V- អនុគមន៍ដេរីវ៉ាប (dérivable)

និយមន័យ

ឧបមា f ជាអនុគមន៍មួយ កំនត់លើចន្លោះ I គេថា f ដេរីវ៉ាប ($dérivable$) លើចន្លោះ I កាលណា f មាន ដេរីវេ គ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៃចន្លោះ I ។

-ក្នុងភាសាបារាំងមានពាក្យខាងចុងថា « អាប » គឺបានន័យថា "អាចបាន » ដូចជា ៖ ម៉ង់សាប (mangeable) គឺអាចទទួលទានបាន ដូច្នេះ ដេរីវ៉ាប បានន័យថា អាចរកដេរីវេបាន

(គឺថាដេរីវេមាន បើយើងចង់រក អាចរកបាន) ។

$-$ គេថា f ដេរីវ៉ាប ($dérivable$) ត្រង់ a បើ ៖

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=k$ (k ជាចំនួនពិត មិនអនន្ត, $k \in R$) **(F-V-01)**

បានន័យថា លីមីតនោះមាន ហើយជាចំនួនពិតក្នុង R ទៀត (បើសិនជា $-\infty$ ឬ $+\infty$ នោះមិនអាចថា ដេរីវ៉ាប បានទេ) ។ បើលីមីតនោះមាន ហើយជាចំនួនពិតទៀត នោះគេអាចសរសេរថា $f'(a) = k$ ។

ឧទាហរណ៍

យើងយក $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$

យើងចង់ដឹងថា តើ f ដេរីវ៉ាបទេ ត្រង់ x = 0 ?

ដោយប្រើ **(F-03)** យើងអាចសរសេរ $Z = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$Z = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}$$

គេគុណ ខាងលើនិងខាងក្រោមដោយ $\sqrt{x}$,

$$Z = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

$$Z = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$Z = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

លីមីតស្មើនិង +∞ ដូច្នេះមិនមែនជាចំនួនពិតទេ ។ តាមនិយមន័យ អនុគមន៍ រ៉ាស៊ីនការេ មិនដេរីវ៉ាបទេ ត្រង់ 0 ។

ចុះហេតុអ្វី បានជានៅក្នុងតារាងដេរីវេ $f(x) = \sqrt{x}$ => $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$?

ព្រោះរូបមន្តនៅក្នុងតារាង ជារូបមន្តទូទៅ យើងក៏អាចរកឃើញរូបមន្តនេះដែរ ដោយប្រើ **(F-IV-01)** ចំពោះចំនុច x មួយក្នុង R , $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ។

យើងតាង៖

$$Z = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ដោយ $f(x) = \sqrt{x}$

$$Z = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

យើងគុណខាងលើ និងខាងក្រោម ដោយ $(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$

$$Z = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

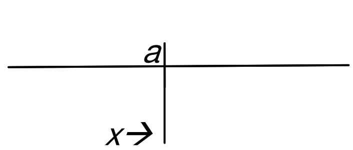
$$Z = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$Z = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

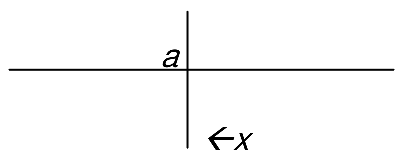
$Z = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ដូច្នេះយើងឃើញរូបមន្តនៅក្នុងតារាងហើយ ។

<u>សង្កេត-ក</u>

កាលណាគេថា $\lim_{x\to a} f(x)$



(fig-1)



(fig-2)

បានន័យថា *x->a* ដោយ *x < a* (fig-1) **និង** *x->a* ដោយ *x > a* (fig-2) ។

តែបើ ចន្លោះ កំនត់នៃអនុគមន៍ f ជាចន្លោះបើកដូចជា I =]a,b[, *នោះដើម្បីរកលីមីត អនុគមន៍ f ត្រង់ a ឬ b គេត្រូវគិតលីមីត ខាងស្តាំចំពោះa និងខាងឆ្វេងចំពោះb*

ពោលគឺ ៖

$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \mathrm{f(x)}$ *និង* $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \mathrm{f(x)}$]a b[។

a<-- x x→b

បើគេឃើញ លីមីតនោះជាចំនួនពិត<u>មិនអនន្ត</u> នោះគេថា f មានលីមីត ត្រង់ a ឬ ត្រង់ b ។

<u>សង្កេត-២</u>

យើងបានឃើញហើយកាលណា $\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta \mathrm{x}}$ *មាន តាមនិយមន័យលីមីតនោះ ហៅថា ដេរីវេ* $f'(x_0)$ *។ តែនៅពេលខ្លះលីមីតខាងឆ្វេងមាន ហើយលីមីតខាងស្តាំក៏មានទៀត តែលីមិតទាំងពីរនោះ <u>មិនស្មើគ្នា</u> ។*

ឧបមាដូច $f(x) = |x|$ ៖

$$f(x) = |x| \;\Rightarrow\; f(x) = \begin{cases} x & \text{បើ } \mathrm{x} \ge 0 \\ -x & \text{បើ } x \le 0 \end{cases}$$

ដូច្នេះ ត្រង់ $x = 0$, *អនុគមន៍ f ប្តូរតម្លៃ ដើម្បីរកដេរីវេត្រង់* $x = 0$ *យើងត្រឡប់ទៅនិយមន័យដើមវិញ គឺ គេតាង* $Z = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

a/ *ចំពោះ* $\mathrm{x} \ge 0, f(x) = x$ *ដូច្នេះ*

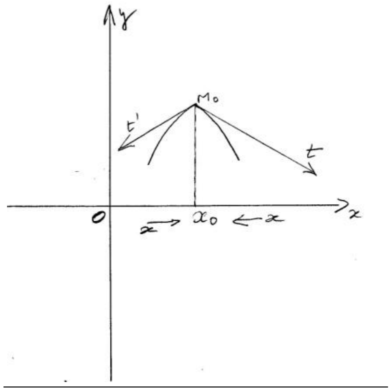
$$Z = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\ge 0}}\frac{x-0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\ge 0}}\frac{x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\ge 0}} 1 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{f'(0_+) = 1} \quad \textbf{(ក)}$$

b/ *ចំពោះ* $\mathrm{x} \le 0, f(x) = -x$ *ដូច្នេះ*

$$Z = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\le 0}}\frac{-x-0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\le 0}}\frac{-x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\le 0}} -1 = -1 \Rightarrow \boldsymbol{f'(0_-) = -1} \;\textbf{(ខ)}$$

ដោយ (ក) និង(ខ) យើងឃើញថា ត្រង់ $x = 0$, *អនុគមន៍* $f(x) = |x|$ *,មានដេរីវេខាងខាងស្តាំ (ក) និងដេរីវេខាងឆ្វេង (ខ) ពុំស្មើគ្នា ដូច្នេះតាមនិយមន័យដេរីវេ*

អនុគមន៍f **មិនមាន** ដេរីវេទេត្រង់ចំនុច $x = 0$ ។

<table>
<tr>
<td><u>សង្កេត</u>
ជាទូទៅ កាលណា ដេរីវេ ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ
មិនស្មើគ្នា កន្ទះបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំនុច
M_0 <u>មិនអាចជាបន្ទាត់ត្រង់តែមួយបានទេ</u>
ព្រោះមេគុណប្រាប់ទិសដៅនៃកន្ទះបន្ទាត់ប៉ះ
ទាំងពីរ មានតម្លៃខុសគ្នា
(ដូចរូបខាងស្តាំនេះស្រាប់
ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ <u>ជាប់តែមិនដេរីវ៉ាប ត្រង់ M_0</u>)</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<u>សង្កេត-គ</u>

អនុគមន៍ជាប់ និងអនុគមន៍ ដេរីវ៉ាប

- ជាទូទៅ កាលណា $f'(0_+) = \propto$ និង $f'(0_-) = \propto$ នៅពេលនោះ គេក៏យក $f'(0) = \propto$

ហើយគេថាf មានដេរីវេត្រង់ $x = 0$ ។

- ជាទូទៅ កាលណា $f(0_+) = \propto$ និង $f(0_-) = \propto$ នៅពេលនោះ គេក៏យក $f(0) = \propto$

ហើយគេថាf ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

- គេ សន្មត់ របៀបនេះមិនត្រឹមតែចំពោះ $x = 0$ ប៉ុណ្ណោះទេ គឺគ្រប់តែចំនុច x ទាំងអស់ ។
- ចំពោះអនុមន៍ $f(x) = |x|$ អនុគមន៍នេះ ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ព្រោះ $|x| = 0$ តែយើងឃើញហើយថា អនុគមន៍នេះមិនដេរីវ៉ាបទេត្រង់ $x = 0$ ។
- ដូច្នេះ អនុគមន៍ជាប់ អាចមិនដេរីវ៉ាប តែបើអនុគមន៍ដេរីវ៉ាប អនុគមន៍នោះ ជាអនុគមន៍ជាប់។

សង្កេត-ឃ

តើ $\left(\Delta x$ និង $dx\right)$ ហើយ $\left(\Delta y\right.$ និង $\left.dy\right)$ ខុសគ្នា ដូចម្តេច ?

1- *បើនិយាយជាពាក្យធម្មតា Δx ជាហេតុ ហើយ Δy ជាផល*

ក៏ដូចគ្នា dx ជាហេតុ ហើយ dy ជាផល

2- *បន្ទាប់មក ៖*

dx ជាលីមីតរបស់ Δx កាលណា Δx ខិតជិត 0 ឬក៏ x ខិតជិត x_0

ដល់ x ខិតជិត x_0 នេះជាហេតុបណ្តាលឲ្យ y ខិតជិត y_0

y *ខិតជិត y_0 មានន័យថា $(y - y_0) = \Delta y$ ខិតជិត 0 (សូន្យ) ហើយ*

dy ជាលីមីតរបស់ Δy កាលណា Δy ខិតជិត 0 ឬក៏ y ខិតជិត y_0 ។

ដោយសង្ខេប :

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x_0)} \qquad \textbf{(F-V-ឃ)}$$