លំហាត់ទី១

គេឲ្យ $x = x_0,x_1 \ldots\ldots x_n \ldots\ldots$, ចំនួនពិតតាងដោយ ការពង្រីកដេស៊ីមាលស្មើជ្រុង ។ គេផ្គូ x ទៅនឹង y ដោយ $y = f(x)$ កំណត់ដោយការពង្រីកដេស៊ីមាល (មិនចាំបាច់ ស្មើជ្រុង ទេ) $y = x_0, x_2x_4 \ldots\ldots x_{2n} \ldots\ldots$ បានឡើងដោយយក តួនៃ x ដែលមានសន្ទស្សន៍ គូ $(indice\ pair)$ ក្នុងការពង្រីក ។

$a)$ បង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់ n មួយ គេអាចផ្គូនឹងចំនួនគត់ $p \geq n$ មួយដែល វិសមភាព $x' < x + 10^{-2p}$ => $f(x') < f(x) + 10^{-p}$ [គេគ្រាន់តែ យក $p \geq n$ ហើយដែល $x_{2p} \neq 9$ នៅពេលនោះ x' មាន $2p - 1$ ដេស៊ីមាលដំបូង ស្មើនឹង x]

$b)$ គេ សន្មត់ថា x មិនមែនជា ដេស៊ីមាលធម្មតា

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់ n មួយ គេអាចផ្គូនឹងចំនួនគត់ $q \geq n$ ដែល វិសមភាព $x' > x - 10^{-2q}$ =>

$f(x') > f(x) - 10^{-q}$ [គេគ្រាន់តែ យក $q \geq n$ ហើយដែល $x_{2q} \neq 0$ នៅពេលនោះ x' មាន $2q - 1$ ដេស៊ីមាលដំបូង ស្មើនឹង x]

$c)$ គេ សន្មត់ថា x ជាចំនួនដេស៊ីមាលធម្មតា (គឺថា $x \in \Delta_0 \cup \Delta_9$) ដែលមាន ដេស៊ីមាលចុងក្រោយគេបំផុតខុសពីសូន្យ មានលេខរៀង ជាចំនួនសេស គឺ $x = x_0, x_1 \ldots\ldots x_{2n+1}$ ដោយ $x_{2n+1} \neq 0$។ រក $f(x)$ និង $f(x - 10^{-p})$ ចំពោះ $p > 2n + 1$ ។ បង្ហាញថា $f(x - 10^{-p}) - f(x) > 9.10^{-n-1}$ ។ [លំហាត់នេះ ឲ្យយើងនូវ អនុគមន៍ ដាច់ ចំពោះចំណុចខ្វះ និងដាច់ ចំពោះចំណុចផ្សេង]។

ចម្លើយ

$a)$ បើ $x = x_0,x_1x_2 \ldots\ldots x_n \ldots x_{2p-1}x_{2p} \ldots$ នោះ $f(x) = x_0,x_2x_4 \ldots\ldots x_{2p} \ldots\ldots$

ចំពោះ n ដែលគេ កំណត់ នោះគេអាចរក $p \geq n$ ដែលចំពោះ $x' < x + 10^{-2p}$ =>

$f(x') < f(x) + 10^{-p}$ ។ តាមការនៃនាំខាងលើ គេគ្រាន់តែនៅក្នុង x ចាប់តាំងពី ជួ n ឡើងទៅ គេយកជួ p ណាមួយ ដែលមាន ដេស៊ីមាល ខុសពី លេខ 9 នៅពេលនោះ ចំពោះ x' ដែលស្មើនឹង x តាំងពី ជួទី១ រហូតដល់ជួទី $2p-1$ គេនឹងបានចម្លើយនៃសំណួ នេះ។ ពីព្រោះ ៖ ឧបមា ជួ $2p$ នៃ x មាន 6 ជាដេស៊ីមាល នោះ

$x = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}x_{2p}\ldots\ldots = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}6\ldots\ldots$ =>

$x + 10^{-2p} = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}6\ldots\ldots + 10^{-2p} = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}7\ldots\ldots$

ដោយ $x' = x_0,x_1x_2\ldots\ldots x_n\ldots x_{2p-1}$ => $x' < x + 10^{-2p}$ ។ ដូច្នេះ

$f(x + 10^{-2p}) = x_0,x_2\ldots\ldots x_{2p-2}7\ldots\ldots$ (1) ហើយ

$f(x') = x_0,x_2\ldots\ldots x_{2p-2}$ (2)

តែត្រូវសង្កេតថា ពីព្រោះអនុគមន៍ f ផ្នែកដេស៊ីមាល នៃ ចំនួន x និងផ្នែកដេស៊ីមាលនៃ ចំនួន $f(x)$ មិនស្មើគ្នាទេ ៖ បើផ្នែកដេសស៊ីមាល នៃ x មាន $2p$ ជួ នោះផ្នែកដេស៊ីមាល នៃ $f(x)$ មានតែ $\frac{2p}{2}$ ជួតែប៉ុណ្ណោះ ពីព្រោះ f យកតែជួគត់គូ *les termes de rang pair*) នៃផ្នែកដេស៊ីមាល។ យើងសង្កេតមើល (1) ផ្នែកដេស៊ីមាន នៃ $f(x + 10^{-2p})$ គឺ

$x_2\ldots\ldots x_{2p-2}7\ldots\ldots = x_2\ldots\ldots x_{2(p-1)}7\ldots\ldots$ => 7 នៅជួទី p បន្ទាប់ពី $x_{2(p-1)}$ បានន័យ ថា 7.10^{-p} = (6 + 1) 10^{-p} = 6. 10^{-p} + 10^{-p} ។ បើយើងប្រៀបធៀប (1) និង (2) យើង ឃើញថា $f(x') < f(x) + 10^{-p}$ បើកាលណា $x' < x + 10^{-2p}$ ។

$b)$ គេ សន្មត់ថា x មិនមែនជា ដេស៊ីមាលធម្មតា។ ដូច្នេះ x មិននៅក្នុង $\Delta_0 \cup \Delta_9$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $q \geq n$ គេអាចរក ដេស៊ីមាល $x_{2q} \neq 0$ បាន ។របៀបបង្ហាញ ដូចគ្នានឹង សំណួរ $a)$ ដូច្នេះចូររកដោយខ្លួនឯងទៅ ។ ខ្ញុំគ្រាន់តែលើកយកឧទាហរណ៍ដូចតទៅះ ចំពោះ $n = q = 2$ ហើយ $x = x_0,x_1x_2x_3x_4\ldots\ldots = x_0,4531\ldots\ldots$ =>

$x - x_0,4531\ldots\ldots$ $x_0,4531\ldots\ldots$ - 10^{-4} = $x_0,4531\ldots\ldots$ - 0,0001 = $x_0,4530\ldots\ldots$

$x' = x_0,4531$ ។ ដូច្នេះ៖

$x' > x - 10^{-4}$ ហើយ $f(x) = x_0$,51 , $f(x) - 10^{-2} = x_0, 51 - 0{,}01 = x_0$,50 (1)

$f(x') = x_0$,51 (2) ។ ដូច្នេះដោយ (1) និង (2) យើងឃើញ $f(x') > f(x) - 10^{-q}$ ។

$c)$ គេ សន្មត់ថា x ជាចំនួនដេស៊ីមាលធម្មតា ដែលមាន ដេស៊ីមាលចុងក្រោយគេបំផុត ខុសពីសូន្យ មានលេខរៀង ជាចំនួនសេស គឺ $x = x_0, x_1 \ldots\ldots x_{2n+1}$ ដោយ $x_{2n+1} \neq 0$។

ឧបមា គឺ $x = x_0, x_1x_2x_3x_4 7000$ នៅពេលនេះ $2n + 1 = 5$ ហើយ $x_5 = 7$, $x_6 = 0$,

$x_7 = 0$, $x_8 = 0$, $2n + 1 = 5 \Rightarrow n = 2$ ហើយ $p > 2n + 1$, យើងយក $p = 8$ ។

ដូច្នេះយើងបាន ៖

$x - 10^{-p} = x_0, x_1x_2x_3x_4 7000 - 10^{-8} = x_0, x_1x_2x_3x_4 7000 - 0{,}0000\,0001$

$= x_0, x_1x_2x_3x_4 6999$ ។ ដែលឲ្យតាមនិយមន័យ នៃ អនុគមន៍ f

$f(x - 10^{-8}) = x_0, x_2x_4 99$ ហើយ $f(x) = x_0, x_2x_4 00$ ដូច្នេះ

$f(x - 10^{-8}) - f(x) = x_0, x_2x_4 99 - x_0, x_2x_4 00 = 0{,}0099 = 99.10^{-4}$

$= 9{,}9.10^{-3} > 9.10^{-3} = 9.\,10^{-n-1}$ ។

<u>សង្កេត</u>

តាមនិយមន័យ នៃ អនុគមន៍ជាប់ នៅលើ R ត្រង់ចំណុច $x_0 \in R$ (*définition de la fonction continue au point* $x_0 \in R$) ៖

$\forall \varepsilon > 0, \exists \theta$ ដែលចំពោះ $x - x_0 < \theta \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ (ដោយ $x \in R$, $x_0 \in R$) ។

តាមនិយមន័យនេះ ចំពោះអនុគមន៍ f នៃលំហាត់នេះ យើងឃើញថា f ជាប់ ចំពោះ សំណួរ $a)$ និង $b)$ ហើយ f ដាច់ ចំពោះសំណួរ $c)$ ៕