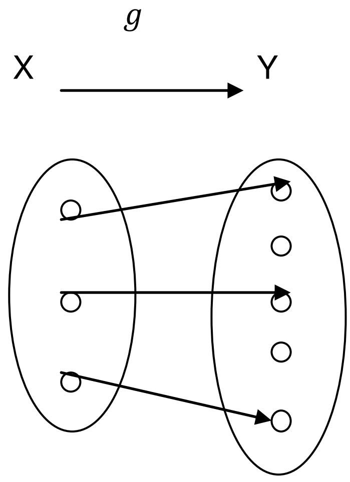
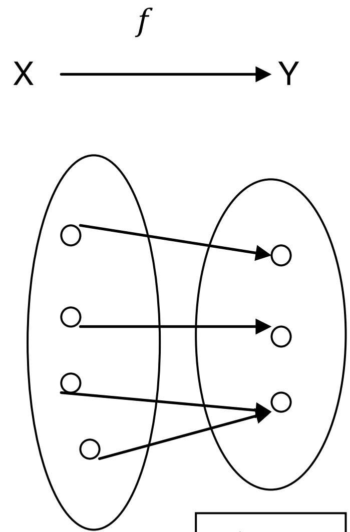
ង- អនុគមន៍ អាំងសេចទីវ (injective) សៀសេចទីវ (surjective) និង ប៊ីសេចទីវ (bijective)

និយមន័យ

ក-គេថាអនុគមន៍ g **អាំងសេចទីវ** លុះត្រាតែបើកាលណា គ្រប់រូបភាព នៃសំនុំចុង បើគូនឹងធាតុ នៃសំនុំដើម នោះមានយ៉ាងច្រើនមួយ ។ (បានន័យថា អាចមានរូបភាពដែលគ្មានធាតុដើមជាគូ)។ បើសរសេរជាគណិតសាស្ត្រ ៖ $\forall x_1, x_2 \in$ ដែនកំនត់(g) : $g(x_1) = g(x_2) \ => \ x_1 = x_2$ ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ អាំងសេចទីវ 1/ $f(x) = x$ ព្រោះ $f(x_1) = f(x_2) \ <=> \ x_1 = x_2$ 2/ $f(x) = x^3$ ព្រោះ $f(x_1) = f(x_2) <=> {x_1}^3 = {x_2}^3 =>$ $({x_1}^3 - {x_2}^3) = 0$ $(x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2) = 0 \ => \ (x_1 - x_2) = 0 =>$ $x_1 = x_2$	 **Fig-1**
ខ-គេថាអនុគមន៍ f **សៀសេចទីវ** លុះត្រាតែបើកាលណា គ្រប់រូបភាព នៃសំនុំចុង យ៉ាងហោចណាស់ ក៏មានគូនឹងធាតុ នៃសំនុំដើម មួយដែរ ។ (បានន័យថា ចំនួនធាតុនៃសំនុំដើម ច្រើនឬក៏ស្មើនឹងចំនួនធាតុនៃសំនុំចុង) ។ បើសរសេរជាគណិតសាស្ត្រ ៖ $\forall y \in$ សំនុំរូបភាព(f) $(\exists x \ / \ f(x) = y)$ ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ សៀសេចទីវ $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi,+\pi]$ ព្រោះ $\forall y \in [-1,1], \exists x / \ sinx = y$ (1)។ ដោយយើងដឹង y ដូច្នេះ យើងអាចរកមុំ $\propto$ មួយក្នុងចន្លោះ $[-\pi,+\pi]$ ដែលមាន $\sin \propto = y$ ហើយដើម្បីរក x យើងប្រើ (1) ដោយសរសេរ $sinx = sin \propto \quad => \quad x = \propto$ និង $x = \pi - \alpha$	 **Fig-2**

ដោយ $\propto \in [-\pi ;+\pi]$ នោះ $(\pi - \alpha)$ ក៏នៅក្នុងចន្លោះ $[-\pi ;+\pi]$ ដែរ ។ ដូច្នេះ កាលណាគេឲ្យ y យើងអាចរកចំនួន x បានជានិច្ច ។ តាមនិយមន័យ អនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x) = \sin x$ ជាអនុគមន៍សៀសេចទីវ ។ ចូលមើលក្រាប $\sin(x)$ ខាងក្រោម គូរក្នុងចន្លោះ $[-2\pi; +2\pi]$ ៖

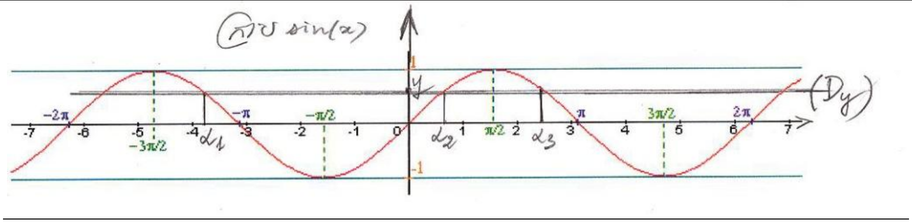


Fig-3

ក្នុងឃ្លា (1) ថា $\forall y \in [-1,1], \exists x /\ \sin x = y$ មានន័យថា យើងមាន y ។ដូច្នេះដោយ y យើងគូរបន្ទាត់ D_y ស្របនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{ox}$ យើងឃើញថា បន្ទាត់នោះកាត់ ក្រាប (**Fig-3**) ជាច្រើនចំនុច ដូចជាចំនុច អាប់ស៊ីស $\propto_1, \propto_2, \propto_3$ ជាដើម នៅក្នុងចន្លោះ $[-2\pi; 2\pi]$។តែបើនៅក្នុងចន្លោះ $[-\pi; +\pi]$ វិញ នោះមានតែ អាប់ស៊ីស $\propto_2, \propto_3$ ប៉ុណ្ណោះ ។ដោយជាក្រាប នៃអនុគមន៍ $sinus$ នោះ $\sin \propto_2 = y$ និង $\sin \propto_3 = y$ ហេតុនេះហើយបានជាយើងហ៊ានថា $\forall y \in [-1 ;1], \exists x /\ \sin x = y$ ព្រោះ x ដែលមានគឺ $\propto_2, \propto_3$ បើគេកម្រិតក្រាប តែក្នុង ចន្លោះ $[-\pi; +\pi]$ ។

គ-គេថាអនុគមន៍ h **ប៊ីសេចទីវ** លុះត្រាតែ ជាអនុគមន៍ **អាំងសេចទីវ** ផង និង **សៀសេចទីវ** ថែមទៀត ។ (បានន័យថា ចំនួនធាតុនៃសំនុំដើម និងចំនួនធាតុនៃសំនុំចុង ស្មើគ្នា)។ បើសរសេរជាគណិតសាស្រ្ត ៖

$\forall x_1, x_2 \in$ ដែនកំនត់(h) : $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ហើយនិង

$\forall y \in$ សំនុំរូបភាព(h) $(\exists x \ /\ h(x) = y)$ ។ សង្កេត ៖ អនុគមន៍ខួប ពុំអាច ប៊ីសេចទីវ បានទេ (មើល **Fig-3**) ។

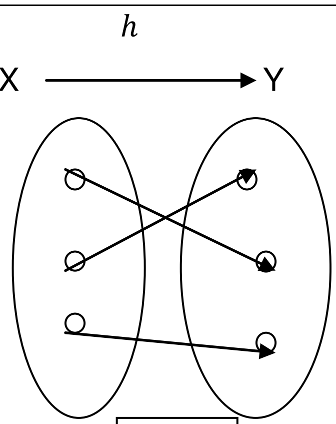


Fig-4

សង្កេត-1

*-បើយើងមើល **Fig-1** យើងឃើញថា អនុគមន៍នោះគ្រាន់តែ <u>អាំងសេចទីវ</u> តែមិនទាន់ <u>សៀសេចទីវ</u> ទេ ព្រោះនៅក្នុងសំនុំរូបភាព នៅសល់ធាតុខ្លះដែលអត់គូជាមួយនឹងធាតុនៃសំនុំដើម ។*

*-បើយើងមើល **Fig-2** យើងឃើញថា អនុគមន៍នោះគ្រាន់តែ <u>សៀសេចទីវ</u> តែមិនទាន់ <u>អាំងសេចទីវ</u> ទេ ព្រោះមានធាតុខ្លះក្នុងសំនុំរូបភាព មានគូលើសពីមួយ ក្នុងសំនុំដើម ។*

*- តាមនិយមន័យ <u>ប៊ីសេចទីវ</u> ដើម្បី ឲ្យ **Fig-1** ទៅ ជា **Fig-4** ទាល់តែក្នុងសំនុំ Y គ្មានសល់ជាតុអត់គូ បានន័យថាត្រូវដូច **Fig-2** ថែមទៀត ។ រួមសេចក្តីទៅ គឺ ត្រូវដូច **Fig-1**ផង និងដូច **Fig-2** ផង ឬក៏ថា <u>អាំងសេចទីវផង</u> និង <u>សៀសេចទីវទៀត</u> ។*

<u>***ឧទាហរណ៍** ម្យ៉ាងទៀតចំពោះ អាំងសេចទីវ សៀសេចទីវ និង ប៊ីសេចទីវ*</u>

យើងតាងដោយ X សិស្ស ថ្នាក់ ទី១០ ហើយ Yមុខវិជ្ជាខាងកីឡានិងសិល្បៈ ដែលសិស្សត្រូវយកមុខវិជ្ជាណាមួយ ក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាទាំងឡាយដែលសាលាស្នើឲ្យជ្រើសរើស ។

<u>*លក្ខខ័ណ្ឌគឺ:*</u>

១- សិស្សម្នាក់យកមុខវិជ្ជាបានតែមួយគត់ ឧបមាថាបើបានយកការហែលទឹកហើយនោះពុំអាចយកមុខវិជ្ជាអ្វីផ្សេងទៀតបានឡើយ ។

២- មុខវិជ្ជាណា ក៏សិស្សអាចរើសបានដែរ ។

បើគេតាង ដោយ m ចំនួនសិស្ស ទាំងអស់ក្នុងថ្នាក់ទី១០ និង n ចំនួនមុខវិជ្ជាកីឡានិងសិល្បៈ ទាំងអស់ដែលសាលាមាន ហើយ f ជាអនុគមន៍ពី X ទៅ Y <u>*តើត្រូវថែមលក្ខខ័ណ្ឌ អ្វីទៀត ដើម្បី ឲ្យ f ទៅ ជាអនុគមន៍ អាំងសេចទីវ សៀសេចទីវ និងប៊ីសេចទីវ ?*</u>

<u>ឆ្លើយ</u>

មុននឹងឆ្លើយ គួរសង្កេតថា លក្ខខ័ណ្ឌទី១ ជាលក្ខខ័ណ្ឌ <u>ចាំបាច់នៃអនុគមន៍ទូទៅទាំងអស់</u> ព្រោះថាធាតុដើមមួយ មិនអាច (ដោយអនុគមន៍) មានរូបភាពដល់ទៅ ពីរ ទេ ។ នេះជានិយមន័យរបស់អនុគមន៍ទាំងអស់ ។ តែ រូបភាពមួយ អាចមាន ធាតុដើមច្រើន ។	**(R-VII-01)**

១- <u>*f* ទៅ ជាអនុគមន៍ អាំងសេចទីវ</u>

ដោយមើល **Fig-1** *f* ទៅជាអនុគមន៍ <u>អាំងសេចទីវ</u> បើសិស្សតិច ហើយមុខវិជ្ជាច្រើន (គឺ $m \leq n$) និង សិស្សម្នាក់ៗ ត្រូវយកមុខវិជ្ជាខុសគ្នា ។

២- <u>*f* ទៅ ជាអនុគមន៍ សឺរសេចទីវ</u>

ដោយមើល **Fig-2** *f* ទៅជាអនុគមន៍ <u>សឺរសេចទីវ</u> បើសិស្សច្រើន ហើយមុខវិជ្ជាតិច (គឺ $m \geq n$) ។

៣- <u>*f* ទៅ ជាអនុគមន៍ ប៊ីសេចទីវ</u>

ដោយមើល **Fig-4** *f* ទៅជាអនុគមន៍ <u>ប៊ីសេចទីវ</u> បើចំនួនសិស្ស និង ចំនួនមុខវិជ្ជាស្មើគ្នា (គឺ $m = n$) និង សិស្សម្នាក់ៗ ត្រូវយកមុខវិជ្ជាខុសគ្នា ។

(ម្យ៉ាងទៀត [តាម ១- ($m \leq n$) និង តាម ២- ($m \geq n$)] => $m = n$)

<u>សង្កេត-2</u>

យើងអាច ប្តូរអនុគមន៍ អាំងសេចទីវ ឲ្យទៅជា ប៊ីសេចទីវ ដោយបន្ថយធាតុក្នុង សំនុំចុង Y

<u>ឧទាហរណ៍</u>

$X = \{1, 2, 3, 4\}$; $Y = \{a, b, c, d, e, k, p\}$; អនុគមន៍ f ពី X ទៅ Y

$f : X \longrightarrow Y$ កំនត់ដោយ : f(1) = a , f(2) = c, f(3)= d, f(4) = p

យើងឃើញថា បើយើងតាង Y1 ជាសំនុំរូបភាព(f) នោះ Y1 = {a, c, d, p}

គឺ Y1 បានដោយដកពី Y នូវធាតុ d, e, k ចេញ នៅពេលនោះ f ជាអនុគមន៍

អាំងសេចទីវ ពី X ទៅ Y1 ។

<u>សង្កេត-3</u>

យើងធ្លាប់ជួយមកហើយ កាលណាយើងគូរក្រាប នៃ អនុគមន៍ f ណាមួយ

ក្រាបនោះច្រើនតែឡើងចុះ ឡើងចុះ ហើយបើឡើងដល់កំពូលវាក៏ចុះមកវិញ

(ដូចជីវិតនៃយើងគ្រប់គ្នាដែរ) ហើយបើយើងកម្រិតយកតែ ចន្លោះ I = [a ; a+∝]

ដែលអនុគមន៍នោះឡើង និង J = [f(a), f(a+∝)]

នៅពេលនោះ យើងបាន <u>អនុគមន៍ f ប៊ីសេចទីវ ពី I ទៅ J</u> ។

សូមជ្រាបថា នៅក្នុងចន្លោះ I ដែលអនុគមន៍នោះចុះ ក៏បានដែរ នៅពេលនោះ យើងយក

J = [f(a+∝), $f(a)$] ។ <u>ដោយបន្ថយដែនកំនត់ អនុគមន៍ជាប់ធម្មតា អាចទៅជា</u>

<u>អនុគមន៍ប៊ីសេចទីវបាន ។</u>

<u>រួមសេចក្តីទៅ</u>:

កាលណាគេបន្ថយ ដែនកំនត់ ត្រឹមតែចន្លោះ I ដែលអនុគមន៍ f កើនជានិច្ច ឬ ចុះជានិច្ច គេអាចធ្វើ f ឲ្យក្លាយទៅជាអនុគមន៍ **<u>ប៊ីសេចទីវ</u>** ពី I ទៅ $f(I)$ បើសិន f ដេរីវ៉ាបលើ I ។	**(R-VII-02)**

ការសង្កេតនេះមានប្រយោជន៍ ចំពោះការសិក្សាអំពី អនុគមន៍ច្រាស ។