លំហាត់ទី៥

គេតាងដោយ G ក្រុមអាបេលីអៀង មានលំដាប់មួយ កត់ត្រាដោយ លេខបូក $(+)$ (មើលនិយមន័យ $\S VI,9$) ហើយ G^{+} សំនុំនៃធាតុ x នៃ G ដែលបំពេញ $x \geq 0$ (ធាតុវិជ្ជមាន) ។

$a)$ បង្ហាញថា រឺឡាស្យុង $a \geq b <=> a - b \in G^{+}$

$b)$ បង្ហាញថា G^{+} ជាកន្ទះក្រុម អាបេលីអៀង មានលំដាប់ បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ ពី $1°$ ទៅ $4°$ ដែលថ្លែងនៅដើម កថាខ័ណ្ឌ $VI,1$។

ចម្លើយ

រំលឹក កន្ទះក្រុមគឺ បានទៀងដោយ សំនុំមួយមាន ច្បាប់ក្នុង ផ្តុំ ។ កន្ទះក្រុមអាបេលីអៀង កាលណាច្បាប់ក្នុងនោះ ត្រលប់។ នៅក្នុង កន្ទះក្រុមមាន ធាតុ នប៉ុសកលីង្គ e គេថាធាតុពីរ x និង y ឆ្លុះគ្នា កាលណា វាបំពេញ $x * y = y * x = e$ (មើល $II, \S 8, a$) ។

$a)$ បង្ហាញថា រឺឡាស្យុង $a \geq b <=> a - b \in G^{+}$

តាមនិយមន័យ ក្រុមអាបេលីអៀង មានលំដាប់ គេមាន៖

$a \geq b \; => a + c \; \geq b + c$ (មើល $VI,9$) (1)

ដោយ $b \in G$ ដូច្នេះ $-b \in G$ (ពីព្រោះ G ជាក្រុម) ដូច្នេះដោយ ជំនួស c ដោយ $-b$ ក្នុង (1) យើងបាន ៖ $a \geq b \; => a - b \geq b - b = 0$ ។ ដូច្នេះ $a \geq b \; => a - b \geq 0$ ឬ $a - b \in G^{+}$ ។ ផ្ទុយទៅវិញ $a - b \in G^{+} \; => \; a - b \geq 0$ ដោយ (1) $a - b \geq 0 \; => \; (a - b) + b \geq 0 + b \; => \; (a + (-b + b) \geq b$ ឬ $a \geq b$ ។

$b)$ បង្ហាញថា G^{+} ជាកន្ទះក្រុម អាបេលីអៀង មានលំដាប់ បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ ពី $1°$ ទៅ $4°$ ដែលថ្លែងនៅដើម កថាខ័ណ្ឌ $VI,1$៖

G^+ ជាកន្ទះក្រុម អាបេលីអៀង មានលំដាប់ ពីព្រោះ វិធីបូក នៅក្នុង G ក៏ជា វិធីបូក នៅក្នុង G^+ដែរ ។ ហើយដោយ $G^+ = \{ x \in G \ / \ x \geq 0 \}$ ដូច្នេះ $0 \in G^+$។ ដូច្នេះ G^+ បាន ល័ក្ខខ័ណ្ឌទី១ និងទី២ ។

<u>ល័ក្ខខ័ណ្ឌទី៣ ៖</u> $a \geq b \Rightarrow \exists\, c$ ដែលឲ្យ $a = b + c$

$a \geq b \Rightarrow a - b \in G^+$ ដែលយើងតាងដោយ c ជាតុនៃ G^+នោះ គឺថា $a - b = c$ ។

ដោយប្រើ (1) ចំពោះ សញ្ញា = នោះយើងបាន៖

$a - b = c \Rightarrow (a-b) + b = c + b \Rightarrow a + (-b + b) = b + c \Rightarrow a = b + c$ ។

<u>ល័ក្ខខ័ណ្ឌទី៤</u> ៖ $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

ដោយប្រើ (1) ចំពោះ សញ្ញា = នោះយើងបាន៖

$a + b = a + c \Rightarrow (a+b) + (-a) = (a+c) + (-a)$ ឬ

$(-a) + (a+b) = (-a) + (a = c)$ (លក្ខណ: ត្រលប់នៃ +)

$(-a + a) + b = (-a + a) + c$ (លក្ខណ: ផ្តុំ នៃ +) $\Rightarrow b = c$ ។

<u>សង្កេត</u>

ឧទាហរណ៍ នៃកន្ទះក្រុម មានដូចជា ចំនួនគត់ $N = \{0, 1, 2, \ \ , n, \ \ldots\ldots\}$ ដែលមានលេខបូក ហើយសូន្យជាធាតុ នប៉ុសកលិគ្គ។ នៅក្នុងកន្ទះ ក្រុម G^+ជាតុនីមួយៗ ឥតមានធាតុផ្ទុះ (ចំពោះលេខបូក គឺជាតុផ្ទុយ) នៅក្នុងសំនុំនោះទេ (ពីព្រោះជាតុផ្ទុយនៃ n គឺ $-n$)។ ដើម្បី មានជាតុផ្ទុះ គេពង្រីកសំនុំនោះ ឲ្យទៅ ជាសំនុំ G មួយធំ ដែលនៅក្នុងនោះ ក៏មានជាតុរបស់ G^+ទាំងអស់ដែរ ហើយជាតុនីមួយៗ សុទ្ធតែមាន មានផ្ទុយជានិច្ច ។

ដូច្នេះ នេះជាលំហាត់ មួយតូច៖

<u>លំហាត់ទី៥ (ត)</u>

យើងតាងដោយ G ក្រុមមួយដែលបានដោយពិធី ផ្ទុះនៃកន្ទះក្រុមអាបេលីអៀង D ។

ចូរបង្ហាញថា គេអាចកំណត់ លើ G នូវ លំដាប់ទាំងស្រុងមួយ ដែលធ្វើឲ្យ G ទៅជា ក្រុម អាបេលីអៀង មានលំដាប់ទាំងស្រុង ហើយ គេស្គាល់ D ដោយ សំនុំនៃធាតុវិជ្ជមាននៃ G ។

<u>ចម្លើយ</u>

របៀបធ្លុះ ដើម្បីឲ្យបានក្រុម G អំពី កន្ទះក្រុមអាបេលីអៀង D នោះយើងបានឃើញនៅមេរៀន $\S V,3$ ហើយ ។ គេធ្លុះគឺដើម្បីឲ្យធាតុនីមួយៗនៃ D មានធាតុផ្ទុយ ហើយនៅពេលនោះទើមគេបានជាក្រុម ពីព្រោះ D គ្រាន់តែជាកន្ទះក្រុមតែប៉ុណ្ណោះ ហើយនៅក្នុង D គ្មានធាតុផ្ទុយទេ ។ ដែលថ្មីចំពោះលំហាត់នេះ គឺ លំដាប់ទាំងស្រុងនៃក្រុម G ពីព្រោះ លំដាប់ទាំងស្រុងមានតែនៅក្នុង កន្ទះក្រុម Dតែប៉ុណ្ណោះ។ ដើម្បីមាន លំដាប់ទាំងស្រុង នៅក្នុង G នោះគេកំណត់ រឺឡាស្យុង ៖

(1) $x \geq y$ បើ $x - y \in D$ $(x \in G,\ y \in G)$ ។

យើងត្រូវបង្ហាញថា (1)ជា រឺឡាស្យុងលំដាប់ទាំងស្រុងក្នុង G គឺ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ប្រឆាំងធ្លុះ និង ត្រង់ស៊ីទីវ ។

1/ $x \geq x$ បើ $x - x \in D$ ត្រូវ ពីព្រោះ $x - x = 0$ ហើយ $0 \in D$

2/ $x \geq y$ និង $y \geq x$ តើ $x = y$?

$x \geq y \Rightarrow x - y \in D$ (2)

$y \geq x \Rightarrow y - x \in D$ ឬ $-(x - y) \in D$ (3)

ដោយ $(x - y)$ និង $-(x - y)$ ជាធាតុ ពីរផ្ទុយនឹងគ្នា ដូច្នេះ ក្រៅពីសូន្យ ធាតុទាំងពីរ មិនអាចនៅក្នុង D ទេ ។ ដោយមកពី D គ្មានធាតុផ្ទុយនេះហើយ បានជាគេធ្វើ ការពង្រីក នៃ D ។ ដូច្នេះ (2) និង (3) $\Rightarrow$ $x - y = 0$ $\Rightarrow$ $x = y$ ។

3/ $x \geq y$ និង $y \geq z$ តើ $x \geq z$?

$\left.\begin{array}{l} x \geq y \Rightarrow x-y \geq 0 \\ y \geq z \Rightarrow y-z \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x - z \ \geq 0 \ \Rightarrow x \ \geq z$ [ដោយបូក $(x-y)+(y-z)$] ។

ដោយការពង្រីក ចាប់ពី សំនុំ N បានដូចតទៅនេះ៖

ពីសំនុំ N នៃចំនួនគត់ បន្ទាប់ពីពង្រីកទៅ គេបាន សំនុំ Z នៃចំនួនគត់រឺឡាទីប ដែលជាក្រុម អាបេលីអៀង ៖ ចំនួន $x \in N$ មានចំនួនផ្ទុយ $-x \in Z$ ហើយចំនួន $-x$ មានចំនួនផ្ទុយ x ពីព្រោះ $x + (-x) = 0$ (0 ជាធាតុ នប៉ុសកលិដ្ឋ ចំពោះលេខ បូក) ៕