

លំហាត់ទី៦

ជាទូទៅ គេហៅថា កន្លះគ្រុប អាបេលីអៀង មានលំដាប់ គឺជា កន្លះគ្រុបអាបេលីអៀង D ដែលមាន វិធានស្រុតលំដាប់ទាំងស្រុង ដែល $a \geq b \Rightarrow a * c \geq b * c$ ។ ដោយប្រើ ការកត់ត្រានៃ ៧,3 គេតាងដោយ D^* សំនុំនៃធាតុស្មើគ្នាផ្ទៃនៃ D ហើយដោយ Δ ជើងលេច (le quotient) នៃ $D * D^*$ ចែកដោយ វិធានស្រុតសមមូល ៖

$$(a, b) \equiv (a', b') \text{ បើ } a * b' = b * a' \quad (1)$$

គឺថា $\Delta = \frac{D * D^*}{R}$ (ដោយ R ជា វិធានស្រុតសមមូល) ។

a) បង្ហាញថា វិធានស្រុត $a * d \geq b * c$, $(a', b') \equiv (a, b)$ និង $(c', d') \equiv (c, d) \Rightarrow a' * d' \geq b' * c'$

ដោយទាញយកពីនេះ បង្ហាញថា គេបាន វិធានស្រុតលំដាប់ នៅលើ Δ ដោយ ដាក់

$$((a, b)) \geq ((c, d)) \text{ បើ } a * d \geq b * c$$

b) បង្ហាញថា វិធានស្រុតដែលបានកំណត់លើ Δ នេះ ជាវិធានស្រុតលំដាប់ទាំងស្រុង (relation d'ordre total) ។ ដោយ តាងដោយ A, B, C ជាធាតុនៃ Δ បង្ហាញថា វិសមភាព $A \geq B \Rightarrow A * C \geq B * C$ ។ ដូច្នេះ Δ ក៏ជា កន្លះគ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់មួយដែរ ។

c) បង្ហាញថា កន្លះគ្រុបបូក នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ កន្លះគ្រុបគុណ នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង កន្លះគ្រុបបូក នៃចំនួន សនិទាន វិជ្ជមាន គឺជា កន្លះគ្រុបអាបេលីអៀង មានលំដាប់ កាលណាគេឲ្យវាដំនូរ លំដាប់ធម្មតា (on les munit de l'ordre naturel) ដែលយើងធ្លាប់ ប្រើរាល់ថ្ងៃ ។ បើគេតាងដោយ \mathbb{Q}^+ សំនុំនៃចំនួន សនិទានវិជ្ជមាន នោះគេបានរបៀបជា ទូទៅមួយ សម្រាប់ពង្រីកទៅដល់ \mathbb{Z} និងទៅដល់ \mathbb{Q}^+ នូវលំដាប់ធម្មតាដែលមាននៅលើ \mathbb{N} ហើយក៏អាច ពង្រីកតទៅទៀតទៅដល់ \mathbb{Q} នូវលំដាប់ធម្មតានោះដែលបានលើ \mathbb{Q}^+ ។

ចម្លើយ

a)

- បង្ហាញថា វិទ្យាស្យង $a * d \geq b * c$, $(a', b') \equiv (a, b)$ និង $(c', d') \equiv (c, d) \Rightarrow a' * d' \geq b' * c'$ ។

$$(a', b') \equiv (a, b) \Rightarrow a' * b = b' * a \quad (1)$$

$$(c', d') \equiv (c, d) \Rightarrow c' * d = d' * c \text{ ឬ } d' * c = c' * d \quad (2) \text{ ។}$$

ដោយគណនា $(1) * (2)$ យើងបាន៖

$$(a' * b) * (d' * c) = (b' * a) * (c' * d) \text{ ឬដោយប្រើ លក្ខណៈ ផ្គុំ និងត្រលប់នៃ } (*)$$

$$\text{យើងអាចសរសេរ៖ } (a' * d') * (b * c) = (b' * c') * (a * d) \quad (3)$$

ដោយ $(a * d) \geq (b * c)$ នោះដោយ (3) យើងបាន

$$(a * d) * (b' * c') = (b * c) * (a' * d') \Rightarrow (b' * c') \leq (a' * d') \text{ ។}$$

- ដោយទាញយកពីនេះ បង្ហាញថា គេបាន វិទ្យាស្យងលំដាប់ នៅលើ Δ ដោយដាក់ $((a, b)) \geq ((c, d))$ បើ $a * d \geq b * c$ ។

យើងសង្កេតនូវ លទ្ធផលនេះ យើងឃើញថា៖

$$(a, b) \equiv (a', b')$$

$$(c, d) \equiv (c', d')$$

ហើយម្យ៉ាងទៀត

$a * d \geq b * c$ ជា វិទ្យាស្យងរវាង (a, b) និង (c, d) ដែលជាធាតុពីរផ្សេងគ្នានៃ $D * D^*$

$a' * d' \geq b' * c'$ ជា វិទ្យាស្យង រវាង (a', b') និង (c', d') ដែលជាធាតុពីរទៀតនៃ $D * D^*$

តែធាតុពីរចុងក្រោយនេះ មានទំនាក់ទំនង និងធាតុពីរ ពីមុន គឺ (a, b) សមមូលនឹង

(a', b') ហើយ (c, d) សមមូលនឹង (c', d') ហើយដោយសមមូលនេះ ដោយការបង្ហាញ

រួចមកហើយ យើងឃើញថា កម្មសិទ្ធិ នៃវិទ្យាស្យង $a * d \geq b * c$ មិនផ្លាស់ប្តូរទេ បើធាតុ

នៃ $D * D^*$ សមមូលនឹងគ្នា ។ ដូច្នេះយើងអាចពង្រីក កម្មសិទ្ធិនេះ មកដល់ ថ្នាក់ នៃ សម

មូលបាន គឺថា យើងអាចសន្មត វិទ្យាស្យង លំដាប់ទាំងស្រុង មកលើ សំនុំជើងលព្វ

$\Delta = \frac{D * D^*}{R}$ បានដោយតាំងថា ៖ $((a, b)) \geq ((c, d))$ បើ $a * d \geq b * c$ ។

b) បង្ហាញថា រឿងស្រុកដែលបានកំណត់លើ Δ នេះ ជា រឿងស្រុកលំដាប់ទាំងស្រុង (relation d'ordre total) ។ ដោយ តាំងដោយ A, B, C ជាធាតុនៃ Δ បង្ហាញថា វិសមភាព

$$A \geq B \Rightarrow A * C \geq B * C$$

ដើម្បី បង្ហាញថា រឿងស្រុក លើ Δ កំណត់ដោយ

$((a, b)) \geq ((c, d))$ បើ $a * d \geq b * c$ ជា រឿងស្រុកកំណត់ទាំងស្រុង យើងគ្រាន់តែ

បង្ហាញថា $A \geq B \Rightarrow A * C \geq B * C$ (មើល VI, 9) ។

យើងតាំងដោយ $A = ((a, b)), B = ((c, d)), C = ((\alpha, \beta))$ ដោយ $(a, b), (c, d), (\alpha, \beta)$

ជាធាតុនៃ $D * D^*$ ។ ដោយធាតុក្នុង D^* គឺជាធាតុស្មើជ្រុងនៃ D ដូច្នោះធាតុនៃ D^* ក៏ជាធាតុ

នៃ D ដែរ ។ ដោយ D ជាកន្លះគ្រូបអាបេលីអៀង មានលំដាប់ទាំងស្រុង ដូច្នោះ រឿងស្រុក

លំដាប់ រវាងធាតុទាំងឡាយនៃ D ក៏បំពេញ ដូចជា ៖ $a \geq b \Rightarrow a * \alpha \geq b * \alpha$ ជាដើម ។

បន្ទាប់ពីការសង្កេតនេះ យើងត្រូវបំប្លែង ការបង្ហាញយើងវិញ ៖

$$A \geq B \Rightarrow ((a, b)) \geq ((c, d)) \Leftrightarrow a * d \geq b * c \quad (1)$$

$$A * C \geq B * C \Rightarrow ((a, b)) * ((\alpha, \beta)) \geq ((c, d)) * ((\alpha, \beta)) \Leftrightarrow$$

$$((a * \alpha, b * \beta)) \geq ((c * \alpha, d * \beta)) \Leftrightarrow (a * \alpha) * (d * \beta) \geq (b * \beta) * (c * \alpha) \quad (2)$$

យើងត្រូវបង្ហាញ (2) ដោយប្រើ (1) ។ ដោយ $*$ ជាច្បាប់ក្នុងនៃ D កន្លះគ្រូបអាបេលីអៀង

យើងអាចសរសេរ (2) ជា ៖

$$(a * d) * (\alpha * \beta) \geq (b * c) * (\alpha * \beta) \quad (3)$$

ដោយ $*$ ជាច្បាប់ក្នុងនៃ D ដូច្នោះធាតុនីមួយៗនៃ (3) ដូចជា $(a * d)$ ឬ $(\alpha * \beta)$ ជាដើមនោះ

សុទ្ធតែជាធាតុនៃ D ដែលមានលំដាប់ទាំងស្រុង ។ ដូច្នោះ (3) ត្រូវ ដោយសំអាងលើ (1) ។

c) ចម្លើយនៃសំណួរនេះ គឺការអនុវត្តន៍ នៃមេរៀន §V,4 ក្នុងការពង្រីក។
ជាទូទៅក្នុងការពង្រីក គេចាប់ផ្តើម ពី កន្លះគ្រូបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ទាំងស្រុង។
នៅក្នុងលំហាត់នេះ កន្លះគ្រូបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ទាំងស្រុងនោះគឺ សំនុំ N នៃ
ចំនួនគត់ដោយ មាន ច្បាប់ក្នុងលេខ បូក ហើយមានសូន្យ ជា ធាតុ នប៉ុសកលិដ្ឋ ហើយ
មានលំដាប់ទាំងស្រុង គឺលំដាប់ធម្មតា ដែលយើងប្រើរាល់ថ្ងៃ គឺ $s_{n+1} \geq 1$ ហើយដោយ
ប្រើរបៀបនេះ តាមក គេក៏បានពង្រីករហូតដល់ សំនុំ សនិទាន Q ។