហើយនិង $f(A)\subset A$[35] $\Rightarrow\ A=N$ ។

តែ ស្វ័យស័ត្យ ទាំងនេះ គេថ្លែងដោយរបៀបមួយទៀត ដែលស្រួលយល់ ដូចខាងក្រោមនេះ ដែលនៅក្នុងនោះ គេជំនួស $f(x)$ ដោយ $\boldsymbol{x^+}$

- មាន សំនុំមួយតាងដោយ N ដែលចំពោះធាតុ x មួយនៃ N គេអាចផ្គូរនឹង ធាតុ

[35] $f(A)\subset A$ សូមមើលថា $f(A)$ នៅក្នុង A

កំណត់មួយតាងដោយ x^+ ហៅថា បន្ទាប់ពី x ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌដូចតទៅ ៖

I’ $y^+ = x^+ \quad => \quad y = x.$

II’ មានធាតុមួយ តាងដោយ 0 ដែលមិនមែនជា ធាតុបន្ទាប់ នៃធាតុណាមួយឡើយ។

III’ បើ A ជាផ្នែកមួយ នៃ N ដែល $0 \in A$ ហើយបើ $x \in A$ នោះបណ្តាលឲ្យ $x^+ \in A$ នៅពេលនោះ $A = N$ ។

គេសង្កេតថា ស្វ័យស័ត្យទាំងអស់នេះ ពុំបានអះអាងថា សូន្យ ជាធាតុនៃ N <u>តែមួយគត់</u> ដែលមិនមែនជាធាតុបន្ទាប់នៃធាតុណាមួយឡើយ ។ ដូច្នេះត្រូវតែបញ្ជាក់នូវចំណុចនេះ ដោយ បង្ហាញនូវការស្នើខាងក្រោមនេះ ៖

<u>ការស្នើ(III, 10, 1).</u>

ធាតុ សូន្យ ជាធាតុតែមួយគត់របស់ N ដែលមិននៅក្នុង $f(N)$ [36]។

<u>បង្ហាញ</u>

ឧបមាថាមាន ធាតុ a មួយនៅក្នុង N ដែលគេមាន $f(x) \neq a, \quad \forall x \in N$ ។

ដូច្នេះ $\boldsymbol{a}$ មិននៅក្នុង $f(N)$ ទេ ដូច្នេះ $f(N)$ នៅក្នុង $N - \{a\} = A$[37]

$f(N) \subset A \Rightarrow f(A) \subset A \quad (1)$

ដោយ $a \neq 0$ ដូច្នេះ $0 \in A$ (ពីព្រោះ $A = N - \{a\}$) =>

$A = N$ (ដោយ (1) និង III’) ។ ដូច្នេះ ផ្ទុយនឹង សមតិកម្ម (contraire aux hypothèses)

ដូចជា $A = N - \{a\}$ ជាដើម ។

<u>របៀបថ្លៃងម្យ៉ាងទៀតនៃការស្នើ</u> <u>(III, 10, 1)</u>

បើ $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{N}$ ហើយ បើ $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ នោះមាន ធាតុ $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N}$ មួយ ដែលឲ្យ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^+$ ។

---

36 បានន័យថា សូន្យនៅក្នុង N តែមិននៅក្នុង $f(N)$ ។

37 យើងតាងដោយ A សំនុំ N – {a} ។

នេះយើងឃើញឡើងវិញ ដូរតែរបៀបកត់ត្រា នូវការស្មើ (III, 4, 2) ដែលបានឲ្យអនុសាធ្យ ដ៏សំខាន់ សម្រាប់ លេខគណិតថ្នាក់ដំបូង ។
ការថ្លៃងសម្រួលនៃ ស្វ័យស័ត្យ ប៉េអាណូ អាចសន្មតថា ការអនុវត្តន៍ $f : x \to x^+$ ជា ប៊ីសេចស្យុង ពី N ទៅ $N - \{0\}$ ។ ធ្វើយ៉ាងនេះ យោះងជៀសវាងការពិភាក្សាដែលពេកចំពោះសិស្ស។
តទៅនេះ ជាតុនៃ N ហៅថា ចំនួនគត់ធម្មជាតិ (*entiers naturels*)។ ហើយយើងនឹងឃើញ នូវការកំណត់ ការគិតលេខ ជាន់ដំបូង។ និង បង្ហាញ កម្មសិទ្ធិ របស់វា ដោយប្រើតែ ស្វ័យស័ត្យប៉េអាណូ តែប៉ុណ្ណោះ ។ ការសិក្សានេះវែងបន្តិចហើយ តែមិនជាពិបាកខ្លាំងនោះទេ យើងគ្រាន់តែតាមដាន ពី ការស្មើមួយ ទៅការស្មើមួយទៀត ដែលមាន ត។គ្នា តាមហេតុផល តែប៉ុណ្ណោះ (à *respecter l'enchainement logique d'un grand nombre de propositions faciles*)។

11. សិក្សាពី ការធ្វើលេខ តាម ស្វ័យស័ត្យ ប៉េអាណូ (*Etude des opérations, d'après les axiomes de Péano*)

a) លេខបូក

ផលបូក $a + b$ កំណត់ដោយ រេគារ៉ង លើ b ដោយល័ក្ខខ័ណ្ឌ៖

(1) $a + 0 = a \qquad a + b^+ = (a + b)^+$

[សំនុំ A នៃចំនួន b ដែល $a + b$ បានកំណត់ដោយរបៀបតែមួយគត់នោះ បានបំពេញនូវល័ក្ខខ័ណ្ឌ ទាំងឡាយដែលចែងក្នុង ស្វ័យស័ត្យ (III') ដូច្នេះ $A = N$]

របៀបសរសេរ

បើយើងតាង $\mathbf{0^+ = 1}$ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\mathbf{(1)}$ ឲ្យ ៖

$a+1 = a+0^+ = (a+0)^+ = a^+ \quad => \quad a^+ = a+1$

តែនៅពេលខ្លះ យើងនៅប្រើ ការសរសេរ $\boldsymbol{a^+}$ ដោយសម្រួលការពន្យល់ខ្លះ ។

ការស្នើ(III, 11, 1).

ចំពោះ ចំនួនគត់ b ណាក៏ដោយនៅក្នុង N គេមាន $\mathbf{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ ។

ដោយ សូន្យ នៅក្នុង សំនុំ A ដែលបំពេញ វិឡាស្យុង $0+b=b$ និង $b \in A$

នោះគេបាន $0+b^+ = (0+b)^+ = b^+$ ដូច្នេះ $b^+ \in A$ ។ ដូច្នេះ $\mathrm{A}=\mathrm{N}$ ។

ការស្នើ(III, 11, 2)

លេខបូក គឺ ផ្តុំ (*l'addition est associative)* ។

a និង b ជាចំនួនគត់ពីរ មិនផ្លូវ ។ សូន្យ នៅក្នុងសំនុំ A នៃ ចំនួន c ដែលបំពេញ វិឡាស្យុង $(a+b)+c = a+(b+c)$ ។ ដោយ $c \in A$ តើ $c^+ \in A$ ដែរទេ ?

$(a+b)+c^+ = [(a+b)+c]^+ = [a+(b+c)]^+ = a+(b+c)^+ = a+(b+c^+)$

ដូច្នេះ $c^+ \in A$ ។ ដូច្នេះ $\mathrm{A}=\mathrm{N}$ ។

ការស្នើ(III, 11, 3).

ចំពោះចំនួនគត់ $\boldsymbol{a}$ ណាក៏ដោយនៅក្នុង N គេមាន ៖ $\mathbf{1}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\mathbf{1}$ ។

ដោយ តាមការសរសេរ $a+1 = a^+$ នោះយើងតាងដោយ A នុំនៃ ចំនួន a ដែលបំពេញ $a+1 = a^+$ ។ ដូច្នេះ ដោយ $0^+ = 0+1$ នោះ $0 \in A$ ។

យើងចង់បង្ហាញថាបើ $a \in A$ ($1+a=a+1$) នោះ a^+ ក៏នៅក្នុង A ដែរ ។ គឺថា $a^+ + 1 = 1 + a^+$ ។ ដើម្បីបង្ហាញយើង ចេញ ដំណើរពី ៖

$a^+ + 1 = (a+1)+1 = (1+a)+1$ [38] $= 1+(a+1)$ [39] $= 1+a^+$ ។ ដូច្នេះ $a^+ \in A$ ។

---

[38] ដោយ $a \in A$

[39] ដោយ ផ្តុំ

ដូច្នេះ A = N ។

<u>ការស្នើ(III, 11, 4).</u>

លេខបូក គឺ ត្រលប់ (l'addition est commutative)។

យើងតាងដោយ A សំនុំ នៃចំនួន a ដែលឲ្យ $a + b = b + a$ ចំពោះ b ណាក៏ដោយនៅក្នុង N ។

ដោយ ផលនៃ ការស្នើ(III, 11, 1) យើងបាន $0 \in A$ ។ ម្យ៉ាងទៀត ដោយការស្នើ (III,11,2) និង ការស្នើ (III,11,3) បើ $a \in A$ នោះ ៖

$a^{+} + b = (a+1) + b = a + (1+b) = a + (b+1)$[40] $= (a+b) + 1 = (b+a)$[41] $+ 1 =$

$b + (a+1) = b + a^{+}$ ។ ដូច្នេះ $A = N$ ។

<u>b) លេខគុណ</u>

ផលគុណ ab កំណត់ដោយ រេគារ៉ង់ លើ b ដោយ លក្ខខណ្ឌ ៖

(**2**) $a \times 0 = 0$ $ab^{+} = ab + a$ ។

យើងតាងដោយ A សំនុំ នៃ**ចំនួន** b ដែល ផល ab កំណត់ដោយរបៀបតែមួយ សំនុំនោះបំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $0 \in A$ និង ($b \in A \Rightarrow b^{+} \in A$)។ ដូច្នេះ $A = N$ ។

<u>ការស្នើ(III, 11, 5).</u>

ចំពោះ ចំនួនគត់ a ណាក៏ដោយនៅក្នុង N គេមាន $0a = 0$ ។

ពីព្រោះថា 0 នៅក្នុង សំនុំ A ដែលបំពេញ $0a = 0$។ ម្យ៉ាងទៀត បើ $a \in A$ នោះគេបាន៖

$0a^{+} = 0a + 0$[42] $= 0$ ។ ដូច្នេះ $a^{+} \in A$ ។ ដូច្នេះ $A = N$ ។

---

[40] ដោយ ការស្នើ (III,11,3)

[41] ដោយ $a \in A$

[42] ដោយ និយមន័យ ខាងលើ

<u>ការស្នើ(III, 11, 6).</u>

ចំពោះ ចំនួនគត់ a ណាក៏ដោយនៅក្នុង N គេមាន $\boldsymbol{a \times 1 = 1 \times a = a}$ ។

ដាដំបូង $a \times 1 = a0^{+} = a \times 0 + a = 0 + a = a$[43]

ម្យ៉ាងទៀត សូន្យ នៅក្នុងសំនុំ A នៃចំនួន a ដែលបំពេញ $1 \times a = a$[44]។

បើ $a \in A$ $(1 \times a = a)$ គេបាន ៖

$1 \times a^{+} = 1 \times a + 1 = a + 1 = a^{+}$ ។ ដូច្នេះ $a^{+} \in A$ ។ ដូច្នេះ $A = N$ ។

<u>ការស្នើ(III, 11, 7).</u>

វិធីគុណ មានលក្ខណៈ បំបែក វិធីបូក ។

ដោយយើងពុំទាន់ បង្ហាញ លក្ខណៈ ត្រលប់នៃ វិធីគុណ យើងនឹងបង្ហាញ ដោយ ដាច់ពីគ្នា នូវ រឹឡាស្យុង ពីរ ខាងក្រោមនេះ ៖

$(a + b)c = ac + bc$ ដោយ វិធីគុណ នៅខាងស្តាំ វិធីបូក នោះគេ « <u>ការបំបែកខាងស្តាំ</u> »

$a(b + c) = ab + a\boldsymbol{c}$ ដោយ វិធីគុណ នៅខាងឆ្វេង វិធីបូក នោះគេ « <u>ការបំបែកខាងឆ្វេង</u> »

យើង កំណត់ a និង b ហើយយើងតាងដោយ A សំនុំ នៃ c ដែលបំពេញ

$(a + b)c = ac + bc$ ។ ដូច្នេះ $0 \in A$ ។ ហើយបើ $c \in A$ នោះគេបាន៖

$(a + b)c^{+} = (a + b)c + (a + b)$[45] $= ac + bc + a + b$[46] $= (ac + a) + (bc + b)$[47] $=$

$a(c + 1) + b(c + 1) = ac^{+} + bc^{+}$ ។ ដូច្នេះ $c^{+} \in A$ ។ ដូច្នេះ $A = N$ ។

---

43 ដូច្នេះ $a \times 1 = a, \ \forall a \in \mathrm{N}$

44 ដោយ (2) $a \times 0 = 0$ ដូច្នេះ $1 \times 0 = 0 \Rightarrow 0 \in A$

45 តាមនិយមន័យ លេខ គុណ

46 ពីព្រោះ $c \in A$

47 ពីព្រោះ វិធី បូក មានលក្ខណៈ ផ្តុំ និង ត្រលប់

យើង កំណត់ a និង b ហើយយើងតាងដោយ B សំនុំ នៃ c ដែលបំពេញ $a(b+c)=ab+ac$ ។ ដូច្នេះ $0\in B$ ។ ហើយបើ $c\in B$ នោះគេបាន៖

$a(b+c^{+}) = a(b+c)^{+}$[48]$= a(b+c)+a = ab+ac+a = ab+a(c+1)$[49]$= ab+ac^{+}$ ។

ដូច្នេះ $c^{+}\in B$ ។ ដូច្នេះ $B=N$ ។

ការស្នើ(III, 11, 8).

វិធីគុណ មានលក្ខណៈ ត្រលប់ ។

យើងតាងដោយ A សំនុំ នៃ a ដែលបំពេញ $ab=ba$ ចំពោះចំនួន b ណាក៏ដោយ នៃ N (គឺជាជា សំនុំនៃចំនួន ដែលត្រលប់ជាមួយនឹងចំនួនឯទៀតៗ នៃ N)។ ដូច្នេះ $0\in A$ ។ ហើយបើ $a\in A$ នោះគេបាន៖

$ba^{+}=ba+b=ab+1b=(a+1)b=a^{+}b \Rightarrow a^{+}\in A$ ។ ដូច្នេះ $A=N$ ។

ការស្នើ(III, 11, 9).

វិធីគុណ មានលក្ខណៈ ផ្តុំ ។

យើង កំណត់ a និង b ហើយយើងតាងដោយ A សំនុំ នៃ c ដែលបំពេញ $(ab)c=a(bc)$ ។ ដូច្នេះ $0\in A$ ។ ហើយបើ $c\in A$ នោះគេបាន៖

$(ab)c^{+}=(ab)c+ab=a(bc)+ab=a[(bc)+b]=a[b(c+1)]=a(bc^{+}) \Rightarrow c^{+}\in A$

ដូច្នេះ $A=N$ ។

កម្មសិទ្ធិ ពីបូរាណទាំងឡាយដែល នៃលេខបូក និង លេខគុណ បានរៀបចំឡើងវិញ ដោយគ្មានខ្វះ ។ តែដើម្បីឲ្យចប់សព្វគ្រប់ យើងត្រូវមានការស្នើពីរ ថែមទៀត ដូចតទៅនេះ ដែលនៅក្នុងទ្រឹស្តី សំនុំ គេមើលទៅឃើញច្បាស់ដោយមិនចាំបាច់បង្ហាញ។

---

[48] តាមនិយមន័យ លេខ បូក

[49] ពីព្រោះ $c\in A$

ការស្មើ(III, 11, 10).

ដើម្បី ផលបូក $a+b$ ស្មើនឹងសូន្យ នោះ ត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ a និង b ស្មើនឹង សូន្យទាំង ពីរ ។

លក្ខខ័ណ្ឌ គ្រាន់តែ $(condition\ suffisante)$

$a=0$ និង $b=0$ => $a+b=0$ គឺច្បាស់តែអញ្ចឹងហើយ $(c'est\ évident)$

លក្ខខ័ណ្ឌ ត្រូវតែ $(condition\ nécessaire)$

$a+b=0$ => $a=0$ និង $b=0$

ឧបមា ថា $b \neq 0$ ដោយ ការស្មើ (III, 10, 1) មាន ចំនួន c មួយ ដែលឲ្យ $b = c^+$

ដូច្នេះ $a+b=a+c^+=(a+c)^+$ => $a+b \neq 0$ (ដែលផ្ទុយពី សម្មតិកម្ម) ។ ដូច្នេះ b ត្រូវតែ ស្មើនឹងសូន្យ ។ $b=0$ => $a=0$ ។

ការស្មើ(III, 11, 11).

ដើម្បី ផល ab ស្មើនឹងសូន្យ នោះ ត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ ក្នុង ចំនួន a និង b មានចំនួន ណាមួយស្មើនឹង សូន្យ យ៉ាងហោចណាស់ ។

លក្ខខ័ណ្ឌ គ្រាន់តែ $(condition\ suffisante)$

$a=0$ ឬ $b=0$ => $ab=0$ គឺច្បាស់តែអញ្ចឹងហើយ $(c'est\ évident)$

លក្ខខ័ណ្ឌ ត្រូវតែ $(condition\ nécessaire)$

$ab=0$ => $a=0$ ឬ $b=0$

បើ $ab=0$ **ហើយ** ឧបមា ថា $b \neq 0$ ដោយ ការស្មើ (III, 10, 1) មាន ចំនួន c មួយ ដែលឲ្យ $b = c^+$

ដូច្នេះ $0 = ab = a\,c^+ = ac + a$ ។ ហើយរីឡាស្យុង $ac+a=0$ បង្ខំឲ្យ $a=0$ តាមការស្មើ (III, 11, 10) ។ ដូច្នេះ $a=0$ ។

នៅក្នុង **ជំពូក**-III នេះ យើងបានសិក្សាតាំងពី កថាខណ្ឌ §1 ដល់ §11។

ចាប់តាំងពីពេលនេះទៅ យើងគ្រាន់តែយកការសិក្សា អំពីទ្រឹស្តីនៃ ចំនួនគត់ ចាប់ពី **§5** ដោយកំណត់យក និយមន័យនៃ សំនុំដែលមាន ចំនួន ធាតុ **n** ដូចខាងក្រោមនេះ៖ (គឺថា ការស្មើ (III,7, 1) ទៅជានិយមន័យ ហើយ យើងថ្លែងថា ៖)

និយមន័យ

គេថា សំនុំ E មិនអនន្ត ($E\ est\ fini$) ហើយ មានចំនួនធាតុ n បើកាលណា មាន ប៊ីសេចស្យុង ពី សំនុំនោះ ទៅលើ N_n។ ចំនួន n ហៅថា ការឌីណាល់ នៃ E ហើយ គេសរសេរ $card(E)$។

នោះយើងអាច ជំនួសទ្រឹស្តី នៃ ការឌីណូ ថ្លែងនៅ §1 ដល់ §4 ដោយការថ្លែងជាស្វ័យស័ត្យ ធ្វើនៅក្នុង §10 និង §11 ហើយ បន្ទាប់មក ទើបយើង បញ្ចូលការសិក្សាដែលបានធ្វើនៅ ក្នុង §5 ដល់ §9 ៕

12. ការប្រៀបធៀប នូវរបៀបទាំងពីរ (*Comparaison des méthodes*).

យើងឃើញថាក្នុងការសិក្សានូវ ទ្រឹស្តីនៃចំនួនគត់ នេះ មានពីរ របៀប។ របៀបទី១ គឺចាប់ពី §1 ដល់ §9 ។ ហើយរបៀបទី ២ ចាប់ពី §10, §11 និង §5 ដល់ §9 ។

បានជាខ្ញុំ យកមកជូននូវ របៀបទាំងពីរ នេះ គឺដើម្បី យើងទម្លាប់ នូវការបង្ហាញដោយប្រើ របៀបរេគារ៉ង់ ដែលយើងច្រើនតែជួបនៅក្នុងចំណោទ លើ « ស្វីត »។ ម្យ៉ាងទៀតយើងកាន់តែស្គាល់ថាអ្វីទៅ ប៊ីសេចស្យុង អ្វីទៅ សំនុំអនន្ត និង សំនុំ មិនអនន្ត ។ ឧទាហរណ៍ ៖

សំនុំ មិនអនន្ត មាន កម្មសិទ្ធិ តទៅនេះ៖ « E **មិនអនន្ត** កាលណា មិនមាន

ប៊ីសេចស្យុងណាមួយ ពី E ទៅ ផ្នែកមួយនៃ E ក្រៅតែពី E[50] » ។

ឧទាហរណ៍ ជាក់ស្តែង ដូចជា នៅក្នុងថ្នាក់រៀន បើចំនួនកៅអី មានតិចជៀង ចំនួន សិស្ស នោះ មុខតែមានសិស្សឈរខ្លះហើយ ទុកជារៀបចំសិស្សឲ្យអង្គុយ តាមរបៀប ណាក៏ដោយ ។

<u>ចំពោះសំនុំ អនន្ត</u> វិញ ឧទាហរណ៍ ដូចជា ៖

« សំនុំ អនន្ត N មាន ប៊ីសេចស្យុង ទៅលើ $N^* = N - \{0\}$ កំណត់ដោយ $x \to x + 1$ » ៕

==================== **ចប់ ជំពូក ទី ៣** ================

III – 13. លំហាត់ មានចម្លើយ

ខ្ញុំ ជ្រើសតែ លំហាត់ បន្តិចបន្តួចទេ យកមកជូន ទុកគ្រាន់នឹងយល់ មេរៀនខាងលើនេះ ឲ្យកាន់តែច្បាស់។ បើសិនជា ខ្ញុំពន្យល់បន្ថែមពីសំនួរ សូមកុំយកការពន្យល់នោះ ជា ចម្លើយ នៃលំហាត់ ពោលគឺ ត្រូវឆ្លើយតែទៅតាមសំនួរក្នុង លំហាត់ នោះគ្រប់ គ្រាន់ហើយ ។

III – 13 – 01.

នៅក្នុង ថ្នាក់រៀនមួយ មានកូនសិស្ស A, B, C, ……..W, X

និង តុវែង ព្រមទាំង កៅអី រៀបជាពីរ ជួរ R1 **នឹង** R2 **ដូចខាងក្រោមនេះ ។**

ចូរ រក បកតិសខ្យា នៃ សិស្សនៅក្នុងថ្នាក់ទាំងអស់ និង បូរណសំខ្យា នៃ សិស្ស *A, F,T* និង *V* ។

*

*

*

*

[50] តាម ការសន្មត E ក៏ជាផ្នែកមួយ នៃ E ដែរ ។

	R1				R2		
	Col-1	Col-2	Col-3		Col-1	Col-2	Col-3
Tab-1	A	B	C		M	N	O
Tab-2	D	E	F		P	Q	R
Tab-3	G	H	I		S	T	U
Tab-4	J	K	L		V	W	X

ចម្លើយ

a/ *បកតិសខ្យា នៃ សិស្សនៅក្នុងថ្នាក់ទាំងអស់*

នៅជួរ R1 សិស្សទាំងអស់មាន $3 \times 4 = 12$ (ពីព្រោះ មួយ តុ មានកូនសិស្ស ៣ នាក់)

នៅជួរ R2 សិស្សទាំងអស់មាន $3 \times 4 = 12$ (ពីព្រោះ មួយ តុ មានកូនសិស្ស ៣ នាក់

ដូច្នេះ បកតិសខ្យា នៃ សិស្សនៅក្នុងថ្នាក់ទាំងអស់ គឺ 24

b/ *បូរណសំខ្យា នៃ សិស្ស A, F, T និង V*

b-1. បូរណសំខ្យា នៃ សិស្ស A គឺ បន្ទាត់ទី១ (Tab-1) និង ជួរទី១ (R1) និង សសរទី១ (col-1) រួមសេចក្តីទៅគឺ [(Tab-1), (R1, Col-1)] ។

ចំពោះបូរណសំខ្យា នៃសិស្សឯទៀតៗ ក៏រៀបជាជួរ ជាបន្ទាត់ ជាសសរ ដោយរបៀបតែមួយ គឺ ៖

បូរណសំខ្យា នៃ សិស្ស F = [(Tab-2), (R1, Col-3)]

បូរណសំខ្យា នៃ សិស្ស T = [(Tab-3), (R2, Col-2)]

បូរណសំខ្យា នៃ សិស្ស V = [(Tab-4), (R2, Col-1)] ។

III – 13 – 02.

សរសេរ ចំនួន 9 999 នៅក្នុងបាត 9 និងនៅក្នុងបាត 99 ។

តាមការស្នើ(III, 9, 1) ដើម្បី សរសេរ ចំនួនគត់ x ក្នុងបាត $a \geq 2$ នោះ ជាដំបូង គេយក x ចែកនឹង a គេបាន សំណល់ x_0 និង ផលចែក y_1 ហើយ បន្ទាប់មកទៀត គេយក y_1 ចែកនឹង a គេបាន សំណល់ x_1 និង ផលចែក y_2 ហើយ បន្ទាប់មកទៀត គេយក y_2 ចែកនឹង a គេបាន សំណល់ x_2 និង ផលចែក y_3 ហើយ បន្ទាប់មកទៀត គេយក បេះ តែបន្ត ការធ្វើ លេខចែកនេះ លុះដល់ចែកលែងកើត គឺ នៅពេលដែល ផលចែក ចុងក្រោយគេ y_n តូចជាង a នោះទើបគេឈប់ចែក ហើយគេ y_n ជាសំណល់ចុងក្រោយ

ដូច្នេះ $y_n = x_n$ ។ នៅទីបញ្ចប់ ចំនួន x បានទៅជា ៖

$x = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \ldots\ldots + x_1 a^1 + x_0 a^0$ (1)

ឥឡូវយើង ប្រើ រូបមន្ត នេះ ដោយ យកបាត 10 និង ចំនួន $x = 2346$

2346 *ចែកនឹង* 10 *យើងបាន សំណល់* 6 *និងផលចែក* 234 (n= 0)

23 *ចែកនឹង* 10 *យើងបាន សំណល់* 3 *និងផលចែក* 2 (n=2)

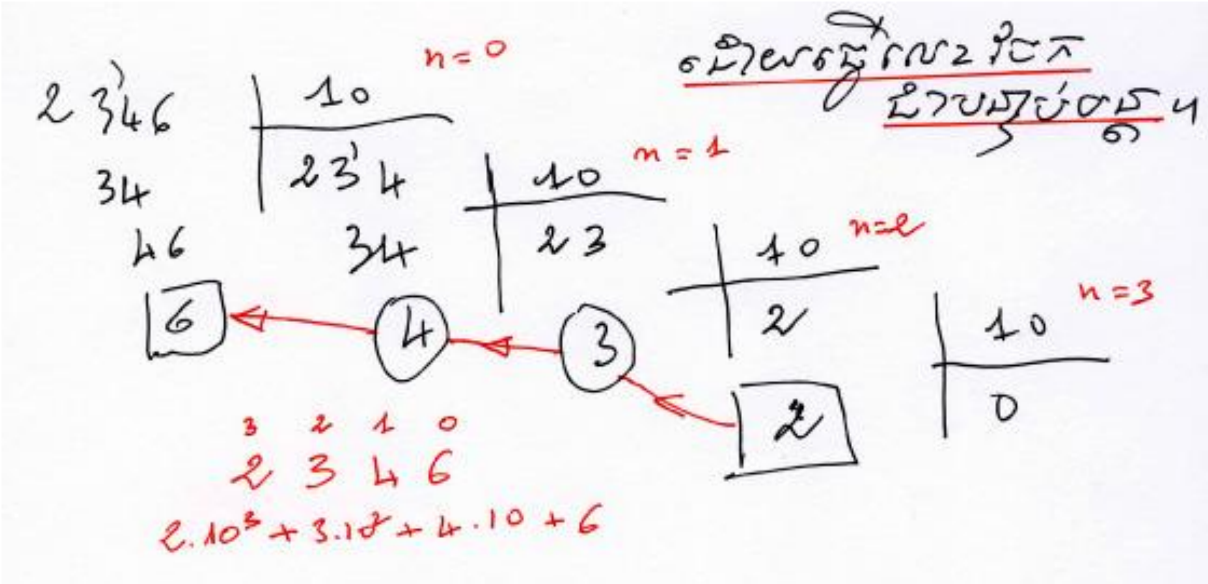
2 *ចែកនឹង* 10 *យើងបាន សំណល់* 2 *និងផលចែក* 0 (n=3)

តាមរូបមន្ត (1) *យើងបាន* $2346 = 2\,10^3 + 3\,10^2 + 4\,10^1 + 6$ ។

ដល់គេសរសេរ គេ មិនសរសេរ $(2\,10^3 + 3\,10^2 + 4\,10^1 + 6)$ *ទេ តែគេសន្មត សរសេរ ជា* 2346 *វិញ ។ យើងធ្វើលេខចែកធម្មតា ដូច ជា ៖*

*

*



<u>ឥឡូវ យើងត្រឡប់មក ចំណោទ ដែលត្រូវធ្វើ</u>

1/ ដោយចែក បន្ទាប់បន្តគ្នា 9999 ដោយបាត 9 យើងបាន ៖

$9999 = 1\ 9^4 + 4\ 9^3 + 6\ 9^2 + 4\ 9^1 + 0\ 9^0$ ។ ដូច្នេះ $(9999)_{10} = (14640)_9$

2/ ដោយចែក បន្ទាប់បន្តគ្នា 9999 ដោយបាត 99 យើងបាន ៖

$9999 = 1\ 99^2 + 2\ 99^1 + 0\ 99^0$ ។ ដូច្នេះ $(9999)_{10} = (120)_{99}$

<u>III – 13 – 03.</u>

នៅក្នុងបាត 2 (système numération de base 2) **ចូរចែក ចំនួន 11 011 ដោយ ចំនួន 101 ។**

<u>សង្កេត</u>

សព្វថ្ងៃនេះ យើងប្រើប្រព័ន្ធដេស៊ីមាល គឺជាបាត 10 ហើយយើងក៏មាន ចំនួន លេខ ទាំងអស់ ដប់ដែរ គឺ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ។ បានន័យថា បាត របស់ប្រព័ន្ធ ស្មើនឹង ចំនួនលេខ ដែលប្រើនៅក្នុងប្រព័ន្ធនោះ។ ឧទាហរណ៍ ៖

ប្រព័ន្ធបាត 2 លេខដែលប្រើមាន ៖ 0, 1 ។

ប្រព័ន្ធបាត 8 លេខដែលប្រើមាន ៖ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ។

ប្រព័ន្ធបាត 16 លេខដែលប្រើមាន ៖ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F ។

ហេតុអ្វី បានជា បាត ស្មើនឹង ចំនួន លេខ នៅក្នុងបាតនោះ នោះមកពី លេខ ដែល ដំណាង ចំនួនគត់នីមួយៗ បានមកពី សំណល់ កាលណាយើងចែកចំនួននោះ ដោយ បាត។ ហើយដោយ ក្នុងការធ្វើលេខចែក សំណល់ ត្រូវតូចជាងបាត ជានិច្ច។ បើ បាត 10 នោះសំណល់ ធំបំផុត គឺ 9 ហើយដោយ លេខសូន្យត្រូវមានជានិច្ច ដូច្នេះ 9 + 1 = 10 ។ ក្នុងប្រព័ន្ធ បាត16 អក្សរ A តាងចំនួន 10, អក្សរ B តាងចំនួន 11, អក្សរ C តាងចំនួន 12, អក្សរ D តាងចំនួន 13, អក្សរ E តាងចំនួន 14, អក្សរ F តាងចំនួន 15។

<u>ឥឡូវ យើងត្រឡប់មក ចំណោទ ដែលត្រូវធ្វើ</u>

នៅក្នុងចំណោទនេះ គឺ ប្រព័ន្ធបាត 2 ហេតុនេះហើយបានជា ចំនួនទាំងពីរ ដែលគេឲ្យ សរសេរដោយលេខ មានតែ ពីរ គឺ 0 និង 1 ។ ដោយយើងចេះធ្វើលេខចែកតែចំពោះ

លេខនៅក្នុង បាត 10 ដូច្នេះ យើង ត្រូវ ប្តូរ ចំនួនទាំងពីរនោះ មក បាត 10 សិន ដល់ យើងបាន លទ្ធផលហើយ ទើបយើង ផ្លូវ លទ្ធផលនោះ មកបាត 2 វិញ ។

$11\,011 = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$

$= 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$

$101 = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$
$= 4 + 0 + 1 = 5$

$27 = 5.5 + 2$ => ផលចែក = 5 => <u>នៅក្នុង បាត2 ផលចែក = 101</u>

សំណល់ = 2 => <u>នៅក្នុង បាត2 សំណល់ = 10 ។</u>

<u>III – 13 – 04.</u>

ដោយប្រើ ភាពដូចគ្នា **(identité)** ៖

$\boldsymbol{x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots\ldots + x - 1)}$ **(1)**

ចូរ បង្ហាញថា $k^n - 1$ ចែកដាច់ នឹង k-1 , ចំពោះ k ណាក៏ដោយ ដែលធំជាង 1 ($k > 1$) ។

ដោយ លទ្ធផលនេះ ចូរបង្ហាញថា ចំនួន ដែលសរសេរ ក្នុង ប្រព័ន្ធបាត k ចំនួននោះ កុងគ្រុយ ម៉ូដុយឡូ k – 1 នឹង ផលបូក នៃ លេខទាំងអស់ នៃចំនួននោះ (គេថា ចំនួន ពីរ កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ p កាលណា ផលសង វាង ពីរចំនួននោះ ចែកនឹង p ដាច់) ។

<u>បង្ហាញ</u>

1/ *ដោយប្រើ* (1) *យើងបាន ៖*

$k^n - 1 = (k-1)(k^{n-1} + k^{n-2} + k^{n-3} + \ldots\ldots + k - 1)$ *ដូច្នេះ*

$\frac{k^n - 1}{k-1} = k^{n-1} + k^{n-2} + k^{n-3} + \ldots\ldots + k - 1$ => $k^n - 1$ *ចែកដាច់នឹង* $k - 1$ ។

2/ *យើងតាងដោយ* **A** *ចំនួន ដែលសរសេរ ក្នុងបាត* **k** *គឺ*

A = $x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots\ldots\ldots x_2 x_1 x_0$

$= x_n k^n + x_{n-1} k^{n-1} + \ldots\ldots\ldots. + x_2 k^2 + x_1 k + x_0$

និង B *ចំនួន នៃផលបូក នៃ លេខ ទាំងអស់ របស់* A

B = $x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots\ldots\ldots + x_1 + x_0$

ឥឡូវ យើង គណនា **A – B** :

A – B = $(x_n k^n + x_{n-1} k^{n-1} + .. + x_1 k + x_0)$ - $(x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots\ldots\ldots + x_1 + x_0$

$= x_n(k^n - 1) + x_{n-1}(k^{n-1} - 1) + \ldots\ldots + x_1 (k - 1)$ (2)

ដោយប្រើ ភាពដូចគ្នា (1) *យើងឃើញថា នៅក្នុង* (2) *តួមួយៗ*

$(k^n - 1)$, $(k^{n-1} - 1)$, $(k^{n-2} - 1)$, $\ldots\ldots, (k-1)$ *សុទ្ធតែ ចែក ដាច់ ដោយ* $(k-1)$ *ទាំងអស់ ៕*

<u>**III – 13 – 05**</u>

ចំពោះ ចំនួនគត់ n **ណាមួយក៏ដោយ គេអាចផ្គុំ នឹង ចំនួន គត់** x <u>**ធំជាងគេ**</u> **ដែលបំពេញ**
$x^2 \le n$ **ហើយ គេតាង** $n = x^2 + y$ **(ចំនួន** x *ហៅថា ឬសការេ ប្រហាកប្រហែល នៃ* n) ។

a/ **ចូរបង្ហាញថា ចំនួន** x *និង* y **មានលក្ខណៈកំណត់ដោយ វិឡាស្យុង**
$n = x^2 + y$ *នឹង* $y \le 2x$ **។**

b/ **បន្ទាប់មក ដោយ ប្រើលក្ខណៈនេះ** *ចូរបង្ហាញថា*
ការអនុវត្តន៍ $n \to (x, y)$ **បង្កើតបានជា ប៊ីសេចស្យុង ពី** N **ទៅលើសំនុំ ដែលមានធាតុ ជា គូ នៃចំនួនគត់** x, y *ដែល បំពេញ* $y \le 2x$ ។

<u>*បង្ហាញ*</u>

1/ *ដោយ* $n = x^2 + y$ *ជា សមីការ ដែល គេ កំណត់ រួចហើយ។ យើងនៅសល់តែ* $y \le 2x$ *ដែលត្រូវបង្ហាញ ។ ដោយ* x *ត្រូវបំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ជា ចំនួនគត់ ធំជាងគេ ដែល បំពេញ* $x^2 \le n$ *យើងនឹងបកស្រាយ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ នេះ ៖*

តាមធម្ម បើ គេឲ្យ $n = 17$ *នោះ* $x^2 \le n$ *មានច្រើន ដូច ជា* $2^2 \le 17$, $3^2 \le 17$, $4^2 \le 17$ *ជាដើម ។ តែ បើគេបន្ថែម ថា* x *ដែលធំជាងគេនោះ មាន តែ* $x = 4$ *មួយ ទេ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ នេះ ។ ហេតុអ្វី បានជាថា* $x = 4$ *ជាងគេ ពីព្រោះ បើយក* $x = 5$ *នោះ* $x^2 = 25 > 17$ *។ ដែលខុសនឹង លក្ខខណ្ឌ* $x^2 \le n$ ។

រួមសេចក្តីទៅ ដើម្បី បកស្រាយ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ថា x *ដែលធំជាងគេនោះ យើង សរសេរ ជា វិសមីការ* (*inéquation*) $(x+1)^2 > n$ *។ ដែលឲ្យ* $(x+1)^2 > x^2 + y$ => $x^2 + 2x + 1 > x^2 + y$ *ឬ* $2x + 1 > y$ *ឬ* $2x \ge y$ *ពីព្រោះចំនួនគត់ បន្ទាប់ពី* $2x$ *គឺ* $2x + 1$ *។ ដូច្នេះ យើងអាចថ្លែងថា «* **ឫស ការេ ប្រហាក់ប្រហែល នៃ ចំនួនគត់** n *គឺ* **ចំនួន** x *គត់ ដែល បំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ* **៖**

(C1) $\quad n = x^2 + y$ **និង** $2x \ge y$ » ។

2/បង្ហាញថា ការអនុវត្តន៍ $f : n \longrightarrow (x,y)$ ជា ប៊ីសេចស្យុង ពី N ទៅលើសំនុំនៃគូ (x,y) ។

ដោយ ល័ក្ខខ័ ណ្ឌ (C1) យើងឃើញថា ចំពោះ ចំនួន $\boldsymbol{n}$ ណាមួយក៏ដោយ នៅក្នុង $\boldsymbol{N}$ គេបាន ចំនួន គូ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ តែមួយគត់ នៅក្នុង សំនុំ $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ ។ ហើយ បើ $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$ និង $\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m})$ ឲ្យ ដោយនិយមន័យ របស់ $\boldsymbol{x}$ និង $\boldsymbol{y}$ ខាងលើ គេបាន៖

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \text{ និង } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}) = (\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1})$$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}) \Rightarrow (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1}) \Rightarrow x = \boldsymbol{x_1}$ និង $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_1}$ $(\boldsymbol{C2})$ ។

ហើយដោយ ***(C1)*** យើងបាន $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ និង $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{y_1}$ ។ ដោយ $(\boldsymbol{C2})$ យើងបាន $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$ ។ ដូច្នេះ $\boldsymbol{f}$ អាំងសេចទីវ ។

បើកាលណា គេឲ្យ គូ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ មួយនៅក្នុង $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ នោះតើគេអាចរក ចំនួនគត់ $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$ មួយបានទេ? យើងឆ្លើយថាបាន ពីព្រោះតាម (C1) $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{y}$ ។

ដូច្នេះ f សឺរ្យេសេចទីវ ។ ដោយ f អាំងសេចទីវដែរនោះ ដូច្នេះ នៅទីបំផុត f ប៊ីសេចទីវ ។

III – 13 – 06.

គេ តាងដោយ x_n ការឌីណាល នៃសំនុំ នៃធាតុដែលជាផ្នែកៗ របស់សំនុំមួយ ដែលមាន ចំនួនធាតុទាំងអស់ n ។

a/ ចូររក x_n ដោយត្រង់តែម្តង ចំពោះ $n = 0,1,2,3.$

b/ បង្ហាញដោយ រេគាំរ៉េង ថា គេបាន $x_{n+1} = x_n + x_n$ ។ ដោយលទ្ធផលនេះ ចូរបង្ហាញ ថា x_n ជា ចំនួន មិនអនន្ត និង $x_n = 2^n$ ។

a/ ដើម្បី រក x_0, x_1, x_2, x_3 យើងយកជា ឧទាហរណ៍ សំនុំ ដែល មាន ចំនួន ធាតុ ស្មើ នឹង 0, 1, 2, 3 ។

ចំពោះ $\mathrm{n} = 0$ សំនុំ ដែលគ្មាន ធាតុ គឺ សំនុំ ទទេ $\emptyset \Rightarrow x_0 = 1$

ចំពោះ n = 1 សំនុំ មាន មួយ ធាតុ a មានផ្នែក ៖ $\emptyset$ និង $\{a\}$ => $x_1 = 2$

ចំពោះ n = 2 សំនុំ មានពីរ ធាតុ a, b មាន ផ្នែក ៖ $\emptyset$, $\{a\}, \{b\}$ និង $\{a, b\}$ => $x_2 = 4 = 2^2$

ចំពោះ n = 3 សំនុំ មាន បី ធាតុ a, b, c មានផ្នែក ៖

$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ => $x_3 = 8 = 2^3$ ។

<u>***b/*** *បង្ហាញដោយ វេគារ៉េង ថា គេបាន*</u> $x_{n+1} = x_n + x_n$ (1)

យើង ឃើញថា ចំពោះ n = 0, $x_{0+1} = x_0 + x_0 \Leftrightarrow x_1 = x_0 + x_0 \Leftrightarrow 2 = 1 + 1$ (ត្រូវ)

ឥឡូវ យើងសន្មត ថា (1) ត្រូវចំពោះ សំនុំដែល មាន n ធាតុ គឺថា យើង មាន

$x_{n+1} = x_n + x_n$ ហើយយើងត្រូវ បង្ហាញថា (1) ក៏ត្រូវ ចំពោះសំនុំ មាន

$n + 1$ ធាតុ គឺថា $x_{n+2} = x_{n+1} + x_{n+1}$ ។

ចូរសង្កេត ឧទាហរណ៍ខាងលើ ចំពោះ $n = 2$ និង $n = 3$ តើ ផ្នែកផ្សេងៗ នៃសំនុំ ចំពោះ $\boldsymbol{n = 2}$ និង ផ្នែកផ្សេងៗ នៃសំនុំ ចំពោះ $\boldsymbol{n = 3}$ មាន ផ្នែកណាខ្លះដូចគ្នា និង ផ្នែកណាខ្លះខុសគ្នា កាលណាយើង បន្ថែម តែមួយ ធាតុ ទៅក្នុង សំនុំដែលមាន 2 ធាតុ ($\boldsymbol{n = 2}$) រួចទៅហើយ ដើម្បីបានជាសំនុំដែលមាន 3 ធាតុ ($\boldsymbol{n = 3}$) ។ ដូចនៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ មានសំនុំ $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ និង សំនុំ $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ ។ យើង អាច សរសេរ

$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \cup \{\boldsymbol{c}\}$ ដោយ $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \cap \{\boldsymbol{c}\} = \emptyset$ ។ ដូច្នេះ ផ្នែកទាំងឡាយ របស់ $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ ជា ផ្នែក មកពី សំនុំ {a,b} បូក នឹងផ្នែក ដែលបាន ដោយ បញ្ចូល ធាតុ $\boldsymbol{c}$ ទៅក្នុងផ្នែក ទាំងអស់ របស់សំនុំ $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ ។ ដូច្នេះ $\boldsymbol{x_3 = x_2 + x_2}$ ។

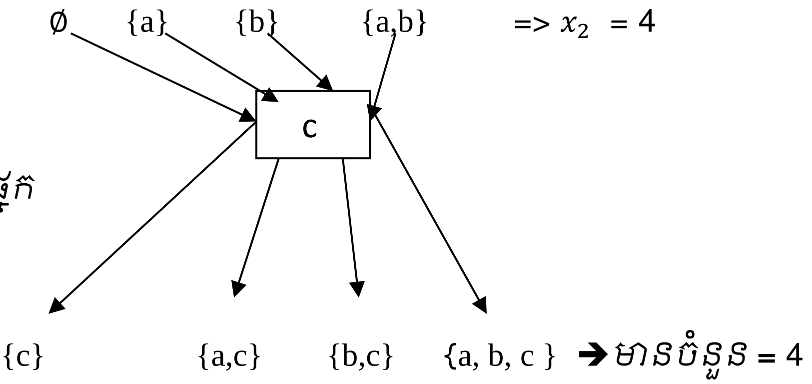
ចូរមើលរបៀប បន្ថែម $\boldsymbol{c}$ ទៅក្នុង ផ្នែកទាំងឡាយ របស់សំនុំ $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ ដូចខាងក្រោមនេះ ៖

ផ្នែកនៃ សំនុំ $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ គឺ ៖

*

*

ដោយបញ្ចូល c ទៅក្នុង ផ្នែក ខាងលើនេះ គេបាន ផ្នែក ខាងក្រោម គឺ ៖



ដែលមានធាតុ c នៅក្នុងនោះ ។ ដូច្នេះ ផ្នែកទាំង អស់ របស់ សំនុំ {a, b, c} ដែលស្មើ នឹង ប្រជុំ នៃសំនុំ ពីរ ដាច់ពីគ្នា {a,b} និង $\{c\}$ ផ្នែកទាំងអស់នោះមាន ចំនួន $x_2 + x_2$ ។

ជាទូទៅ យើង កំណត់ដោយ E សំនុំដែលមាន n ធាតុ ហើយ E' សំនុំដែលមាន $n+1$ ធាតុ ដែលបានដោយ បន្ថែម ទៅក្នុង E នូវធាតុ x មួយថ្មី គឺថា $E' = E \cup \{x\}$ ហើយ $E \cap \{x\} = \emptyset$ ។ យើងតាងដោយ $\mathcal{P}$(E) សំនុំនៃផ្នែកទាំងអស់របស់ E និង $\mathcal{P}$(E') សំនុំនៃផ្នែកទាំងអស់របស់ E' ។ ដូច្នេះ $\mathcal{P}$(E') អាចចែក ជា ពីរ សំនុំ A និង B ដាច់ពីគ្នា ហើយ អេគីប៉ូតង់ (équipotent) នឹង $\mathcal{P}$(E) ។ គឺនៅក្នុង A មានផ្នែកទាំងឡាយ នៃ $\mathcal{P}$(E') ដែល មិនមាន ធាតុ x ហើយ នៅក្នុង B មានផ្នែកទាំងឡាយ នៃ $\mathcal{P}$(E') ដែល មាន ធាតុ x។ នៅពេលនោះគេបាន ៖

x_{n+1} = card[$\mathcal{P}$(E')] = card(A) + card(B) = $xn + x_n$ ។

<u>បង្ហាញថា x_n ជា ចំនួន មិនអនន្ត និង $x_n = 2^n$</u>

<u>1. x_n ជា ចំនួន មិនអនន្ត</u>

ចំពោះ n = 0 $x_0 = 1$ => x_0 មិនអនន្ត

យើងសន្មត ថា x_n មិនអនន្ត ។ យើង ចង់បង្ហាញថា x_{n+1} ក៏ មិនអនន្ត ដែរ ។

យើងដឹងថា $x_{n+1} = x_n + x_n$ ។ ដូច្នេះ បើ x_n មិនអនន្ត នោះ $x_n + x_n$ ក៏មិនអនន្តដែរ ។

ដូច្នេះ x_{n+1} មិនអនន្ត។ ហើយ ដោយ រេគារ៉ង់ x_n មិន អនន្ត $\forall n \in N$ ។

2 . <u>បង្ហាញ ថា $x_n = 2^n$</u>

$x_{n+1} = x_n + x_n \quad => \; x_{n+1} = 2\,x_n \quad (1)$

យើងប្រើ (1) ចំពោះ n = 0, 1, 2,……,n-1

ចំពោះ n = 0 យើងបាន ៖ $\cancel{x_1} = 2\,x_0$

ចំពោះ n = 1 យើងបាន ៖ $\cancel{x_2} = 2\,\cancel{x_1}$

ចំពោះ n = 2 យើងបាន ៖ $\cancel{x_3} = 2\,\cancel{x_2}$

…………………………………………………………………………….

ចំពោះ n = n-2 យើងបាន ៖ $\cancel{x_{n-1}} = 2\,x_{n-2}$

ចំពោះ n = n -1 យើងបាន ៖ $x_n = 2\,\cancel{x_{n-1}}$

ដោយគុណ ទាំងសង្ខាង
និងសម្រួល តួ $\boldsymbol{x_i}$ គេបាន ៖ $\Big\}$ $x_n = 2^n\,x_0 = 2^n$ ។

យើងអាចបង្ហាញដោយ វេគារ៉េង់ក៏បាន ៖

ឧបមា $x_n = 2^n$ នោះ

ដោយ $x_{n+1} = x_n + x_n = 2^n + 2^n = 2\,(2^n) = 2^{n+1}$ ។ ដូច្នេះ $x_n = 2^n$ ត្រូវ $\forall n \in N$ ៕

III – 13 – 07

ចូរបង្ហាញថា បើមាន ប៊ីសេចស្យុង f ពី N_n[51] ទៅ N_p នោះក៏មាន ប៊ីសេចស្យុង មួយ ពី N_{n-1} ទៅ N_{p-1} ដែរ ។

ឥឡូវនេះ យើងរកប៊ីសេចស្យុង មួយ ពី N_{n-1} ទៅ N_{p-1} ដោយយើងប្រើ ប៊ីសេចស្យុង f ពី N_n ទៅ N_p ។ ប៊ីសេចស្យុង f មាន ពីរ ករណី ៖

---

[51] តាមការកត់ត្រា $\boldsymbol{N_n}$ គឺ ជា សំនុំនៃចំនួនគត់ $N_n = [0, n-1]$ ហើយ N_{n-1} គឺ សំនុំ នៃចំនួនគត់ ពី 0 ទៅ $n-2$ ។ $N_{n-1} = [0, n-2]$ ។

$1/ \ f(n) = p$

ក្នុង ករណី នេះ ដើម្បី បាន ប៊ីសេចស្យុង ពី N_{n-1} ទៅ N_{p-1} យើងគ្រាន់តែកម្រិត ប៊ីសេចស្យុង f ឲ្យមានដែនកំណត់ ត្រឹមតែ N_{n-1} បានហើយ ។

$2/ \ f(n) \neq p$

ក្នុង ករណី នេះ ឧបមា $f(n) = p'$ => $p' \in N_p$

ដោយ $p \in N_p$ => $\exists\, n' \in N_n$ ដែលឲ្យ $f^{-1}(p) = n'$

នៅពេលនោះ យើង អាច កំណត់ ប៊ីសេចស្យុង g ពី N_{n-1} ទៅ N_{p-1} ដោយ ៖

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{បើ } x \neq n' \\ g(n') = p' & \text{។} \end{cases}$$

សង្កេត

យើងដឹងថា សំនុំ A និង សំនុំ B អេគីប៉ូតង់ កាលណាមាន ប៊ីសេចស្យុង ពី A ទៅលើ B ។ ហើយ នៅពេលនោះ $card(A) = card(B)$ ។ ដូច្នេះ លំហាត់នេះ បង្ហាញថា ៖

$n = p$ => $n - 1 = p - 1$ ។

==================== **ចប់លំហាត់** ====================

២	**បកតិសំខ្យា (ចំនួនប្រក្រតី) (nombres cardinaux)**	2
	និយមន័យ-1 អេគីប៉ូតង់ (équipotent) និយមន័យ-2 ថ្នាក់សមមូល (classe d'équivalence) ម៉ូឌុយឡូ E	
៣	**វិធីគណនា លើចំនួន បកតិសំខ្យា (opérations sur les cardinaux)**	6
	វិធីបូក និយមន័យ-1 ការស្មើ (III,3,1) វិធីគុណ និយមន័យ-2 ការស្មើ (III,3,2) រហូតដល់ ការស្មើ(III,3,5)	
៤	**បកតិសំខ្យា មានព្រំដែន (les cardinaux finis)**	13
	និយមន័យ-1 ការស្មើ (III,4,1) ស្វ័យស័ត្យនៃអនន្ត (Axiome de l'infini) ការថ្លៃងមួយទៀត របស់គោលការណ៍ ហ្គេរ៉ង់ ការស្មើ(III,4,2) គំនិតរបស់ខ្ញុំ ការស្មើ (III,4,3) បូកនិងគុណ នៃ បកតិសំខ្យា មានព្រំដែន ការស្មើ (III,4,4) ការស្មើ (III,4,5)	
៥	**វិធីសង រ៉ឡាស្យុងលំដាប់លើ N (soustraction – relation d'ordre sur N)**	22
	និយមន័យ ការស្មើ (III,5,1) ការស្មើ (III,5,2) លំដាប់ទាំងមូលលើ N (définir un ordre total sur N) កម្មសិទ្ធនៃវិសមាមាត្រ (propriétés des inégalités) ការស្មើ (III,5,3) ការស្មើ (III,5,4)	
៦	**ចំណោទ នៃការបន្ថែម និងការបន្ថយ (problème de majoration et de minoration)**	26
	ការស្មើ (III,6,1) និយមន័យ លំដាប់ល្អ (bien ordonné) ការស្មើ (III,6,2) ការស្មើ (III,6,3) នេះគ្រាមេរៀនទេ	