4-2.ការបំបែក អនុគមន៍ f(x)ដោយកម្រិត នៅក្បែរសូន្យ

គេថា គេបំបែកអនុគមន៍ f(x)ដោយកម្រិត នៅក្បែរសូន្យ បើកាលណា *f(x)* មានរាងជា ៖

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots\ldots\ldots + a_nx^n + \varepsilon x^n$$

ពហុធាតុ ៖

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots\ldots\ldots + a_nx^n$$

ហៅថា ផ្នែកទៀងទាត់ (la partie régulière) នៃការបំបែកនោះ ។ គេបង្ហាញថា ការបំបែកនេះ មានតែមួយគត់ ។

រូបមន្ត ម៉ាក់លោរាំង ផ្តល់ឲ្យយើងនូវរបៀបមួយសម្រាប់រកការបំបែក អនុគមន៍ណាមួយដោយកម្រិត ។

គេអាចអនុវត្តលើការបំបែកដោយកម្រិត ក្នុងលក្ខខ័ណ្ឌខ្លះ នូវ ពិធី បូក គុណ អាំងតេក្រាល និងដេរីវេ ។

យើងនិងឲ្យឧទាហរណ៍ខ្លះ នៃការបំបែកដោយកម្រិត ចំពោះអនុគមន៍ដែលយើងធ្លាប់ជួប ធ្លាប់ប្រើ ៖

បើ $f(x) = \sin x$, យើងអាចរកដេរីវេ តៗ គ្នា ហើយយើងបានដូចជា ៖

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, ……

ជាទូទៅ ៖

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) \quad \textbf{(1)}$$

ពីព្រោះ យើងដឹងថា $f'(x) = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ (a)

ហើយ $f''(x) = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})$ (b)

ដោយ (a) $f'''(x) = -\cos(x) = -\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+\frac{\pi}{2}+\pi)$

$= \sin(x + 3.\frac{\pi}{2})$ (c)

ដោយ (a), (b), (c) យើងសង្កេតឃើញថា (1) ត្រូវចំពោះ n = 1, 2, 3.

ដូច្នេះដោយប្រើរបៀបបង្ហាញដោយ រេគារ៉េង់ យើងសន្មតថា (1)ត្រូវរហូតដល់ n = n ហើយយើត្រូវបង្ហាញថា (1) ក៏ត្រូវចំពោះ n = n +1 ដែរ ៖

យើងមាន $f^{(n)}(x) = \sin(x + n.\frac{\pi}{2})$

ដោយធ្វើដេរីវេ $f^{(n+1)}(x) = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}) = \sin(x + n.\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$ (ដោយ (a))

$= \sin(x + (n+1).\frac{\pi}{2})$ ដូច្នេះ (1) ត្រូវរហូតដល់ n+1 ។

ដើម្បីរកការបំបែកក្បែរសូន្យ យើងប្រើរូបមន្ត **(F-IV-1)** ខាងលើ

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \varepsilon x^n \quad (2)$$

ដោយ $f(x) = \sin(x)$ និង $f^{(n)}(x) = \sin(x + n.\frac{\pi}{2})$

$f^{(n)}(x) = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin(0 + n.\frac{\pi}{2}) = \sin(n.\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$f^{(1)}(0) = \sin(1.\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$f^{(2)}(0) = \sin(2.\frac{\pi}{2}) = \sin(\pi) = 0$

$f^{(3)}(0) = \sin(3.\frac{\pi}{2}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{2}) = -1$

$f^{(4)}(0) = \sin(4.\frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi) = 0$

$f^{(5)}(0) = \sin(5.\frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$

$f^{(6)}(0) = \sin(6.\frac{\pi}{2}) = \sin(3\pi) = 0$

$f^{(7)}(0) = \sin(7.\frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi + 3\frac{\pi}{2}) = -1$

$f^{(8)}(0) = \sin(8.\frac{\pi}{2}) = \sin(4\pi) = 0$

យើងសង្កេតឃើញថា	$f^{(1)}(0)$	$f^{(2)}(0)$	$f^{(3)}(0)$	$f^{(4)}(0)$	$f^{(5)}(0)$	$f^{(6)}(0)$	$f^{(7)}(0)$	$f^{(8)}(0)$
មានតម្លៃជាខួប :	1	0	-1	0	1	0	-1	0 …

ដោយ (2) និងដោយប្រើដេរីវេខាងលើ យើងបានការបំបែកក្បែរសូន្យ នៃ $f(x) = \sin(x)$ ៖

$\sin(x) = 0 + x.1 + \frac{x^2}{2}.0 + \frac{x^3}{3!}.(-1) + \frac{x^4}{4!}.0 + \frac{x^5}{5!}\,1 + \frac{x^6}{6!}\,0 + \frac{x^7}{7!}(-1) + \varepsilon x^7$ ចំពោះ n = 7

 រឺ $\boldsymbol{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \varepsilon x^7}$, ចំពោះ n = 7 (3)

ដោយប្រើរបៀបដូច អនុគមន៍ $\sin(x)$ គេបានលទ្ធផលខាងក្រោមនេះ

ចំពោះអនុគមន៍ $\cos(x)$ ៖

$$\boldsymbol{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \varepsilon x^6}, \text{ ចំពោះ } n = 6 \quad (4)$$

ដោយ (3) និង (4) គេអាចទាញយក ៖

$x - sinx \cong \frac{x^3}{3!} = \frac{x^3}{6}$ (ចំនួនខាងស្តាំ ជាចំនួនក្បៀរចំនួនត្រូវ)

$1 - \cos x \cong \frac{x^2}{2!} = \frac{x^2}{2}$ (ចំនួនខាងស្តាំ ជាចំនួនក្បៀរចំនួនត្រូវ) ។

បើ

$f(x) = \sqrt{1+x}$:

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -(\frac{1}{2})^2 (1+x)^{-\frac{3}{2}}$, ….., **(5)**

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \times \frac{1.3.5. \quad (2n-3)}{2^n}(1+x)^{-\frac{(2n-1)}{2}}$ **(6)** ចំពោះ $n \geq 1$

ដើម្បីបង្ហាញ **(6)** យើងប្រើ របៀបបង្ហាញដោយរេគារ៉ង់

យើងបាន **(5)** ដោយគណនាដេរីវេអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{1+x}$ តាមរូបមន្តដេរីវេ យើងឃើញថារូបមន្ត $f^{(n)}(x)$ ត្រូវចំពោះ n= 1, 2 យើងនឹងបង្ហាញថា រូបមន្តនេះក៏ត្រូវរហូតដល់ n = n +1 ដែរ បើយើងសន្មតថាវាត្រូវ រហូតដល់ n = n ។

យើងគណនា ដេរីវេរបស់ $f^{(n)}(x)$ ដូចតទៅ៖ (ដោយប្រើរូបមន្តដេរី អនុគមន៍ $f(x) = x^m$) ៖

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \times \frac{1.3.5. \quad (2n-3)}{2^n}(1+x)^{-\frac{(2n-1)}{2}}$$

$$f^{(n+1)} = (-1)^{n-1} \times \frac{1.3.5. \quad (2n-3)}{2^n} \times - \frac{(2n-1)}{2} \times (1+x)^{-\frac{(2n-1)}{2}-1}$$

$$= (-1)^{n} \times \frac{1.3.5. \quad (2n-3)(2n-1)}{2^{n+1}} \times (1+x)^{-\frac{(2n+1)}{2}}$$

រឺ

$$f^{(n+1)} = (-1)^{n} \times \frac{1.3.5. \quad (2n-3)(2n-1)}{2^{n+1}} \times (1+x)^{-\frac{2(n+1)-1}{2}}$$ (ជាលទ្ធផលចង់បាន)

<u>សង្កេត-ក</u>

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots\ldots\ldots \times (n-1) \times n$ (មាន n តួ)

$\times$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ (ពិធីគុណ តួនឹងតួ)

$2^n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots\ldots\ldots \times 2 \times 2$ (មាន n តួ)

$n! \times 2^n = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times 2(n-1) \times 2n$

ដើម្បីរកការបំបែកស្រៀរស្វ័ន យើងប្រើរូបមន្ត (2) លើអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{1+x}$

ដោយយក x = 0 (5) និង (6) អោយ ៖

$f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{2},\ f''(0) = -\frac{1}{2^2},\ f'''(0) = \frac{1\,.\,3}{2^3},\ \ldots\ldots$

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \times \frac{1\,.3\,.5. \quad (2n-3)}{2^n}$

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \varepsilon x^n$ ទៅជា

$\sqrt{1+x} = 1 + x(\frac{1}{2}) - \frac{x^2}{2}(\frac{1}{2^2}) + \frac{x^3}{3!}(\frac{1.3}{2^3}) \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}(-1)^{n-1} \times \frac{1\,.3\,.5. \quad (2n-3)}{2^n} + \varepsilon x^n$

$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\,.4} x^2 + \frac{1.3}{3!2^3} x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1\,.3\,.5. \quad (2n-3)}{n!\,2^n} x^n + \varepsilon x^n$

រឺ (ដោយសង្កេត-ក)

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\,.4} x^2 + \frac{1.3}{2.4.6} x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1\,.3\,.5. \quad (2n-3)}{2.4.6.8\ldots.2(n-1).2n} x^n + \varepsilon x^n$