ដេរីវេ

I- បុព្វយោគ

ដេរីវេសំខាន់ណាស់ ព្រោះយើងត្រូវការជានិច្ច ក្នុងការរៀនអនុគមន៍ ។
ចំពោះដេរីវេ យើងគ្រាន់តែចេះចាំរូបមន្តទៅ បន្ទាប់មកយើងងាយប្រើបំផុត ។
នៅក្នុងមេរៀននេះ អនុគមន៍ ដែលនឹងយកមកសិក្សា (បើមិនបញ្ជាក់) គឺអនុគមន៍ ពី R ទៅ R (ដោយ R ជាចំនួនពិត) ។

II-តើដេរីវេជាអ្វី?

កាលណាគេមានអនុគមន៍ f គេអាចគិតរកអនុគមន៍មួយទៀត ដែលគេសរសេរជា f’ (មើលថា f ព្រីម) ហើយហៅថា « ដេរីវេ » ។យើងនឹងឃើញនៅពេលក្រោយ ប្រយោជន៍នៃ ដេរីវេ ។
បំណងនៅពេលនេះ គឺធ្វើយ៉ាងណា ដើម្បីគណនា f’ បើគេដឹង f ។
មិនពិបាកទេ គឺគ្រាន់ប្រើរូបមន្ត ដូចតទៅនេះ ៖

III- រូបមន្ត ដេរីវេ (ដោយទទួលសិន)

តារាងខាងក្រោមនេះ មាន ២ជួរ ជួរខាងឆ្វេងមានអនុគមន៍ f និងជួរខាងស្តាំ មាន អនុគមន៍ f’ ។ ចូរទន្ទេញ f និង f’ ឲ្យចាំមាត់។

លេខរៀង	f	f'
1	ចំនួន ថេរ (ដូចជា a, A ឬ 12,30 ជាដើម) គឺចំនួនដែលគ្មាន អថេរ x ជាប់ជាមួយ	0

2	$x^1 = x$	1
3	x^2	$2x$
4	x^3	$3x^2$
5	x^n	nx^{n-1}
6	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
7	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
8	$\sin x$	$\cos x$
9	$\cos x$	$-\sin x$

ឧទាហរណ៍

- f(x) = 6 => f'(x) = 0 (តាមរូបមន្ត ទី១ខាងលើ)
- f(x) = x^2 => f'(x) = 2x (តាមរូបមន្ត ទី៣ខាងលើ)

រូបមន្តដែលពិបាកប្រើបន្តិច គឺ f(x) = x^n (រូបមន្តទី៥ ខាងលើ)។ តែរូបមន្តនេះ ប្រើបានជានិច្ច រហូតដល់ចំនួនគត់រឡាទីប (Z) និងចំនួនសនិទាន (Q) ដូចជា n = 2, 3, -12, $\frac{1}{2}$ ជាដើម ។

- ចំពោះ n = -1, f(x) = x^n ទៅជា f(x) = $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ហើយ f′(x) = nx^{n-1} ទៅជា f'(x) = $-1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ ដូច្នេះ យើងឃើញឡើងវិញរូបមន្តទី ៦ ។
- ចំពោះ n = $\frac{1}{2}$, f(x) = x^n ទៅជា f(x) = $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ហើយ f′(x) = nx^{n-1} ទៅជា f'(x) = $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ដូច្នេះ យើងឃើញឡើងវិញរូបមន្តទី ៧ ។

ក- ដេរីវេ អនុគមន៍ ពហុធាតុ

a/ f(x) = $x^5 - 2x^2 + 12$ => f'(x) = $5x^4 - 2x + 0$
= $5x^4 - 2x$

b/ f(x) = $9x^5$ => f'(x) = $9 \times 5 \times x^4$
= $45x^4$

២- ដេរីវេ អនុគមន៍ គុណ ឬ ចែក

គេច្រើនហៅអនុគមន៍ទាំងពីរ ថា u និង v

$(u \times v)' = u'v + uv'$ (អនុគមន៍គុណ)

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (អនុគមន៍ចែក)

ឧទាហរណ៍

a/ អនុគមន៍គុណ :

$f(x) = (2x+1) \times (x^2 - 9)$

នៅពេលនេះ $u = 2x+1 \Rightarrow u' = 2$

$v = x^2 - 9 \Rightarrow v' = 2x$

ដោយប្រើរូបមន្ត $f'(x) = u'v + uv'$ យើងបាន

$f'(x) = 2(x^2 - 9) + (2x+1)2x$

$f'(x) = 6x^2 + 2x - 18$

ត្រូវប្រយ័ត្ន : មិនត្រូវថា $(uv)' = u' \times v'$ ទេ

b/ អនុគមន៍ចែក :

$f(x) = \frac{(5x + 1)}{(x^6 + 7x - 2)}$

$u = 5x + 1 \Rightarrow u' = 5$

$v = x^6 + 7x - 2 \Rightarrow v' = 6x^5 + 7$

ដោយប្រើរូបមន្ត $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ យើងបាន

$f'(x) = \frac{5(x^6+7x-2) - (5x + 1)(6x^5+7)}{(x^6 + 7x - 2)^2}$

ត្រូវចាំថាគេមិនបំបែកភាគបែង $(x^6 + 7x - 2)^2$ ទេ ព្រោះឥតប្រយោជន៍ តែគេត្រូវបំបែកភាគយក $5(x^6 + 7x - 2) - (5x + 1)(6x^5 + 7)$ ។

គេបាន $f'(x) = \frac{-25x^2 - 6x^5 - 17}{(x^6 + 7x - 2)^2}$

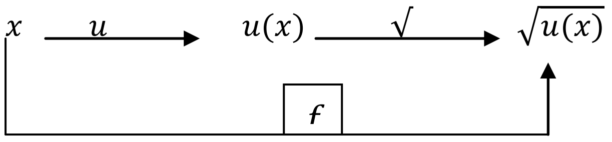
គ- ដេរីវេ អនុគមន៍បណ្ដាក់

អ្វីទៅអនុគមន៍បណ្ដាក់ ? គឺអនុគមន៍ ពីរ រួមគ្នា

ឧទាហរណ៍-1

ដោយមិនយក $g(x) = \sqrt{x}$

គេយក $f(x) = \sqrt{8x^2 - 5x + 4}$ ហើយ អនុគមន៍ f នេះ គេហៅថាអនុគមន៍បណ្ដាក់ ព្រោះ ក្នុង អនុគមន៍ f នេះ មានអនុគមន៍ ពីរ គឺ អនុគមន៍ពហុធា $u(x) = 8x^2 - 5x + 4$ មួយ និង អនុគមន៍ រ៉ាស៊ីនការេ (√) មួយ ។

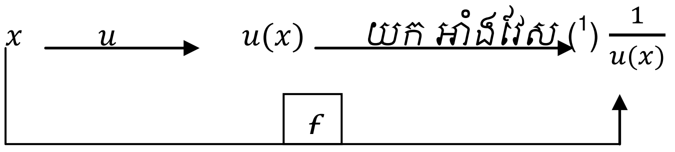


ដូច្នេះ $f(x) = \sqrt{u(x)}$, ដោយ $u(x) = 8x^2 - 5x + 4$

ឧទាហរណ៍-2

ដោយមិនយក $g(x) = \frac{1}{x}$

គេយក $f(x) = \frac{1}{8x^6 + 4x^7 - 6x}$ វិញ



ដូច្នេះ $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, ដោយ $u(x) = 8x^6 + 4x^7 - 6x$

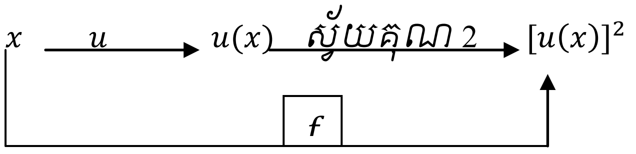
ឧទាហរណ៍-3

ដោយមិនយក $g(x) = x^2$

---

(1) អាំងវែស (inverse)ជាភាសាបារាំង គេថា ចំនួន a' ជា អាំងវែស នៃចំនួន a ($a \neq 0$) កាលណា $a' = \frac{1}{a}$ ឬ $a \times a' = a' \times a = 1$ ។ (ខ្ញុំសុំប្រើពាក្យខ្លះ ជាបណ្ដោះអាសន្នទេ ដើម្បីកុំឲ្យស្ទះកិច្ចការដែលខ្ញុំយល់ថា ជាប្រយោជន៍ ដល់យុវជន យុវនារីខ្មែរខ្លះ ដែលជានិស្សិត សូមមេត្តា អភ័យទោស)

គេយក f(x) = $(5x^9 - 2x + 6)^2$ វិញ



ដូច្នេះ $f(x) = [u(x)]^2$, ដោយ

$u(x) = 5x^9 - 2x + 6$

<u>សង្កេត - (R-III-01)</u>

ចំពោះ $f(x)$, x ជាអថេរ របស់អនុគមន៍ f

ចំពោះ $f(u(x))$, x ជាអថេរ របស់អនុគមន៍ u ហើយ $u(x)$ ជាអថេររបស់អនុគមន៍ f

ដូច្នេះដើម្បី ឲ្យរូបមន្តដេរីវេ អាចប្រើបានចំពោះអនុគមន៍បណ្តាក់ និងអនុគមន៍មិនបណ្តាក់

នោះនៅក្នុងតារាងដូចតទៅនេះ គេសរសេរ u ជំនួស x វិញ ដោយសន្មត់ថា :

$u = x$ ចំពោះអនុគមន៍ មិនបណ្តាក់ ហើយ

$u = u(x)$ ចំពោះអនុគមន៍ បណ្តាក់

លេខរៀង	f	f'
1	u^2	$2u \times u'$
2	u^3	$3u^2 \times u'$
3	u^n	$nu^{n-1} \times u'$
4	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
5	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
6	$\sin u$	$\cos u \times u'$
7	$\cos u$	$-\sin u \times u'$

<u>ឧទាហរណ៍-4</u>

$y = sin(\omega x + \pi)$ => $y' = cos(\omega x + \pi) \times \omega$ (ដោយរូបមន្ត ទី 6)

$= \omega\, cos(\omega x + \pi)$

IV-ការអនុវត្តន៍

១- គេប្រើដេរីវេ ដើម្បីសិក្សាអំពី អថេរភាពនៃអនុគមន៍

- បើ $f' \geq 0$, f ជាអនុគមន៍ កើន
- បើ $f' \leq 0$, f ជាអនុគមន៍ ចុះ

ឧទាហរណ៍

$f(x) = x^2 - 6x + 4$

គេរកតារាងអថេរភាពនៃ f

មុនដំបូងគេរក f' :

$$f'(x) = 2x - 6$$

បំណងគឺរក សញ្ញា នៃ f'

ដើម្បីរកសញ្ញា f' យើងរក x ដែល $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow 2x - 6 = 0$ => $x = 3$

តារាង សញ្ញា f' :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		+

ឥឡូវប្រើទ្រឹស្តីបទខាងលើ : (បើ $f' \leq 0$, f ចុះ) ហើយ (f កើន បើ $f' \geq 0$)

តារាង អថេរ f :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
f	↘		↗

ដែលគួរចាំ កាលណា f' ដូរសញ្ញាច្រើនដង f ក៏ដូរទិសដៅ (ចុះឡើងច្រើនដងដែរ) ហើយ កាលណារកសញ្ញា f' ត្រូវរកឫស របស់ f' ឲ្យបានច្រើនបំផុត ។ ម្យ៉ាងទៀត ដើម្បីគូរក្រាប របស់ f យើងរក ៖

- $f(x)$ ចំពោះ ចំនួន x ទាំងអស់ដែលជាឫស របស់ ដេរីវេ $f'(x)$ ហើយ $f(x)$ ដែលរកឃើញ យើងបំពេញ ក្នុងតារាងអថេរ f
- x ដែល $f(x) = 0$ ហើយ x ដែលរកឃើញ យើងបំពេញ ក្នុងតារាងអថេរ f ខាងលើ មុននឹងគូរក្រាប ។

ទំនាក់ទំនង រវាង លីមីត និង ដេរីវេ

គួរមើលឡើងវិញ នៅជំពូក លីមីត ដើម្បីងាយយល់ ។

ចំណងរវាង លីមីត និង ដេរីវេ ងាយយល់ទេ ៖

និយមន័យ (ដេរីវេត្រង់ x_0)

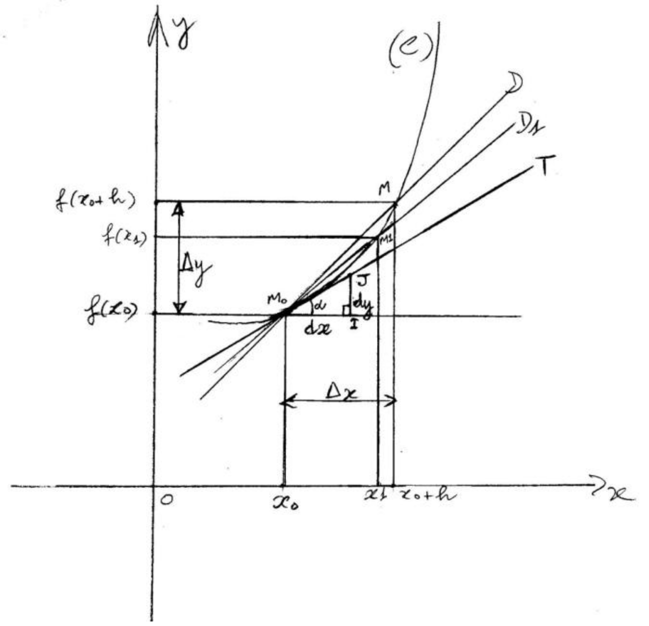
បើ f ជាអនុគមន៍មួយ កំនត់លើចន្លោះ I ហើយ x_0 ជាចំនួនពិតក្នុង ចន្លោះ I និង h ជាចំនួនពិតមិនសូន្យ ដែល $x_0+h \in I$ នោះដេរីវេ នៃ f ត្រង់ x_0 (បើមាន) ជាលីមីតរបស់ អត្រាកំនើននៃអនុគមន៍ f រវាង x_0 និង $x_0 + h$ កាលណា h (ឬ Δx) ខិតទៅរក សូន្យ ។ ចំនួន ដេរីវេ ត្រង់ x_0 កំនត់ដោយ ៖

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{(F-IV-01)}$$

ដើម្បីងាយយល់និយមន័យ និងរូបមន្តនៃ $f'(x_0)$ នេះ សូមមើលរូបខាងក្រោម (Fig-01) ៖

<table>
<tr>
<td>

Fig-01



</td>
<td>

ចំពោះរូប **Fig-01** នេះ (C) ជាក្រាបនៃ អនុគមន៍ f ។

x_0 ជាអាប់ស៊ីស របស់ចំនុច $M_0 \in (C)$ ដូច្នេះ $f(x_0)$ ជា អរដោនេរបស់ចំនុច M_0

គឺជា $M_0(x_0\,;f(x_0))$ ។

ដោយយកកំនើន Δx យើងបាន ចំនួន ថ្មី $x = x_0 + \Delta x$ ហើយ បើ x ជាអាប់ស៊ីស របស់ចំនុច $M \in (C)$ នោះ អរដោនេរបស់ ចំនុច M គឺ $f(x)$ ឬ $f(x_0+\Delta x)$ ឬ ក៏ថា៖

$M(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$ ។

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

នៅលើ Fig-01, កំនើន Δx ស្មើនិង h $(\Delta x = h)$ ហើយ Δy ជាកំនើន ខាងអនុគមន៍ f នៅពេល ដែល x កើនពី x_0 ទៅ $(x_0+\Delta x)$ បានន័យថា : $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

</td>
</tr>
</table>

ដោយចំនួន x_0 នៅដដែលមិនផ្លាស់ប្តូរ $f(x_0)$ ក៏មិនផ្លាស់ប្តូរដែរ ដូច្នេះ ចំនុច M_0 ក៏នៅនឹង មិនកំរើក មានតែចំនុច M ទេ ដែលកំរើក កាលណា Δx ខិតជិតសូន្យ ព្រោះថា នៅពេល នោះ $(x_0+\Delta x)$ ក៏ខិតជិត x_0 ដែរ ។ ដោយ M នៅលើក្រាប(C) ដូច្នេះកាលណា Δx ខិតជិតសូន្យ M រត់លើក្រាប(C) ដើម្បីទៅជិត M_0 ហើយ បន្ទាត់ M_0M ក៏ខិតជិតបន្ទាត់ M_0T (មើល Fig-01) ។

បន្ទាត់ M_0T ហៅថា បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង តាងអនុគមន៍f ត្រង់ចំនុច M_0 ។

សង្កេត-1

កាលណា Δx ខិតជិត សូន្យ Δx ទៅជា dx ហើយ Δy ទៅជា dy

dx ហៅថា ឌីផេរ៉ង់ស្យែល នៃ x មើលថា ដេx

(យើងហៅ Δx ជាកំនើននៃ x ហើយ dx ជាកំនើនតិចបំផុតនៃ x)

dy ហៅថា ឌីផេរ៉ង់ស្យែល នៃ y មើលថា ដេy

កាលណា Δx ខិតជិត សូន្យ $(f(x+\Delta x)-f(x))$ ខិតជិត df

ដូច្នេះ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ខិតជិត $\frac{df}{dx}$ (df ជាកំនើន នៃ f បន្តពី dx)

បើសរសេរជា ឌីផេរ៉ង់ស្យែល និយមន័យ ដេរីវេ អាចសរសេរ ជា ៖

$f'(x)=\frac{df}{dx} \Leftrightarrow df=f'(x)dx$

<u>*សង្កេត-2*</u>

ម្យ៉ាងទៀត តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

ដូច្នេះ បើសរសេរជាឌីផេរ៉ង់ស្យែល $f'(x_0)=\frac{dy}{dx}$ ហើយ ដោយតាម Fig-01 $tg(\alpha)=\frac{dy}{dx}$

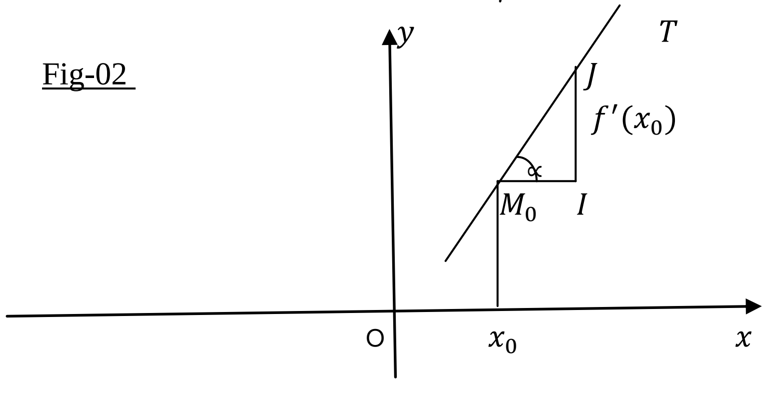
នោះយើងអាចទាញយក លទ្ធផល ៖ $\boxed{tg(\propto)=f'(x_0)}$ **(F-IV-02)**

ដោយមានបន្ទាត់ M_0T និងបន្ទាត់ កាត់តាម M_0 ហើយស្របនឹង អក្ស ox នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនេះកាត់គ្នាត្រង់ M_0 ដោយមានមុំ $\propto$ (មើល Fig-01) ។ ដូច្នេះ កាលណាយើងដឹង M_0 នឹង $\propto$ យើងអាចគូសបន្ទាត់ប៉ះ M_0T ព្រោះយើងដឹងទិសនៃបន្ទាត់មួយទៀតដែលស្របនឹង អក្ស ox រួចទៅហើយ ។

តាមនិយមន័យ នៅក្នុងតំរុយអរតូណរមេ (repère orthonormé) $tg(\alpha)$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ M_0T ។ ដោយ $tg(\propto)=f'(x_0)$ (មើលរូបមន្ត **(F-IV-02)**)

យើងអាចគូសបន្ទាត់ប៉ះ M_0T ដូចតទៅ (នៅក្នុងតំរុយអរតូណរមេ) ៖

<u>Fig-02</u>



មុននឹងគូស យើងមាន $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ និង $f'(x_0)$ ហើយបំណងយើងចង់គូរបន្ទាត់ប៉ះ M_0T ។

1-ជាដំបូងយើងគូរចំនុច M_0

2- ពី M_0 យើងទាញបន្ទាត់ M_0I ស្របនឹងអក្ស ox ហើយមានប្រវែង $\overline{M_0I}$ = +1 (មួយឯកតានៃតំរុយអរតូណរមេ)

3- ពីចំនុច I យើងទាញបន្ទាត់ $\overline{IJ}$ កែងនឹង M_0I ហើយមានប្រវែងពីជគណិតស្មើនឹង $f'(x_0)$

4- បន្ទាត់ប៉ះ ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ត្រង់M_0 គឺបន្ទាត់ M_0J ព្រោះថា:

$$tg\propto = \frac{IJ}{M_0I} = \frac{f'(x_0)}{1} = f'(x_0)$$ ។

<u>សមីការបន្ទាត់ប៉ះ</u>

ជាទូទៅ កាលណាគេឲ្យ $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ និង មេគុណ ប្រាប់ទិស m នៃបន្ទាត់ យើងអាចរកសមីការនៃបន្ទាត់នោះដោយប្រើរូបមន្ត ៖ $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

ដូច្នេះដោយលទ្ធផលខាងលើនៃបន្ទាត់ប៉ះ សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ត្រង់ $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ គឺ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ឬ $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0}$ **(F-IV-03)** ។

<u>ឧទាហរណ៍</u> ចូររកសមីការ នៃបន្ទាត់ប៉ះ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x = 2$ នឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 6x + 4$ ។

$f(x) = x^2 - 6x + 4$ => $f(2) = 2^2 - (6 \times 2) + 4 =$ **- 4**

$f'(x) = 2x - 6$ => $f'(2) = (2 \times 2) - 6 = \mathbf{-2}$

ដូច្នេះសមីការ (ដោយប្រើ **F-IV-03**) ៖ $y = -2(x-2) + (-4)$ ឬ $\boxed{y = -2x}$ ។

<u>V- អនុគមន៍ដេរីវ៉ាប (dérivable)</u>

<u>និយមន័យ</u>

ឧបមា f ជាអនុគមន៍មួយ កំនត់លើចន្លោះ I គេថា f ដេរីវ៉ាប ($dérivable$) លើចន្លោះ I កាលណា f មាន ដេរីវេ គ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៃចន្លោះ I ។

-ក្នុងភាសាបារាំងមានពាក្យខាងចុងថា « អាប » គឺបានន័យថា "អាចបាន » ដូចជា ៖ ម៉ង់សាប (mangeable) គឺអាចទទួលទានបាន ដូច្នេះ ដេរីវ៉ាប បានន័យថា អាចរកដេរីវេបាន (គឺថាដេរីវេមាន បើយើងចង់រក អាចរកបាន) ។

– គេថា f ដេរីវ៉ាប ($dérivable$) ត្រង់ a បើ ៖

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=k$ (k ជាចំនួនពិត មិន អនន្ត, $k\in R$) **(F-V-01)**

បានន័យថា លីមីតនោះមាន ហើយជាចំនួនពិតក្នុង R ទៀត (បើសិនជា $-\infty$ ឬ $+\infty$ នោះមិនអាចថា ដេរីវ៉ាប បានទេ) ។ បើលីមីតនោះមាន ហើយជាចំនួនពិតទៀត នោះគេអាចសរសេរថា $f'(a)= k$ ។

ឧទាហរណ៍

យើងយក $f(x)= \sqrt{x}\ (x\geq 0)$

យើងចង់ដឹងថា តើ f ដេរីវ៉ាបទេ ត្រង់ $x = 0$?

ដោយប្រើ **(F-03)** យើងអាចសរសេរ $Z= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$Z= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}$$

គេគុណ ខាងលើនិងខាងក្រោមដោយ $\sqrt{x}$,

$$Z= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

$$Z= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$Z= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

លីមីតស្មើនិង $+\infty$ ដូច្នេះមិនមែនជាចំនួនពិតទេ ។ តាមនិយមន័យ អនុគមន៍ ឬស៊ីនការេ មិនដេរីវ៉ាបទេ ត្រង់ 0 ។

ចុះហេតុអ្វី បានជានៅក្នុងតារាងដេរីវេ $f(x) = \sqrt{x}$ => $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$?

ព្រោះរូបមន្តនៅក្នុងតារាង ជារូបមន្តទូទៅ យើងក៏អាចរកឃើញរូបមន្តនេះដែរ ដោយប្រើ **(F-IV-01)** ចំពោះចំនុច x មួយក្នុង R , $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ។

យើងតាង៖

$Z = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ដោយ $f(x) = \sqrt{x}$

$$Z = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

យើងគុណខាងលើ និងខាងក្រោម ដោយ $(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$

$$Z = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

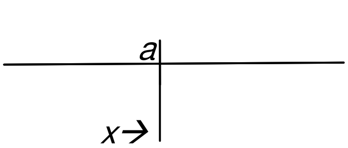
$$Z = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$Z = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

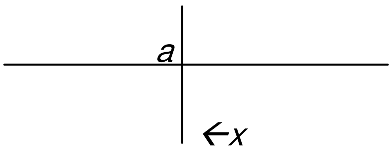
$Z = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ដូច្នេះយើងឃើញរូបមន្តនៅក្នុងតារាងហើយ ។

សង្កេត-ក

កាលណាគេថា $\lim_{x\to a} f(x)$



(fig-1)



(fig-2)

បានន័យថា $x \to a$ ដោយ $x < a$ (fig-1) **និង** $x \to a$ ដោយ $x > a$ (fig-2) ។

តែបើ ចន្លោះ កំនត់នៃអនុគមន៍ f ជាចន្លោះបើកដូចជា I =]a,b[, នោះដើម្បី រកលីមីតអនុគមន៍ f ត្រង់ a ឬ b គេត្រូវគិតលីមីត ខាងស្តាំចំពោះa និងខាងឆ្វេងចំពោះb ពោលគឺ ៖

$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$ និង $\lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x)$ ——]a——————b[—— ។

a<-- x x→b

បើគេឃើញ លីមីតនោះជាចំនួនពិតមិនអនន្ត នោះគេថា f មានលីមីត ត្រង់ a ឬ ត្រង់ b ។

<u>សង្កេត-ខ</u>

យើងបានឃើញហើយកាលណា $\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ មាន តាមនិយមន័យលីមីតនោះហៅថា ដេរិវេ $f'(x_0)$ ។ តែនៅពេលខ្លះលីមីតខាងឆ្វេងមាន ហើយលីមីតខាងស្តាំក៏មានទៀត តែលីមិតទាំងពីរនោះមិនស្មើគ្នា ឧបមាដូច $f(x) = |x|$ ៖

$$f(x) = |x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x \text{ បើ } x \geq 0 \\ -x \text{ បើ } x \leq 0 \end{cases}$$

ដូច្នេះ ត្រង់ $x = 0$, អនុគមន៍ f ប្តូរតម្លៃ ដើម្បីរកដេរីវេត្រង់ $x = 0$ យើងត្រឡប់ទៅនិយមន័យដើមវិញ គឺ គេតាង $Z = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

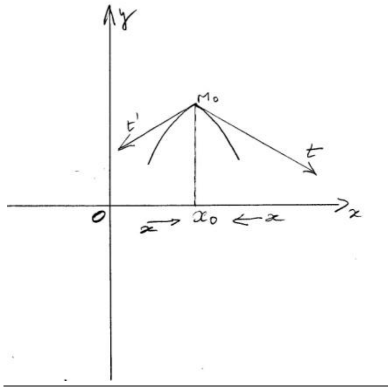
a/ ចំពោះ $x \geq 0, f(x) = x$ ដូច្នេះ

$$Z = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\geq 0}}\frac{x-0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\geq 0}}\frac{x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\geq 0}} 1 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{f'(0_+) = 1} \quad \textbf{(ក)}$$

b/ ចំពោះ $x \leq 0, f(x) = -x$ ដូច្នេះ

$$Z = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\leq 0}}\frac{-x-0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\leq 0}}\frac{-x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\leq 0}} -1 = -1 \Rightarrow \boldsymbol{f'(0_-) = -1} \ \textbf{(ខ)}$$

ដោយ (ក) និង(ខ) យើងឃើញថា ត្រង់ $x = 0$, អនុគមន៍ $f(x) = |x|$,មាន ដេរីវេខាងខាងស្តាំ (ក) និងដេរីវេខាងឆ្វេង (ខ) ពុំស្មើគ្នា ដូច្នេះតាមនិយមន័យដេរីវេ អនុគមន៍f មិនមានដេរីវេទេត្រង់ចំនុច $x = 0$ ។

<u>សង្កេត</u> ជាទូទៅ កាលណា ដេរីវេ ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ មិនស្មើគ្នា កន្ទុះបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោងត្រង់ចំនុច M_0 <u>មិនអាចជាបន្ទាត់ត្រង់តែមួយបានទេ</u> ព្រោះមេគុណាប្រាប់ទិសដៅនៃកន្ទុះបន្ទាត់ប៉ះ ទាំងពីរ មានតម្លៃខុសគ្នា (ដូចរូបខាងស្តាំនេះស្រាប់ ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ **<u>ជាប់តែមិនដេរីវ៉េប ត្រង់ M_0</u>**)	

<u>សង្កេត-គ</u>

អនុគមន៍ជាប់ និងអនុគមន៍ ដេរីវ៉េប

- ជាទូទៅ កាលណា $f'(0_+) = \propto$ និង $f'(0_-) = \propto$ នៅពេលនោះ គេក៏យក $f'(0) = \propto$

ហើយគេថាf មានដេរីវេត្រង់ $x = 0$ ។

- ជាទូទៅ កាលណា $f(0_+) = \propto$ និង $f(0_-) = \propto$ នៅពេលនោះ គេក៏យក $f(0) = \propto$

ហើយគេថា f ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

- គេ សន្មត់ របៀបនេះមិនត្រឹមតែចំពោះ $x = 0$ ប៉ុណ្ណោះទេ គឺគ្រប់តែចំនុច x ទាំងអស់ ។
- ចំពោះអនុមន៍ $f(x) = |x|$ អនុគមន៍នេះ ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ព្រោះ $|x| = 0$
  តែយើងឃើញហើយថា អនុគមន៍នេះមិនដេរីវ៉េបទេត្រង់ $x = 0$ ។
- ដូច្នេះ អនុគមន៍ជាប់ អាចមិនដេរីវ៉េប តែបើអនុគមន៍ដេរីវ៉េប អនុគមន៍នោះ
  ជាអនុគមន៍ជាប់។

<u>សង្កេត-ឃ</u>

តើ $\left(\Delta x \text{ និង } dx\right)$ ហើយ $\left(\Delta y \text{ និង } dy\right)$ ខុសគ្នា ដូចម្តេច ?

1- បើនិយាយជាពាក្យធម្មតា Δx ជាហេតុ ហើយ Δy ជាផល

កំដូចគ្នា dx ជាហេតុ ហើយ dy ជាផល

2- បន្ទាប់មក ៖

<u>dx ជាលីមីតរបស់ Δx កាលណា Δx ខិតជិត 0 ឬក៏ x ខិតជិត x_0</u>

ដល់ x ខិតជិត x_0 នេះជាហេតុបណ្ដាលឲ្យ y ខិតជិត y_0

y ខិតជិត y_0 មានន័យថា $(y - y_0) = \Delta y$ ខិតជិត 0 (សូន្យ) ហើយ

<u>dy ជាលីមីតរបស់ Δy កាលណា Δy ខិតជិត 0 ឬក៏ y ខិតជិត y_0 ។</u>

<u>ដោយសង្ខេប</u> :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x_0)$$ **(F-V-ឃ)**

VI- <u>រូបមន្ត ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ខ្លះ ដោយបញ្ជាក់</u>

នៅជំពូក **III** យើងបានឃើញ តារាងដេរីវេ នៃអនុគមន៍ខ្លះដោយមិនទាន់បង្ហាញ ។ នៅពេលនេះយើងចង់បង្ហាញ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ខ្លះ ដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេ ។

a/ <u>ដេរីវេនៃផលបូក $U + V$</u> នៃអនុគមន៍ U និង អនុគមន៍ V ដេរីវ៉េប ស្មើនឹង ផលបូក $U' + V'$ ដោយ U' ជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ U និង V' ជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ V ។

ព្រោះថា៖ យើងតាង

$y = u + v$, ដោយកំនើន Δx យើងបានកំនើន ជាបន្តបន្ទាប់ $\Delta u, \Delta v$ និង $\Delta y = \Delta u + \Delta v$

ដូច្នេះ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$

ហើយដល់ទៅលីមីត យើងបាន ៖

$$y' = u' + v'$$ **(F-VI-a)**

b/ <u>ដេរីវេនៃ $y = uv$</u> គឺ $y' = u'v + uv'$

ព្រោះថា៖

$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$

$= \Delta u.v + u.\Delta v + \Delta u.\Delta v$

ដូច្នេះ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}.v + u.\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}.\Delta v$$

ហើយដល់ទៅលីមីត យើងបាន ៖ $\boxed{y' = u'v + uv'}$ **(F-VI-b1)**

(ព្រោះ $\frac{\Delta u}{\Delta x}.\Delta v \to u'.0 = 0$)។

<u>សង្កេត</u>

<u>បើ $y = uv$ និង $y' = u'v + uv'$</u>

នៅពេលនោះ $\frac{y'}{y} = \frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'v}{uv} + \frac{uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$

រឺ $\boxed{\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}}$ **(F-VI-b2)** រូបមន្តនេះហៅថាដេរីវេលោការីតមីក dérivée logarithmique

b-1/ <u>ដេរីវេនៃ $y = au$</u> (a ជាចំនួនពិតថេរ)

នៅពេលនោះ $y' = au'$ (ព្រោះដេរីវេនៃ a ស្មើនឹង 0)

b-2/ <u>បើ $y = uvw$</u> គេបាន៖

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$$

ព្រោះ $y = uvw = (uv)w$

$$y' = (uv)'w + (uv)w'$$

$$= (u'v + uv')w + uvw'$$

$$= u'vw + uv'w + uvw'$$

ដូច្នេះ $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{u'vw+uv'w \ +uvw'}{uvw}$

ឬ $$\boxed{\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}}$$ **(F-VI-b3)**

រូបមន្តនេះ ថ្លែងថា ៖ ដេរីវេលោការីតមីកនៃផលគុណ ជាផលបូកនៃដេរីវេលោការីតមីក របស់កត្តានីមួយៗ ។

c/ គេឲ្យ $y = \frac{u}{v}$

យើងអាចសរសេរ $u = yv$ ហើយបើ y ដេរីវេបាន នោះ គេបាន ៖

$u' = y'v + yv'$

$u' = y'v + \frac{u}{v}v'$ => $y'v = u' - \frac{uv'}{v}$

$y'v = \frac{u'v-uv'}{v}$

$y' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$\boxed{y' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$$ **(F-VI-c1)**

ដោយរូបមន្ត យើងទាញយក ដេរីវេលោការីតមីកនៃផលចែក ៖

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} \Big/ \dfrac{u}{v} = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} \times \dfrac{v}{u}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(u'v-uv')v}{v^2u}$$

$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$

$$\boxed{\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}}$$ **(F-VI-c2)**

រូបមន្តនេះ ថ្លែងថា ៖ ដេរីវេលោការីតមីកនៃផលចែក ជាផលសងរវាង ដេរីវេលោការីតមីកនៃភាគយក និង ដេរីវេលោការីតមីកនៃភាគបែង ។

d/ $y = u^m$ ដោយ $m \in Q$ (m = $\frac{p}{q}$ ជាដើម)

ដើម្បីទៅដល់ដេរីវេ នៃ $y = u^m$ ($m \in Q$) យើងនឹងបង្ហាញតាមសំដាប់ដូចតទៅៈ

ក- ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ $y = x^m$ ដោយ $m \in N$

នៅពេលនេះ យើងប្រើរបៀបបញ្ជាក់មួយ ដែលគេច្រើនប្រើកាលណារូបមន្តដែលត្រូវបញ្ជាក់ មានចំណងជាប់ជាមួយនឹងចំនួនគត់ ក្នុង N ។ ដូចជានៅពេលនេះជាដើម ក្នុង $y = x^m$, m ជាចំនួនគត់ក្នុង N ។

របៀបបញ្ជាក់នេះ បារាំងហៅថា démonstration par récurrence ខ្ញុំសូមទុកពាក្យនេះដដែលសិន បើសិនជាពុំទាន់មានប្រើជាភាសាខ្មែរ ដោយខ្ញុំហៅថា **បញ្ជាក់ដោយរេគារ៉ង់** ដែលមានដំណើរដូចតទៅ ៖

បញ្ជាក់ដោយរេគារ៉ង់ (F-VI-d1)

1/ ឧបមា រូបមន្ត F1 ត្រូវ ចំពោះ n = 1

2- គេសន្មតថា រូបមន្តនោះ ត្រូវរហូតដល់ n = n គឺ គេសន្មត់ថា $F2, F3, F4, \ldots..Fn$ ត្រូវទាំងអស់ បានន័យថា គេអាចប្រើ រូបមន្ត ចាប់តាំងពី $F1, F2, F3, \ldots\ldots\ldots..\boldsymbol{Fn}$ ទៅបាន

3- គេត្រូវបង្ហាញថា រូបមន្តនោះ ក៏ត្រូវចំពោះ ជួរ n+1 ដែរ ។

បន្ទាប់ទៅនេះ យើងប្រើ **បញ្ជាក់ដោយរេគារ៉ង់** ដើម្បីបង្ហាញថា អនុគមន៍ $y = x^m$, m ជាចំនួនគត់ក្នុង N មានដេរីវេ $y' = mx^{m-1}$ គឺថា

$y = x^m \ (m \in N) \ => \ y' = mx^{m-1}$

(F-VI-d2)

1- យើងត្រូវរក ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ចំពោះ m = 1 គឺថា $y = x$

ដើម្បីរកដេរីវេ នៃ $f(x) = x$ យើងប្រើនិយមន័យដេរីវេ គឺយើងរក

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

ដូច្នេះ $y = x \ => \ y' = 1$ ដូច្នេះ **(F-VI-d2)** ត្រូវចំពោះ $m = 1$

2- យើងសន្មតថារូបមន្ត (***Fm***) ត្រូវរហូតដល់ $m = m$

3- យើងត្រូវបង្ហាញថា (***Fm***) ក៏ត្រូវចំពោះ m + 1 ដែរ គឺថា ដោយប្រើសម្មតិកម្មខាងលើ

យើងត្រូវបង្ហាញថា $y = x^{m+1} \ => \ y' = (m+1)x^m$ **(F-VI-d3)** $y = x^{m+1}$

អាចសរសេរជា

$y = x^m \times x$

ដោយយក :

$u = x^m \ => \ u' = mx^{m-1}$ (ដោយ **(F-VI-d2)**)

$v = x \ => \ v' = 1$

$y = u \times v$

$y' = u'v + uv'$

$y' = (mx^{m-1})x + x^m$

$y' = mx^m + x^m$

$y' = (m+1)x^m$ នេះបង្ហាញថា **(F-VI-d3)** ក៏ត្រូវដែរ ។

<u>សេចក្តីសន្និដ្ឋាន</u> : រូបមន្ត (***Fm***) ត្រូវគ្រប់ $m \in N$ ។

<u>សង្កេត</u>

ហេតុអ្វីក៏គេហ៊ាន ថា (***Fm***) ត្រូវគ្រប់ $m \in N$ បើគ្រាន់តែសង្កេតឃើញថាត្រូវត្រឹមតែ $m = 1$ សោះ ។ យើងឆ្លើយថា ដោយសារការបង្ហាញ ចំណុចទី 3- នេះហើយ ដែលអនុញ្ញាតឲ្យយើងហ៊ានអះអាងយ៉ាងនេះ ។

ព្រោះថាដោយការបង្ហាញទី 3- <u>បើរូបមន្តត្រូវដល់ជួរ m វាក៏ត្រូវដល់ ជួរទី m+1 ដែរ</u>

ដូច្នេះបើត្រូវចំពោះ m= 1 វាក៏ត្រូវចំពោះ m+1 = 2 ដែរ

ហើយបើត្រូវចំពោះ m= 2 វាក៏ត្រូវចំពោះ m+1 = 3 ដែរ

ហើយបើត្រូវចំពោះ m= 3 វាក៏ត្រូវចំពោះ m+1 = 4 ដែរ

………………………………………ៗលៗ …………………..

<u>ហេតុនេះហើយ បានជាថាត្រូវ $\forall n \in N$</u> ។

<u>ខ- ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ $y = x^m$ ដោយ $m \in Q$(សំនុំចំនួនសនិទាន)</u>

<u>ខ-1 / $m \geq 0$</u>

$m \in Q$ យើងអាចយក $m = \frac{p}{q}$ ដោយ $p \in N,\ q \in N$

ដូច្នេះ y ទៅជា $y = x^{\frac{p}{q}}$ => $y^q = (x^{\frac{p}{q}})^q$

រឺ $y^q = x^p$

$y^q = x^p$ => ដោយធ្វើដេរីវេទាំងសងខាង <u>ដោយយក x ជាអថេរ</u> យើងបាន៖

$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$ (ដោយប្រើដេរីវេអនុគមន៍បណ្តាក់ y^q ផង និង ដោយប្រើរូបមន្ត

(F-VI-d2) ផង ព្រោះ $p \in N,\ q \in N$) ។

<u>ចូរសង្កេត ថា</u> **(R-VI-01)** (R = Remarque)

> $y = x^{\frac{p}{q}}$ ជាអនុគមន៍ មានអថេរ x តែបើយើងតាង $z = y^q$ នោះយើងឃើញថា z មាន អថេរ y ហើយ y មានអថេរ x។ ហេតុនេះហើយ បានជាមាន y' នៅពេលដែលយើងធ្វើដេរីវេ នៃអនុគមន៍ y^q ។
>
> <u>ការសង្កេតនេះសំខាន់ណាស់</u> ចូរខំគិត ដើម្បីនឹងបានយល់ឲ្យច្បាស់ ព្រោះដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់នេះ យើងនឹងជួបជាញឹកញាប់ ។

$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$ => $y' = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}}$

$$y' = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}}$$

រឺ

$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1} \times y^{1-q}$ (1)

ដោយ $y = x^{\frac{p}{q}}$ => $y^{1-q} = [\, x^{\frac{p}{q}}]^{1-q}$ (2)

ដោយប្រើរូបមន្ត : $(x^m)^n = x^{mn}$ និង $x^m \times x^n = x^{m+n}$

(1) និង (2) ឲ្យ ៖

$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1} \times [\, x^{\frac{p}{q}}]^{1-q}$

$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1} \times x^{\frac{p(1-q)}{q}}$

$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1+\frac{p(1-q)}{q}}$

$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1+\frac{p-pq}{q}}$

$y' = \frac{p}{q} \times x^{p-1+\frac{p}{q}-p}$

$y' = \frac{p}{q} \times x^{\frac{p}{q}-1}$

ដូច្នេះ យើងបានរូបមន្ត $y = x^{\frac{p}{q}}$ $(p \in N, q \in N)$ => $y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$

រឺ $y = x^m$ => $y' = mx^{m-1}$ ($m \geq 0$ និង $m \in Q$) (3)

ខ-2 / $m < 0$

បើ $m < 0$ យើងតាង $m = -n$ ដូច្នេះ $n \geq 0$ និង $n \in Q$

$y = x^m = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ => $y \times x^n = 1$

$y \times x^n = 1$ => $(y \times x^n)' = 0$ (ដោយយកដេរីវេទាំងសងខាង)

ដោយរូបមន្តដេរីវេ $(uv)' = u'v + uv'$, យើងអាចសរសេរ

$(y \times x^n)' = y'x^n + y(x^n)'$

$= y'x^n + y\,(nx^{n-1})$ ដោយ (3)

$= y'x^n + x^{-n}\,(nx^{n-1})$

$= y'x^n + nx^{-1}$

ដូច្នេះ $(y \times x^n)' = 0$ => $y'x^n + nx^{-1} = 0$, រឺ

$y' = \frac{-nx^{-1}}{x^n}$ = $-n\,x^{-n-1} = m\,x^{m-1}$

ដូច្នេះ

$y = x^m$ => $y' = mx^{m-1}$ ($m < 0$ និង $m \in Q$) (4)

រួមសេចក្តីទៅ ដោយ (3) និង (4) យើងបានរូបមន្ត រួមតែមួយ ៖

$y = x^m$ => $y' = mx^{m-1}$ ដោយ $m \in \boldsymbol{Q}$

(**F-VI-d4**)

ដោយ $N \subset Z \subset Q$ ដូច្នេះ (**F-VI-d4**) ជារូបមន្តរួម ប្រើបានចំពោះ m នៅក្នុង N, Z រឺ Q ។

VII- រូបមន្ត ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ក- ដេរីវេនៃ $y = \sin x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$

$= \frac{sinxcosh + sinhcosx - sinx}{h}$

$= \frac{sinx(\cosh - 1) + sinhcosx}{h}$

$= \ sinx \frac{(\cosh - 1)}{h} + cosx \frac{sinh}{h}$

កាលណា $h -> 0,\quad \frac{(\cosh - 1)}{h}$ -> 0 ហើយ $\frac{sinh}{h}$ -> 1

([2]) **(F-VII-01)**

ដូច្នេះ $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ (\sin x \ \times 0\ ) + (\cos x \ \times 1) \ = \ cosx$

ដូច្នេះរូបមន្ត ដេរីវេ គឺ

$y = \sin x \ \ => \ y' = \cos x$
$y = \sin u \ \ => \ y' = \cos u \ \times u'$

(F-VII-02)

ដោយ **<u>សង្កេត - (R-III-01)</u>**)

<u>**២**- ដេរីវេនៃ $y = \cos x$</u>

យើងអាចសរសេរ ៖

$\cos x \ = \ \sin\ (x + \frac{\pi}{2})$

$(\cos x)' \ = (\ \sin(x + \frac{\pi}{2}\ ))'$

ដោយប្រើរូបមន្តដេរីវេ អនុគមន៍ $\sin x$ **(F-VII-02)**

$(\ \sin(x + \frac{\pi}{2}\ ))' \ = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

ដោយ $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = - \ sin\ x$, ដូច្នេះ ៖

$y \ = \ cos\ x => \ y' = \ - sin\ x$
$y = cos\ u \ => \ y' = - sin\ u \ \times \ u'$

(**F-VII-03)**

ដោយ **<u>សង្កេត - (R-III-01)</u>**)

[2] សូមសន្មតសិនចុះ ចំពោះលីមីតទាំងពីរនេះ យើងនឹងបញ្ជាក់នៅពេលក្រោយ ។

គ- ដេរីវេនៃ $y = tan\,x$

$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (y មានទំរង់ $\frac{u}{v}$)

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{cos^2 x}$$

$$y' = \frac{(\cos x)\cos x - \sin x(-\sin x)}{cos^2 x}$$

$$y' = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$$

$$y = tan\,x \quad => \quad y' = 1 + tan^2 x$$ **(F-VII-04)**

ឃ- ដេរីវេនៃ $y = cotan(x)$

$y = \cot anx$

$y = \frac{\cos x}{\sin x}$ => $y' = \frac{-sin^2 x - cos^2 x}{sin^2 x}$

$$y' = \frac{-1}{sin^2 x} = -\frac{1}{sin^2 x}$$

$$y' = -\frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x}$$

$$y' = -(1 + \frac{cos^2 x}{sin^2 x})$$

$$y' = -(1 + cotan^2 x)$$

$$\boldsymbol{y = cotanx} \; => \; y' = -(1 + cotan^2 x)$$ **(F-VII-05)**

<u>សង្កេត</u>

រូបមន្តខាងលើ បានឡើងដោយសន្មតថា x ជារ៉ាដ្យង់ ។

បើ x ជា ដឺក្រេ នោះត្រូវផ្ទូរមក រ៉ាដ្យង់ វិញ ដោយវិធី ៖

$180° \rightarrow \pi$ (រ៉ាដ្យង់)

$1° \rightarrow \frac{\pi}{180}$

$x° \rightarrow \frac{\pi \times x}{180}$

ដូច្នេះ បើ t ជារ៉ាដ្យង់ យើងមាន សម្ព័ន្ធរវាង x ជាដឺក្រេ និង t ជារ៉ាដ្យង់ ៖

$$t = \frac{\pi \times x}{180}$$

$t = \frac{\pi \times x}{180}$	ដោយ x ជាដឺក្រេ
	និង t ជារ៉ាដ្យង់

(F-VII-06)

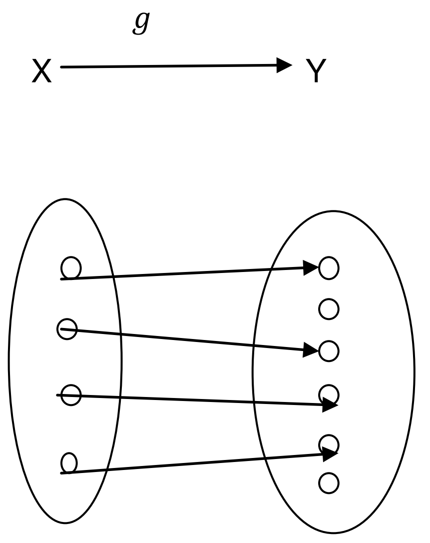
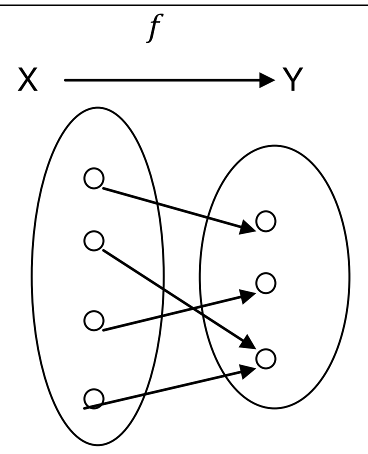
<u>ឧទាហរណ៍</u>

ដោយគេដឹង x ជាដឺក្រេ គេបាន t ជារ៉ាដ្យង់ ដោយប្រើ **(F-VII-06)**

$x = 60° \Rightarrow t = \frac{\pi \times 60}{180} = \frac{\pi}{3}$

ង- អនុគមន៍ អាំងសេចទីវ (injective) សៀសេចទីវ (surjective) និង ប៊ីសេចទីវ (bijective)

និយមន័យ

ក-គេថាអនុគមន៍ g ***អាំងសេចទីវ*** លុះត្រាតែបើកាលណា គ្រប់រូបភាព នៃសំនុំចុង បើគូនឹងធាតុ នៃសំនុំដើម នោះមានយ៉ាង ច្រើនមួយ ។ (បានន័យថា អាចមានរូបភាព ដែលគ្មានធាតុដើមជាគូ)។ បើសរសេរជាគណិតសាស្ត្រ ៖ $\forall x_1, x_2 \in$ ដែនកំនត់(g) : $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ *ឧទាហរណ៍* អនុគមន៍ អាំងសេចទីវ 1/ $f(x) = x$ ព្រោះ $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ 2/ $f(x) = x^3$ ព្រោះ $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow$ $(x_1^3 - x_2^3) = 0 \Leftrightarrow$ $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow$ $(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$	 Fig-1
ខ-គេថាអនុគមន៍ f ***សៀសេចទីវ*** លុះត្រាតែបើកាលណា គ្រប់រូបភាព នៃសំនុំចុង យ៉ាងហោចណាស់ ក៏មានគូនឹងធាតុ នៃសំនុំដើម មួយដែរ ។ (បានន័យថា ចំនួនធាតុនៃសំនុំដើម ច្រើនឬក៏ស្មើនឹងចំនួនធាតុនៃសំនុំចុង) ។ បើសរសេរជាគណិតសាស្ត្រ ៖ $\forall y \in$ សំនុំរូបភាព(f) $(\exists x \ / \ f(x) = y)$ *ឧទាហរណ៍* អនុគមន៍ សៀសេចទីវ	 **Fig-2**

$f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi,+\pi]$ ព្រោះ $\underline{\forall y \in [-1,1], \exists x /\ \sin x = y}$ (1)។

ដោយយើងដឹង y ដូច្នេះ យើងអាចរកមុំ $\propto$ មួយក្នុងចន្លោះ $[-\pi,+\pi]$ ដែលមាន $\sin \propto = y$ ហើយដើម្បីរក x យើងប្រើ (1) ដោយសរសេរ $\sin x = \sin \propto$ $=>$ $x = \propto$ និង $x = \pi - \alpha$ ដោយ $\propto \in [-\pi ;+\pi]$ នោះ $(\pi - \alpha)$ ក៏នៅក្នុងចន្លោះ $[-\pi ;+\pi]$ ដែរ ។ ដូច្នេះ កាលណាគេឲ្យ y យើងអាចរកចំនួន x បានជានិច្ច ។ តាមនិយមន័យ អនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x) = \sin x$ ជាអនុគមន៍សៀសេចទីវ ។ ចូលមើលក្រាប $\sin(x)$ ខាងក្រោម គូរក្នុងចន្លោះ $[-2\pi; +2\pi]$ ៖

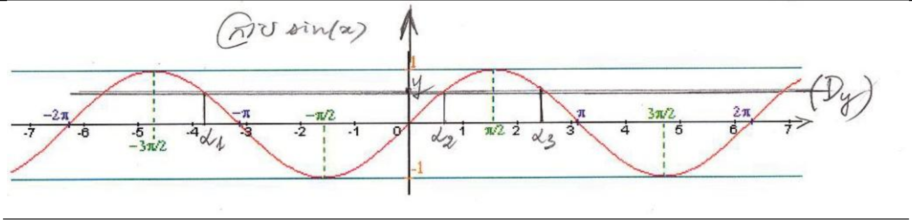


Fig-3

ក្នុងឃ្លា (1)ថា $\underline{\forall y \in [-1,1], \exists x /\ \sin x = y}$ មានន័យថា យើងមាន y ។ដូច្នេះដោយ y យើងគូរ បន្ទាត់ D_y ស្របនឹងអ័ក្ស $\vec{ox}$ យើងឃើញថា បន្ទាត់នោះកាត់ ក្រាប (**Fig-3**) ជាច្រើនចំនុច ដូចជាចំនុច អាប់ស៊ីស $\propto_1, \propto_2, \propto_3$ ជាដើម នៅក្នុងចន្លោះ $[-2\pi; 2\pi]$។តែបើនៅក្នុងចន្លោះ $[-\pi; +\pi]$ វិញ នោះមានតែ អាប់ស៊ីស $\propto_2, \propto_3$ ប៉ុណ្ណោះ ។ដោយជាក្រាប នៃអនុគមន៍ *sinus* នោះ $\sin \propto_2 = y$ និង $\sin \propto_3 = y$ ហេតុនេះហើយបានជាយើងហ៊ានថា $\underline{\forall y \in [-1 ;1], \exists x /\ \sin x = y}$ ព្រោះ x ដែលមានគឺ $\propto_2, \propto_3$ បើគេកម្រិតក្រាប តែក្នុង ចន្លោះ $[-\pi; +\pi]$ ។

<u>គ-គេថាអនុគមន៍ h **ប៊ីសេចទីវ**</u> លុះត្រាតែ ជាអនុគមន៍ <u>**អាំងសេចទីវ**</u> ផង និង <u>**សៀសេចទីវ**</u> ថែមទៀត ។ (បានន័យថា ចំនួនធាតុនៃសំនុំដើម និងចំនួនធាតុនៃសំនុំចុង ស្មើគ្នា)។ បើសរសេរជាគណិតសាស្ត្រ ៖

$\forall x_1, x_2 \in$ ដែនកំនត់(h) : $h(x_1) = h(x_2) \; => \; x_1 = x_2$

<u>**ហើយនិង**</u>

$\forall y \in$ សំនុំរូបភាព(h) $(\exists x \;/\; h(x) = y)$ ។ <u>សង្កេត</u> ៖ អនុគមន៍ខួប ពុំអាច ប៊ីសេចទីវ បានទេ (មើល **Fig-3**) ។

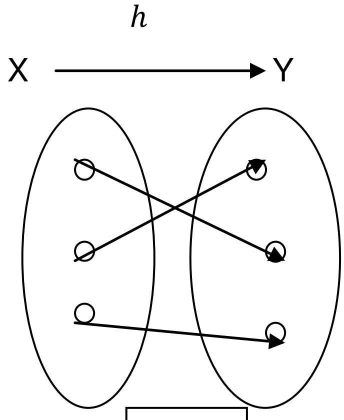


Fig-4

សង្កេត-1

-បើយើងមើល **Fig-1** យើងឃើញថា អនុគមន៍នោះគ្រាន់តែ *អាំងសេចទីវ* តែមិនទាន់ *សឺសេចទីវ* ទេ ព្រោះនៅក្នុងសំនុំរូបភាព នៅសល់ធាតុខ្លះដែលអត់គូជាមួយនឹងធាតុនៃសំនុំដើម ។

-បើយើងមើល **Fig-2** យើងឃើញថា អនុគមន៍នោះគ្រាន់តែ *សឺសេចទីវ* តែមិនទាន់ *អាំងសេចទីវ* ទេ ព្រោះមានធាតុខ្លះក្នុងសំនុំរូបភាព មានគូលើសពីមួយ ក្នុងសំនុំដើម ។

- តាមនិយមន័យ *ប៊ីសេចទីវ* ដើម្បី ឲ្យ **Fig-1** ទៅ ជា **Fig-4** ទាល់តែក្នុងសំនុំ Y គ្មានសល់ធាតុអត់គូ បានន័យថាត្រូវដូច **Fig-2** ថែមទៀត ។ រួមសេចក្តីទៅ គឺ ត្រូវដូច **Fig-1** ផង និងដូច **Fig-2** ផង ឬក៏ថា *អាំងសេចទីវផង* និង *សឺសេចទីវទៀត* ។

***ឧទាហរណ៍** ម្យ៉ាងទៀតចំពោះ អាំងសេចទីវ សឺសេចទីវ និង ប៊ីសេចទីវ*

យើងតាងដោយ X *សិស្ស ថ្នាក់ ទី១០ ហើយ* Y *មុខវិជ្ជាខាងកីឡានិងសិល្ប:ដែលសិស្សត្រូវយកមុខវិជ្ជាណាមួយ ក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាទាំងឡាយដែលសាលាស្នើឲ្យជ្រើសរើស ។*

លក្ខខ័ណ្ឌគឺ:

១- សិស្សម្នាក់យកមុខវិជ្ជាបានតែមួយគត់ ឧបមាថាបើបានយកការហែលទឹកហើយនោះពុំអាចយកមុខវិជ្ជាអ្វីផ្សេងទៀតបានឡើយ ។

២- មុខវិជ្ជាណា ក៏សិស្សអាចរើសបានដែរ ។

បើគេតាង ដោយ m *ចំនួនសិស្ស ទាំងអស់ក្នុងថ្នាក់ទី១០ និង* n *ចំនួនមុខវិជ្ជាកីឡានិងសិល្ប: ទាំងអស់ដែលសាលាមាន ហើយ* f *ជាអនុគមន៍ពី* X *ទៅ* Y

តើត្រូវថែមលក្ខខ័ណ្ឌ អ្វីទៀត ដើម្បី ឲ្យ f *ទៅ ជាអនុគមន៍ អាំងសេចទីវ សឺសេចទីវ និងប៊ីសេចទីវ ?*

ឆ្លើយ

មុននឹងឆ្លើយ គួរសង្កេតថា លក្ខខ័ណ្ឌទី១ ជាលក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់នៃអនុគមន៍ទូទៅ ទាំងអស់ ព្រោះថាធាតុដើមមួយ មិនអាច (ដោយអនុគមន៍) មានរូបភាព ដល់ទៅ ពីរ ទេ ។នេះជានិយមន័យរបស់អនុគមន៍ទាំងអស់ ។ តែ រូបភាពមួយ អាចមាន ធាតុដើមច្រើន ។

(R-VII-01)

១- *f* ទៅ ជាអនុគមន៍ អាំងសេចទីវ

ដោយមើល **Fig-1** *f* ទៅ ជាអនុគមន៍ អាំងសេចទីវ បើសិស្សតិច ហើយមុខវិជ្ជាច្រើន (គឺ $m \leq n$) និង សិស្សម្នាក់ៗ ត្រូវយកមុខវិជ្ជាខុសគ្នា ។

២- *f* ទៅ ជាអនុគមន៍ សឺរសេចទីវ

ដោយមើល **Fig-2** *f* ទៅជាអនុគមន៍ សឺរសេចទីវ បើសិស្សច្រើន ហើយមុខវិជ្ជាតិច (គឺ $m \geq n$) ។

៣- *f* ទៅ ជាអនុគមន៍ ប៊ីសេចទីវ

ដោយមើល **Fig-4** *f* ទៅ ជាអនុគមន៍ ប៊ីសេចទីវ បើចំនួនសិស្ស និង ចំនួនមុខវិជ្ជាស្មើគ្នា (គឺ $m = n$) និង សិស្សម្នាក់ៗ ត្រូវយកមុខវិជ្ជាខុសគ្នា ។

(ម្យ៉ាងទៀត [តាម ១- ($m \leq n$) និង តាម ២- ($m \geq n$)] => $m = n$)

សង្កេត-2

យើងអាច ប្តូរអនុគមន៍ អាំងសេចទីវ ឲ្យទៅជា ប៊ីសេចទីវ ដោយបន្ថយធាតុក្នុង សំនុំចុង Y

ឧទាហរណ៍

$X = \{1, 2, 3, 4\}$; $Y = \{a, b, c, d, e, k, p\}$; អនុគមន៍ f ពី X ទៅ Y

$f : X \longrightarrow Y$ កំនត់ដោយ : $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3)= d$, $f(4) = p$

យើងឃើញថា បើយើងតាង Y1 ជាសំនុំរូបភាព(f) នោះ $Y1 = \{a, c, d, p\}$

គឺ Y1 បានដោយដកពី Y នូវធាតុ d, e, k ចេញ នៅពេលនោះ f ជាអនុគមន៍ អាំងសេចទីវ ពី X ទៅ Y1 ។

<u>សង្កេត-3</u>

យើងធ្លាប់ជួបមកហើយ កាលណាយើងគូរក្រាប នៃ អនុគមន៍ f ណាមួយ ក្រាបនោះច្រើនតែ ឡើងចុះ ឡើងចុះ ហើយបើឡើងដល់កំពូលវាក៏ចុះមកវិញ (ដូចជីវិតនៃយើងគ្រប់គ្នាដែរ) ហើយបើយើងកម្រិតយកតែ ចន្លោះ I = [a ; a+∝] ដែលអនុគមន៍នោះឡើង និង J = [f(a), f(a+∝)] នៅពេលនោះ យើងបាន <u>អនុគមន៍ f ប៊ីសេចទីវ ពី I ទៅ J</u> ។

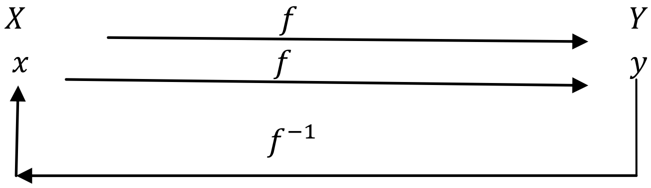
សូមជ្រាបថា នៅក្នុងចន្លោះ I ដែលអនុគមន៍នោះចុះ ក៏បានដែរ នៅពេលនោះ យើងយក J = [f(a+∝), $f(a)$] ។ <u>ដោយបន្ថយដែនកំនត់ អនុគមន៍ជាប់ធម្មតា អាចទៅជាអនុគមន៍ប៊ីសេចទីវបាន ។</u>

<u>រួមសេចក្តីទៅ</u>:

កាលណាគេបន្ថយ ដែនកំនត់ ត្រឹមតែចន្លោះ I ដែលអនុគមន៍ f កើនជានិច្ច ឬ ចុះជានិច្ច គេអាចធ្វើ f ឲ្យក្លាយទៅជាអនុគមន៍ **<u>ប៊ីសេចទីវ</u>** ពី I ទៅ $f(I)$ បើសិន f ដេរីវ៉ាបលើ I ។

(R-VII-02)

ការសង្កេតនេះមានប្រយោជន៍ ចំពោះការសិក្សា អនុគមន៍ច្រាស ព្រោះថាដើម្បី អនុគមន៍ f មានអនុគមន៍ ច្រាស f^{-1} លុះត្រាតែ f ជាអនុគមន៍ ប៊ីសេចទីវ ព្រោះតាមនិយមន័យ



(Fig-5)

$$y = f(x) \quad <=> \quad x = f^{-1}(y)$$

(F-VII-07)

យើងគួរសួរដែរ ហេតុអ្វីបានជា f ត្រូវ ប៊ីសេចទីវសិន ទើបមាន អនុគមន៍ ច្រាស f^{-1} ?
ព្រោះឧបមា f គ្រាន់តែ សៀសេចទីវ នោះ y តែមួយ <u>អាច</u>មានជាតុដើមដល់ទៅ ពីរ ក៏បាន
ចូរមើល (**Fig-2**) ដូចជា $y = f(x_1)$ និង $y = f(x_2)$ ដូច្នេះ ដោយ (**F-VII-07)**

$y = f(x_1) \Rightarrow f^{-1}(y) = x_1$ ហើយ $y = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(y) = x_2$ បានន័យថា
ចំពោះ f^{-1} ធាតុ y តែមួយ មានរូបភាពដល់ទៅពីរ គឺ x_1 និង x_2 ដែលខុសពីនិយមន័យ
ទូទៅនៃអនុគមន៍ មើល (**R-VII-01**) ។

<u>ឞ- អនុគមន៍ $y = Arcsin(x)$ និងអនុគមន៍ $y = Arccos(x)$</u>

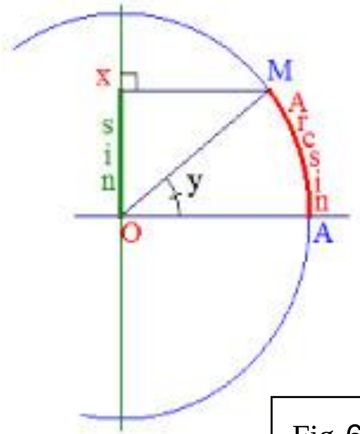


Fig-6

<u>Fig-6</u> : $y = Arcsin(x) \iff \sin(y) = x$ (**F-VII-08)**
(ពាក្យបារាំង Arc ប្រែថា ធ្នូ រាងកោងដូចរង្វង់មណ្ឌល)
អនុគមន៍ Arc sinus ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ច្រាស នឹងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ sinus (ស៊ីនុស) កម្រិតត្រឹមតែចន្លោះ $J = [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$ ។ Arc sinus នៃចំនួន x គឺជា មុំ y សំដែងជារ៉ាដ្យង់ នៃចន្លោះ $[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$ ហើយដែលមាន sinus ស្មើនឹង x $(sinus\ (y) = x)$ ។ <u>ឧទាហរណ៍</u>
$sin\ (\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} = Arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$ បានន័យថា $\frac{\pi}{3}$ ជា Arc ជាផ្នែកនៃរង្វង់មូល រឺ មុំជារ៉ាដ្យង់ ដែលមានស៊ីនុសស្មើនឹង $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

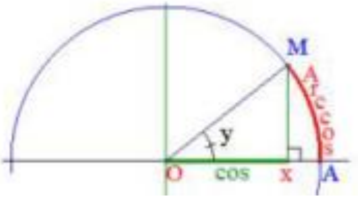


Fig-7

<u>Fig-7</u> : $y = Arccos(x) \iff \cos(y) = x$ (**F-VII-09)**
អនុគមន៍ Arc cosinus ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ច្រាសនឹងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ cosinus (កូស៊ីនុស) កម្រិតត្រឹមតែចន្លោះ $[0; +\pi]$ ។ Arc cosinus នៃចំនួន x គឺជា មុំ y សំដែងជារ៉ាដ្យង់ នៃចន្លោះ $[0; +\pi]$ ហើយ ដែលមាន cosinus ស្មើនឹង x $(cosinus\ (y) = x)$ ។

ឧទាហរណ៍ យើងដឹងថា $sin(x) = cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ព្រោះ $[(x) + (\pi/2 - x)] = \frac{\pi}{2}$ ។ យើងតាង $t = sin(x) => x = Arcsin(t)$ ដោយ (**F-VII-08)** ហើយ $t = cos(\frac{\pi}{2} - x) => \frac{\pi}{2} - x = Arccos(t)$ ដូច្នេះ យើងបានរូបមន្តៈ $Arcsin(t) + Arccos(t) = x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ រឺ $\boldsymbol{Arcsin(t) + Arccos(t) = \frac{\pi}{2}}$ ។

៦ - $y = Arctan(x)$

និយមន័យ

អនុគមន៍ តង់សង់ (tan) ជាប់ និង កើនជានិច្ច លើចន្លោះ $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ ហើយថែមទាំង ប៊ីសេចទីវ ពី $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ ទៅ R ។ ដូច្នេះ ក៏មានអនុគមន៍ ច្រាស ហៅថា "អាកតង់សង់" $(Arctangente)$ សរសេរជា **Arctan** ដែល ប៊ីសេចទីវ ពី R ទៅ $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ។

$$y = Arctan(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = tan\, y \quad \text{និង} \quad y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

នៅពេលនេះយើងនឹងសិក្សា អនុគមន៍ y = tan(x) និង x = Arctan(y) ឲ្យបានល្អិតល្អន បន្តិចៗ ក្នុង ពាក្យ $Arctan$ គេសរសេរ A (ជាអក្សរធំ) ព្រោះតង់សង់ ជាអនុគមន៍ខួប ហើយ ចំពោះអនុគមន៍ច្រាស គេកម្រិតយកតែខួបនៅក្នុងចន្លោះ $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ តែប៉ុណ្ណោះ ។

Y = tan(x) $= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

1-រកខួប

tan(x+π) $= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}$ = tan(x) => អនុគមន៍ tan ជាអនុគមន៍ខួប ហើយ មួយខួប $= \pi$

2-រកអ័ក្សឆ្លុះ

tan(-x) $= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$ = - tan(x) => អនុគមន៍ tan ជាអនុគមន៍ សេស

ដូច្នេះ ក្រាប tan ឆ្លុះធៀបនឹង គល់ o

<u>3-រកដែនកំនត់</u>

Y = tan(x) $= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ មិនកំនត់កាលណា $\cos(x) = 0$

$cos(x) = 0$ => x = $\pm\frac{\pi}{2}$

ដោយ π ជាខួប និង Y = tan(x) ជាអនុគមន៍សេស ដូច្នេះ យើងយកដែនកំនត់ ប្រវែងមួយខួប ដោយ មានគល់ o នៅកណ្តាល ហើយគ្មាន x = $\pm\frac{\pi}{2}$ ពោលគឺ D = $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

<u>4-រកដេរីវេ</u>

Y = tan(x) => Y' = 1++tan^2(x) >0

<u>5-តារាងអថេរភាព $y = tan(x)$</u> **(T1)**

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
y'		+		+		+		+	
$y = tan(x)$	-∞	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	+∞

<u>6-តារាងអថេរភាព $x = Arctan(y)$</u> **(T2)**

(x) y	- ∞		- 1		0		1		+∞
(y′) x'		+		+		+		+	
(y = Arctan(x)) $x = Arctan(y)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$-\frac{\pi}{4}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

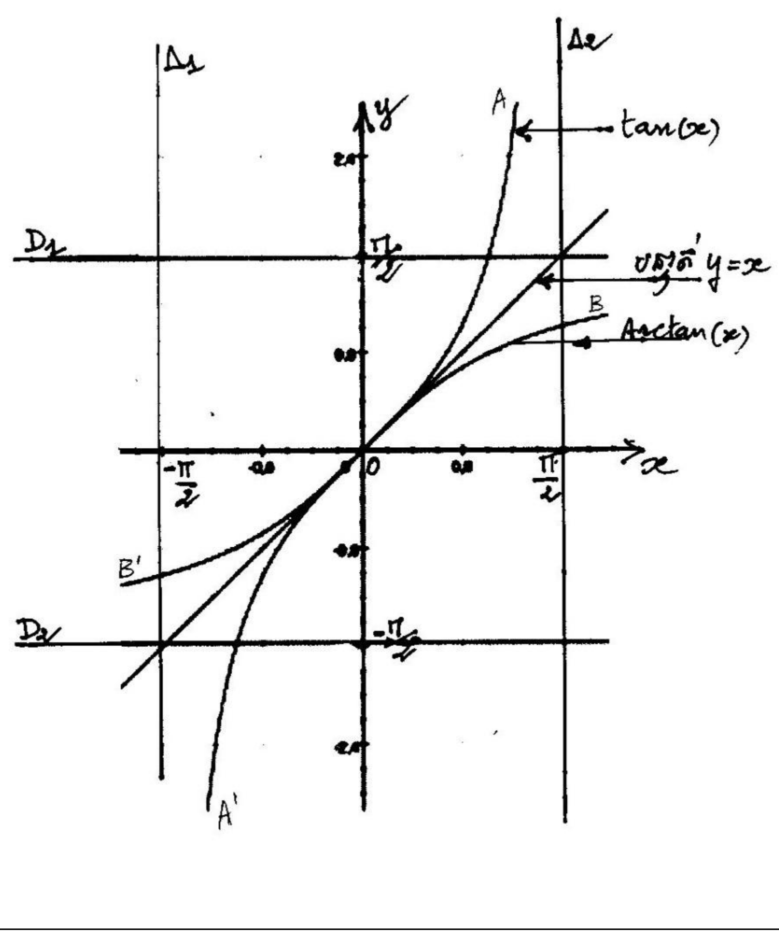
(x) (y′) (y = Arctan(x)) ជាអថេរដែលត្រូវប្រើ ដើម្បីគូរក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរ <u>ក្នុងតំរុយតែមួយ</u>ៗ

យើងសង្កេត មើលតារាង **(T1)** និង **(T2)**

ចំពោះ **(T1)**, y = tan(x) បានន័យថា x ជាធាតុដើម ហើយ y ជាធាតុចុង

ចំពោះ **(T2)**, x = Arctan(y) បានន័យថា y ជាធាតុដើម ហើយ x ជាធាតុចុង

ដូចនេះ បើនៅក្នុង<u>តំរុយតែមួយ</u> យើងតាង C1 ក្រាបនៃអនុគមន៍ y = tan(x) និង C2 ក្រាបនៃអនុគមន៍ x = Arctan(y) បើចំនុច M(x,y)នៅលើ C1 នោះចំនុច N(y,x) ត្រូវនៅលើ C2 គឺថា ចំពោះ ចំនុច M និង N អាប់ស៊ីស និង អរដោនេ ផ្លាស់ប្តូរគ្នា (អាប់ស៊ីសនៃ M ទៅជាអរដោនេនៃ N ហើយអរដោនេនៃ M ទៅជាអាប់ស៊ីសនៃ N) : ហេតុនេះហើយ បានជាគេថា ក្រាប C1 និង ក្រាប C2 ឆ្លុះគ្នា ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ y = x ។ ដូចក្រាបខាងក្រោមនេះ៖

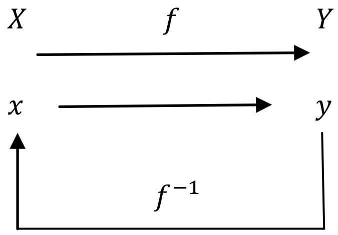


- ដោយប្រើ តារាង **(T1)**យើងគូរ ក្រាប (A’A) របស់ $y = tan(x)$ ដោយមានបន្ទាត់ Δ_1 (x=-$\frac{\pi}{2}$) និង Δ_2 (x=$\frac{\pi}{2}$)ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

-ដោយប្រើ តារាង **(T2)**យើងគូរ ក្រាប (B’B) របស់ $y = Arctan(x)$ ដោយមានបន្ទាត់ D_1 (y=$\frac{\pi}{2}$) និង D_2 (y=-$\frac{\pi}{2}$)ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ជ- ដេរីវេនៃ អនុគមន៍ច្រាស f^{-1}

យើងដឹងហើយ និយមន័យ នៃអនុគមន៍ច្រាស គឺ ៖



$y = f(x)$ (1) => x ជា អថេរ នៃ f

$\updownarrow$

$x = f^{-1}$ (y) (2) => y ជា អថេរ នៃ f^{-1}

ដោយ (2) យើងធ្វើដេរីវេ (ទាំងសងខាង សញ្ញា =) **ដោយយក x ជាអថេរ** យើងបាន៖

$x'(x) = (f^{-1})'(y) \times y'(x)$

រឺ $1 = (f^{-1})'(y) \times f'(x)$ (ព្រោះ ដេរីវេ នៃ x ដោយយក x ជាអថេរ គឺស្មើនឹង 1 ហើយ ដោយ (1) $y = f(x)$ => $y'(x) = f'(x)$)

រឺ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ ដោយ $y = f(x)$

$$\boldsymbol{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}} \quad \text{ដោយ } y = f(x)$$

(F-VII-09)

សង្កេត

នេះជារូបមន្តទូទៅ ។ ដោយអថេរ របស់ f^{-1} គឺ y ដូច្នេះ កាលណាយើង ប្រើរូបមន្តនេះ ចំពោះអនុគមន៍ពិសេសណាមួយ យើងត្រូវ ជំនួស x នៅក្នុង $\frac{1}{f'(x)}$ ដោយ y (ដោយប្រើសម្ព័ន្ធ $y = f(x)$) ។

(R-VII-03)

ឈ- អនុវត្តរូបមន្តខាងលើ ដើម្បីរក ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $Arcsinus, Arcosinus, Arctan,$ $Arccotan$

១- ដេរីវេ $Arcsinus$:

$y = Arcsin(x)$ => $x = sin(y)$ $y \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ (ដើម្បី អនុគមន៍ sin ប៊ីសេចទីវ)

$y' = \dfrac{1}{\cos y}$ (ដោយ (F – VII – 09))

ដោយ x ជាអថេរ របស់ y ដូចនេះត្រូវ ជំនួស y ក្នុង $\frac{1}{\cos y}$ ដោយ x

ដោយយើងប្រើ $x = sin(y)$ ។

យើងអាចសរសេរ sin^2y + cos^2y = 1

រឺ x^2 + cos^2y = 1 => cos^2y = 1 - x^2

យើងដឹងថា ចំពោះ $y = Arcsin(x)$ y ត្រូវនៅក្នុង ចន្លោះ [$-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] => $cosy$ ≥ 0

ដូច្នេះ cos^2y = 1 - x^2 => $cosy = \sqrt{1-x^2}$

ដោយសង្ខេប

$$y = Arcsin(x) \quad => \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ **(F-VII-10)**

២- ដេរីវេ $Arccosinus$:

$y = Arccos(x)$ => $x = cos(y)$ $y \in [0 ; \pi]$ (ដើម្បី អនុគមន៍ cos ប៊ីសេចទីវ)

$y' = \dfrac{1}{-\sin y}$ (ដោយ (F – VII – 09))

ដោយ x ជាអថេរ របស់ y ដូចនេះត្រូវ ជំនួស y ក្នុង $\frac{-1}{\sin y}$ ដោយ x

ដោយយើងប្រើ $x = cos(y)$ ។

យើងអាចសរសេរ sin^2y + cos^2y = 1

រឺ sin^2y + x^2= 1 => sin^2y = 1 - x^2

យើងដឹងថា ចំពោះ $y = Arccos(x)$ y ត្រូវនៅក្នុង ចន្លោះ [0 ; π] => $siny \geq 0$

ដូច្នេះ sin^2y = 1 - x^2 => $siny = \sqrt{1 - x^2}$

ដោយសង្ខេប

$$y = Arccos(x) \quad => \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(F-VII-11)

៣- ដេរីវេ ***Arctan***:

$y = Arctan(x) \quad => \quad x = tan(y) \quad y \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

$y' = \frac{1}{1+tan^2y}$ (ដោយ (F – VII – 09))

ដោយ x ជាអថេរ របស់ y ដូចនេះត្រូវ ជំនួស y ក្នុង $\frac{1}{1+tan^2y}$ ដោយ x

ដោយយើងប្រើ $x = tan(y) \quad => \frac{1}{1+tan^2y} = \frac{1}{1+x^2}$

ដោយសង្ខេប

$$y = Arctan(x) \quad => y' = \frac{1}{1+x^2}$$

(F-VII-12)

៤- ដេរីវេ ***Arccotan***:

$y = Arccotan(x) \quad => \quad x = cotan(y) \quad y \in]0 ; \pi[$

$y' = \frac{1}{-(1+cotan^2y)}$ (ដោយ (F – VII – 09))

ដោយ x ជាអថេរ របស់ y ដូចនេះត្រូវ ជំនួស y ក្នុង $\frac{-1}{1+cotan^2y}$ ដោយ x

ដោយយើងប្រើ $x = cotan(y)$ => $\frac{1}{1+cotan^2y} = \frac{1}{1+x^2}$

ដោយសង្ខេប

$$y = Arccotan(x) \quad => y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

(F-VII-13)

****************************** ចប់ដេរីវេ **********************************

មាតិកា-- ទំព័រ

I	*បុព្វយោគ*--	1
II	*តើដេរីវេជាអ្វី*---	1
III	*រូបមន្ត ដេរីវេ* -- -ឧទាហរណ៍ប្រើរូបមន្ត--- -ក- ដេរីវេអនុគមន៍ ពហុធា--- -ខ- ដេរីវេអនុគមន៍ គុណ ចែក ($U \times V$ ឬ $\frac{U}{V}$) ------------------------------------ -គ- ដេរីវេ អនុគមន៍ បណ្តាក់ ---	1 2 2 3 4
IV	*ការអនុវត្តន៍*-- -សិក្សាអំពី អថេរភាពនៃអនុគមន៍--- -ទំនាក់ទំនងរវាង លីមីត និងដេរីវេ- និយមន័យ ដេរីវេត្រង់ x_0 - -បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង - ឌីផេរ៉ង់ស្យែល $dx - dy -$--------------------------	6 6 7
V	*អនុគមន៍ដេរីវ៉ាប*--- -និយមន័យ - អនុគមន៍ជាប់ -កំនើន អថេរ Δx -កំនើនអនុគមន៍ Δf រឺ Δy ធៀបនឹង -ឌីផេរ៉ង់ស្យែល dx, df រឺ dy	10
VI	*បង្ហាញនូវរូបមន្តខ្លះនៃ ដេរីវេ*-- -ដេរីវេនៃអនុគមន៍ : $U + V$-- -ដេរីវេនៃអនុគមន៍ : $U \times V$ --- - ដេរីវេលោការីតមីក : -- -ដេរីវេ : $\frac{U}{V}$ -- -ដេរីវេ : U^m, ដោយ $m \in Q$ (សំនុំចំនួន សនិទាន)------------------------------------	15 15 15 16 16 17

	របៀបបង្ហាញដោយ រេគារ៉ង់ (démonstration par récurrence) --------------------	18
VII	រូបមន្តដេរីវេ នៃអនុគមន៍ ត្រីកោណមាត្រ---	22
	-ដេរីវេ : sin ---	22
	-ដេរីវេ : cos ---	23
	-ដេរីវេ : tan ---	23
	-ដេរីវេ : $cotan$ --	24
	-សម្ព័ន្ធ រវាងដឺក្រេ និង រ៉ាដ្យង់--	25
	-អនុគមន៍ អាំងសេចទីវ (injective) --	26
	-អនុគមន៍ សៀសេចទីវ (surjective) ---	26
	-អនុគមន៍ ប៊ីសេចទីវ (bijective) ---	27
	-អនុគមន៍ ច្រាស ---	30
	-អនុគមន៍ $Arcsin$ ---	31
	-អនុគមន៍ $Arccos$ ---	31
	-អនុគមន៍ $Arctan$ ---	32
	-ដេរីវេអនុគមន៍ច្រាស --	35
	-ដេរីវេអនុគមន៍ : $Arcsin$ ---	36
	-ដេរីវេអនុគមន៍ : $Arccos$ ---	36
	-ដេរីវេអនុគមន៍ : $Arctan$ ---	37
	-ដេរីវេអនុគមន៍ : $Arccotan$ --	37