## ដេរីវេ $y = u^m$ ដោយ $m \in Q$ ( $m = \frac{p}{q}$ ជាដើម)

ដើម្បីទៅដល់ដេរីវេ នៃ $y = u^m$ $(m \in Q)$ យើងនឹងបង្ហាញតាមសំដាប់ដូចតទៅៈ

### ក- ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ $y = x^m$ ដោយ $m \in N$

នៅពេលនេះ យើងប្រើរបៀបបញ្ជាក់មួយ ដែលគេច្រើនប្រើកាលណារូបមន្ត ដែលត្រូវបញ្ជាក់ មានចំណងជាប់ជាមួយនឹងចំនួនគត់ ក្នុង $N$ ។

ដូចជានៅពេលនេះជាដើម

ក្នុង $y = x^m$, $m$ ជាចំនួនគត់ក្នុង $N$ ។

របៀបបញ្ជាក់នេះ បារាំងហៅថា démonstration par récurrence

ខ្ញុំសូមទុកពាក្យនេះដដែលសិន បើសិនជាពុំទាន់មានប្រើជាភាសាខ្មែរ ដោយខ្ញុំហៅថា **បញ្ជាក់ដោយរេគារ៉ង់** ដែលមានដំណើរដូចតទៅ ៖

### បញ្ជាក់ដោយរេគារ៉ង់ **(F-VI-d1)**

1/ ឧបមា រូបមន្ត F1 ត្រូវ ចំពោះ n = 1

2- គេសន្មតថា រូបមន្តនោះ ត្រូវរហូតដល់ n = n គឺ គេសន្មត់ថា F2, F3, F4, …..Fn ត្រូវទាំងអស់ បានន័យថា គេអាចប្រើ រូបមន្ត ចាប់តាំងពី F1, F2, F3, ………..Fn ទៅបាន

3- គេត្រូវបង្ហាញថា រូបមន្តនោះ ក៏ត្រូវចំពោះ ដូរ n+1 ដែរ ។

បន្ទាប់ទៅនេះ យើងប្រើ **បញ្ជាក់ដោយរេគារ៉ង់** ដើម្បីបង្ហាញថា អនុគមន៍ $y = x^m$, $m$ ជាចំនួនគត់ក្នុង $N$ មានដេរីវេ $y' = mx^{m-1}$ គឺថា

$$\boxed{y = x^m \ (m \in N) \quad => \quad y' = mx^{m-1}}$$ **(F-VI-d2)**

1- យើងត្រូវរក ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ចំពោះ m = 1 គឺថា $y = x$

ដើម្បីរកដេរីវេ នៃ $f(x) = x$ យើងប្រើនិយមន័យដេរីវេ គឺយើងរក

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

ដូច្នេះ $y = x$ => $y' = 1$ ដូច្នេះ (**F-VI-d2**) ត្រូវចំពោះ $m = 1$

2- យើងសន្មតថារូបមន្ត ($\boldsymbol{Fm}$) ត្រូវរហូតដល់ $m = m$

3- យើងត្រូវបង្ហាញថា ($\boldsymbol{Fm}$) ក៏ត្រូវចំពោះ $m + 1$ ដែរ គឺថា

ដោយប្រើសម្មតិកម្មខាងលើ

យើងត្រូវបង្ហាញថា $y = x^{m+1}$ => $y' = (m+1)x^m$ (**F-VI-d3**) $y = x^{m+1}$

អាចសរសេរជា

$y = x^m \times x$

ដោយយក :

$u = x^m$ => $u' = mx^{m-1}$ (ដោយ (**F-VI-d2**))

$v = x$ => $v' = 1$

$y = u \times v$

$y' = u'v + uv'$

$y' = (mx^{m-1})x + x^m$

$y' = mx^m + x^m$

$y' = (m+1)x^m$ នេះបង្ហាញថា (**F-VI-d3**) ក៏ត្រូវដែរ ។

<u>សេចក្តីសន្និដ្ឋាន</u>

រូបមន្ត ($\boldsymbol{Fm}$) ត្រូវគ្រប់ $m \in N$ ។

<u>សង្កេត</u>

ហេតុអ្វីក៏គេហ៊ាន ថា (**Fm**) ត្រូវគ្រប់ $m \in N$ បើគ្រាន់តែសង្កេតឃើញថាត្រូវត្រឹមតែ $m = 1$ សោះ ។ យើងឆ្លើយថា ដោយសារការបង្ហាញ ចំណុចទី 3- នេះហើយ ដែលអនុញ្ញាតឲ្យយើងហ៊ានអះអាងយ៉ាងនេះ ។

ព្រោះថាដោយការបង្ហាញទី 3- <u>បើរូបមន្តត្រូវដល់ជួរ m វាក៏ត្រូវដល់ ជួរទី m+1 ដែរ</u>

ដូច្នេះបើត្រូវចំពោះ m= 1 វាក៏ត្រូវចំពោះ m+1 = 2 ដែរ

ហើយបើត្រូវចំពោះ m= 2 វាក៏ត្រូវចំពោះ m+1 = 3 ដែរ

ហើយបើត្រូវចំពោះ m= 3 វាក៏ត្រូវចំពោះ m+1 = 4 ដែរ

………………………………………ៗលៗ …………………..

<u>ហេតុនេះហើយ បានជាថាត្រូវ $\forall n \in N$</u> ។

<u>ខ- ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ $y = x^m$ ដោយ $m \in Q$(សំនុំចំនួនសនិទាន)</u>

**<u>ខ-1 / $m \geq 0$</u>**

$m \in Q$ យើងអាចយក $m = \frac{p}{q}$ ដោយ $p \in N,\ q \in N$

ដូច្នេះ y ទៅជា $y = x^{\frac{p}{q}}$ => $y^q = ( x^{\frac{p}{q}})^q$

$$\text{រឺ} \quad y^q = x^p$$

$y^q = x^p$ => ដោយធ្វើដេរីវេទាំងសងខាង <u>ដោយយក $x$ ជាអថេរ</u> យើងបាន៖

$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$ (ដោយប្រើដេរីវេអនុគមន៍បណ្ដាក់ $y^q$ ផង និង ដោយប្រើរូបមន្ត **(F-VI-d2)** ផង ព្រោះ $p \in N,\ q \in N$ ) ។

<u>ចូរសង្កេត ថា</u> **(R-VI-01)** (R = Remarque)

$y = x^{\frac{p}{q}}$ ជាអនុគមន៍ មានអថេរ $x$ តែបើយើងតាង $z = y^q$ នោះ យើងឃើញថា $z$ មាន អថេរ $y$ ហើយ y មានអថេរ $x$។ ហេតុនេះហើយ បានជាមាន $y'$ នៅពេលដែលយើងធ្វើដេរីវេ នៃអនុគមន៍ $y^q$ ។

<u>ការសង្កេតនេះសំខាន់ណាស់</u> ចូរខំគិត ដើម្បីនឹងបានយល់ឲ្យច្បាស់ ព្រោះដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់នេះ យើងនឹងជួបជាញឹកញាប់ ។

$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$ => $y' = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}}$

$$y' = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}}$$

រឺ

$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1} \times y^{1-q}$ (1)

ដោយ $y = x^{\frac{p}{q}}$ => $y^{1-q} = [x^{\frac{p}{q}}]^{1-q}$ (2)

ដោយប្រើរូបមន្ត : $(x^m)^n = x^{mn}$ និង $x^m \times x^n = x^{m+n}$

(1) និង (2) ឲ្យ ៖

$$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1} \times [x^{\frac{p}{q}}]^{1-q}$$

$$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1} \times x^{\frac{p(1-q)}{q}}$$

$$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1+\frac{p(1-q)}{q}}$$

$$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1+\frac{p-pq}{q}}$$

$$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1+\frac{p}{q}-p}$$

$$y' = \frac{p}{q} \times x^{\frac{p}{q}-1}$$

ដូច្នេះ យើងបានរូបមន្ត $y = x^{\frac{p}{q}}$ $(p \in N, q \in N)$ => $y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$

រឺ $y = x^m$ => $y' = mx^{m-1}$ ($m \geq 0$ និង $m \in Q$) (3)

**<u>ខ-2 / $m < 0$</u>**

បើ $m < 0$ យើងតាង $m = -n$ ដូច្នេះ $n \geq 0$ និង $n \in Q$

$y = x^m = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ => $y \times x^n = 1$

$y \times x^n = 1$ => $(y \times x^n)' = 0$ (ដោយយកដេរីវេទាំងសងខាង)

ដោយរូបមន្តដេរីវេ $(uv)' = u'v + uv'$, យើងអាចសរសេរ

$(y \times x^n)' = y'x^n + y(x^n)'$

$= y'x^n + y\,(nx^{n-1})$ ដោយ (3)

$= y'x^n + x^{-n}\,(nx^{n-1})$

$= y'x^n + nx^{-1}$

ដូច្នេះ $(y \times x^n)' = 0 \Rightarrow y'x^n + nx^{-1} = 0$, រឺ

$y' = \frac{-nx^{-1}}{x^n} = -n\,x^{-n-1} = m\,x^{m-1}$

ដូច្នេះ

$y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1}$ ($m < 0$ និង $m \in Q$) (4)

រួមសេចក្តីទៅ ដោយ (3) និង (4) យើងបានរូបមន្ត រួមតែមួយ ៖

$$\boxed{y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1} \text{ ដោយ } m \in \boldsymbol{Q}}$$

(**F-VI-d4**)

ដោយ $N \subset Z \subset Q$ ដូច្នេះ (**F-VI-d4**) ជារូបមន្តរួម ប្រើបានចំពោះ $m$ នៅក្នុង $N, Z$ រឺ $Q$ ។