លំហាត់ទី៤

គេតាងដោយ f ការអនុវត្តន៍មួយពី ចន្លោះបើក $]a,b[$ នៃ R ទៅក្នុងសំនុំ F មួយ ។ ហើយគេសន្មតថា ចំណុចណាមួយក៏ដោយនៃ $]a,b[$ គឺក៏ជា ចំណុចកណ្តាលនៃចន្លោះមួយដែលមានប្រវែង មិនសូន្យ ហើយនៅក្នុងចន្លោះនោះ f មិនប្រែប្រួល (គឺថាមិនឡើង មិនចុះ) ។

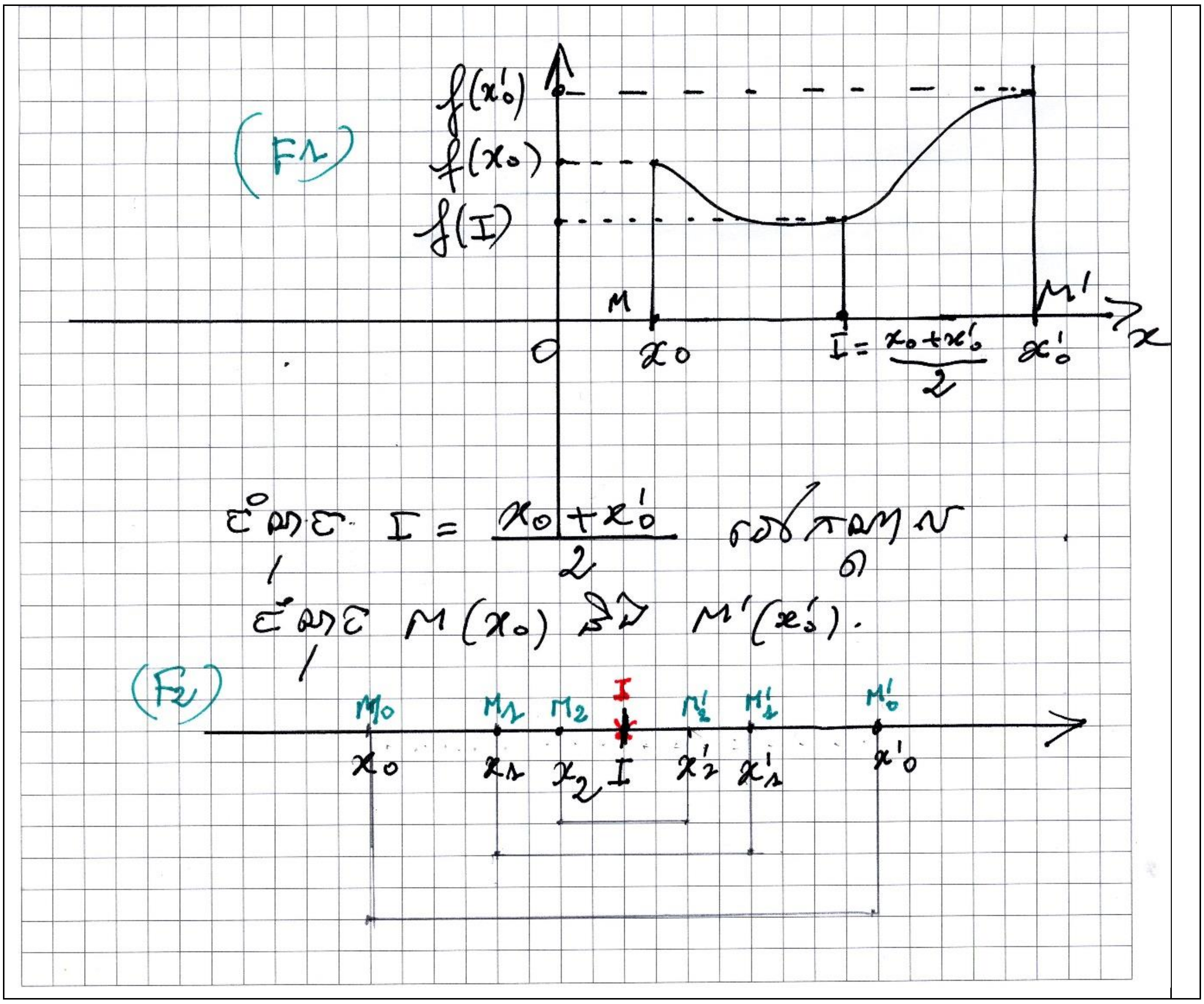
ចូរបង្ហាញ ថា f មិនប្រែប្រួល នៅលើ $]a,b[$ ។

បង្ហាញ

ឧបមាថា f ប្រែប្រួល លើ $]a,b[$ គឺថាមាន ចំណុចពីរ x_0 និង x'_0 នៃ $]a,b[$ ដែល $f(x_0) \neq f(x'_0)$ ហើយដោយការឧបមានេះ យើងនឹងទៅដល់ស្ថានការណ៍ដែលផ្ទុយពី សម្មតិកម្ម ដែលថា f មិនប្រែប្រួលនៅក្នុងចន្លោះណាមួយដែលមានចំណុចកណ្តាល ហើយ មានប្រវែងមិនសូន្យ ។

ដើម្បីប្រើ សម្មតិកម្មថា កាលណា x ជាផ្ចិត នៃ ចន្លោះ ណាមួយនោះ f មិនប្រែប្រួល ។ ដូច្នេះ ដោយ x_0 និង x'_0 ជាចំណុចពីរខុសគ្នា យើងយក ចំណុច x ជាចំណុចនៅចន្លោះ x_0 និង x'_0 ហើយជាចំណុច នៅកណ្តាល គឺ ថា $x = \frac{x_0+x'_0}{2}$ ។ ដោយ x_0 និង x'_0 នៅក្នុងចន្លោះ $]a,b[$ ដូច្នេះ x ដែល $x_0 \leq x \leq x'_0$ ក៏នៅក្នុង ចន្លោះ $]a,b[$ ដែរ ។

បន្ទាប់មក បើ M_0 ជាចំណុច មានអាប់ស៊ីស x_0 ហើយ M'_0 ជាចំណុច មានអាប់ស៊ីស x'_0 នោះយើងតាងដោយ I ចំណុចនៅកណ្តាលអង្កត់ $M_0M'_0$ ហើយមានអាប់ស៊ីស x (មើលរូបខាង ក្រោម) ។ ដោយសម្មតិកម្ម $f(x_0) \neq f(x'_0)$ នោះយើងអាចថា $f(x_0) \neq f(\frac{x_0+x'_0}{2})$ ។



បន្ទាប់មកយើងកំណត់ ស្វីតពីរ (x_n)និង (x'_n) ដែលមានចំណុច M_n និង M'_n ផ្គូជាមួយ

នឹង រត់ទៅជិតចំណុច I កាលណា n កាន់តែធំ ពោល គឺយើង កំណត់ រឺឡាស្យុង

រេគារ៉ែងដូចតទៅនេះ ៖

$x'_1 - x_1 = \frac{1}{2}(x'_0 - x_0)$ ហើយ $f(x'_1) \neq f(x_1)$

ហើយជាទូទៅ ៖

$x'_n - x_n = \frac{1}{2}(x'_{n-1} - x_{n-1})$ ហើយ $f(x'_n) \neq f(x_n)$

ដោយ កាលណា n កើន នោះចំណុច M_n ខិតទៅជិត ចំណុច I ដូច្នេះ ស្វីត (x_n)

ជាស៊ីត កើន ហើយជាមួយគ្នានោះ ដោយចំណុច M'_n ក៏ខិតទៅជិត ចំណុច l ដែរ នោះ ស៊ីត (x'_n) ជាស៊ីត ចុះ គឺថា $x'_n \geq x'_{n+1}$ ។ រួមសេចក្ដីទៅយើងបាន៖

$x_0 \leq x_1 \leq x'_1 \leq x'_0$ និង x'_1 - x_1 $= \frac{1}{2}(x'_0 - x_0)$ ហើយ $f(x'_1) \neq f(x_1)$

…………………..

(1) $x_n \leq x_{n+1} \leq x'_{n+1} \leq x'_n$ និង x'_1 - x_1 $= \frac{1}{2^n}(x'_0 - x_0)$ ហើយ $f(x'_n) \neq f(x_n)$ ចំពោះគ្រប់ ចំនួន n ។

ដូច្នេះ ស៊ីតនេះ បំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ នៃស្វ័យស័ត្យកង់តរ $(aux\ coditionsd\ de\ Cantor$ មើល $\S VI, 9)$ ដូច្នេះមានចំនួន x មួយ ដែលបំពេញ

$x_n \leq x \leq x'_n$ គ្រប់ចំនួន n ។ ដោយ x ជាចំណុចកណ្ដាលនៃចន្លោះដែលនៅក្នុង នោះ f <u>មិន ប្រែប្រួល</u> (តាមនិយមន័យ នៃ f) ដូច្នេះ កាលណា n កាន់តែធំទៅនោះ x_n និង x'_n នឹងចូលក្នុង ចន្លោះនោះ ជាមិនខាន ដូច្នេះ $f(x) = f(x_n) = f(x'_n)$ ដែលផ្ទុយនឹង (1) ។៕