10. លក្ខណៈប្លែកនៃស្វ័យស័ត្យ ចំពោះចំនួនពិត (Caractérisation axiomatique des nombres réels).

យើងពុំទាន់បាន តាក់តែង អ៊ីសូមោហ្វីស៍ (isomorphie) រវាងអង្គ (des corps) ទាំងឡាយ ដែលសាងសង់ដោយ ការបំបែកគ្មានកម្រិត (construits au moyen de développements illiimités) នៅក្នុង ប្រព័ន្ធទាំងឡាយនៃការសរសេរចំនួន (dans les divers systèmes de numération) ៖ ដូច្នេះ ជាបណ្តោះអាសន្ន យើងនៅតែតាងដោយ R_k អង្គ ដែលមានបាត k ។ សូមបញ្ជាក់ថា យើងទុកឈ្មោះថា « គ្រុបអាបេលីអៀង មានលំដាប់ » គឺគ្រុប អាបេលីអៀង សរសេរដោយលេខបូក ហើយមានមានលំដាប់គ្រប់ៗធាតុ ដែលបំពេញ $a \le b \Rightarrow a+c \le b+c, \forall c$ ។ ដូច្នេះ រ៉ឺឡាស្យុង $a < b \Rightarrow a+c < b+c$ ។ ជាពិសេសបើគេ តាងជានិច្ចថា na គឺ ផលបូកនៃ nចំនួន ស្មើនឹង a នោះវិសមភាព $a < b \Rightarrow na < nb$ ដូច្នេះ បើមានធាតុ c មួយដែលបំពេញ $nc = a$ នោះធាតុ c គឺមានតែមួយគត់ ដែលគេអាចសរសេរច្បាស់ដោយ $\frac{1}{n}a$ ។ ដូច្នេះយើងអាច បង្ហាញនូវលទ្ធផលជាគ្រឹះមួយដូចតទៅ៖

ការស្នើ-VI-10-1. G ជាគ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ បំពេញ ស្វ័យស័ត្យ (A) (ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ) នៅពេលនោះ ចំពោះធាតុ $u > 0$ ណាក៏ដោយនៃ G ហើយនិងចំនួនគត់ $k \ge 2$ នោះមានការអនុវត្តន៍ ឡើងជានិច្ច f មួយ ($une\ application\ strictement\ croissante\ f$) តែមួយគត់ ពី G ទៅ R_k ដែលបំពេញនូវល័ក្ខខ័ណ្ឌ ៖

(1) $f(0) = 0 \quad f(u) = 1 \quad f(a+b) = f(a) + f(b),\ \forall a \in G, \forall b \in G$ ។

បើសិនជាលើសពីនេះទៀត Gបំពេញស្វ័យស័ត្យ (B) (ស្វ័យស័ត្យ វិធីចែកដោយ k)

និងស្វ័យស័ត្យ (C) (ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ) នៅពេលនោះ f ប៊ីសេចទីវ ដែលអាចឲ្យនិយាយថា G អ៊ីសូម៉ោស (*isomorphe*) នឹងគ្រុបបូកនៃចំនួនពិត (*au groupe additif des nombres réels*)។

បង្ហាញ

បើមាន ការអនុវត្តន៍ f បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ (1) នោះយើងនឹងបាន $f(pu) = p$ ហើយ $f(k^n x) = k^n f(x)$ $\forall p \in Z$, $x \in G$ និង $n \in N$ [ពីព្រោះ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ => បើ $a = b$ នោះ $f(a+a) = f(a) + f(a)$ => $f(2a) = 2f(a)$ ដូច្នេះ $f(pa) = pf(a)$ $\forall p \in Z$] ហើយដោយ $k \in N$ និង $k > 2$ នោះ $k^n \in Z$ ដូច្នេះ $f(k^n x) = k^n f(x)$ ។

x ជាធាតុមួយទូទៅនៃ G យើងតាងដោយ p_n ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ($p_n \in Z$) ដែលធំជាងគេ បំពេញ $p_n u \le k^n x$ ។

បើ f មាន នោះវិសមភាព $p_n u \le k^n x < (p_n + 1) u$ => $p_n \le f(k^n x) < p_n + 1$ [1] ឬ $k^{-n} p_n \le f(x) < k^{-n}(p_n + 1)$ $(\boldsymbol{S1})$ ។ ដោយ ចំនួនគត់ $k \ge 2$ នោះ $k^n x$ ជាស្វ៊ីតឡើង ដូច្នេះ $p_n u \le k^n x$ => p_n ឡើង ពីព្រោះជា p_n ជាចំនួនធំជាងគេដែលបំពេញ $p_n u \le k^n x$ => ដោយ $u > 0$ យើងបាន $p_n \le \frac{x}{u} k^n$ => $k^{-n} p_n \le \frac{x}{u}$ ដោយ $\frac{x}{u}$ មិនដូរ ទៅតាម ចំនួន n នោះ បើយើងតាង $y_n = k^{-n} p_n$ នោះ (y_n) ជាស្វ៊ីតឡើង ហើយ $y'_n = k^{-n}(p_n + 1)$ ជាស្វ៊ីត ចុះ ដោយ $(\boldsymbol{S1})$ ។ ហើយគេបាន $y'_n - y_n = k^{-n}$ [2] ដូច្នេះ បង្គោលខាងលើនៃ y_n (*la borne supérieure de* y_n) ស្មើនឹង

---

[1] ពីព្រោះតាមសម្មតិកម្ម f ឡើងជានិច្ច

[2] ដោយ $k \ge 2$ នោះ $k^n \to +\infty$ កាលណា $n \to +\infty$ => $k^{-n} = \frac{1}{k^n}$ -> 0 កាលណា $n \to +\infty$ នេះ

បង្គោលខាងក្រោមនៃ y'_n ($la\ borne\ inférieure\ \ de\ y'_n$) ហើយចំនួន y (ជាតុនៃ R_k) ជាចំនួនតែមួយគត់ដែលបំពេញ វិសមភាពទាំងសង្ខាង $y_n \leq y \ \leq y'_n$ ចំពោះចំនួន n នីមួយៗ ។ បើ f មាន នោះនឹងបាន $y = f(x)$ ដែលបង្ហាញថា f កំណត់បានដោយរបៀបតែមួយគត់ គឺថា ចំនួន $y = f(x)$ ជាបង្គោលខាងលើនៃស៊ីត $y_n = k^{-n}p_n$ ដែល p_n សំដៅនូវ ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $(p_n \in Z)$ ដែលធំជាងគេ បំពេញ $p_n u \ \leq \ k^n x$ ។ ដើម្បីបញ្ចប់ការបង្ហាញនូវផ្នែកទីមួយ នៃ ការស្នើនេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា អនុគមន៍ f ដែលបានមកនេះ បំពេញនូវ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ (1) ដែលចង់បាន៖

<u>$1°$ f កើនដាច់ខាត (f $est\ strictement\ croissante$).</u>

យើងយក $x' > x \ => \ x' - x \ > 0$ ដូច្នេះតាមស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ គេអាចរក n មួយ ដែលឲ្យ $n(\,x' - x) > 2\,u$ ដូច្នេះ គេរិតតែបាន $k^n(\,x' - x) > 2\,u$ (កុំភ្លេចថា $k \ \geq 2$) ។ ហើយបើគេតាងដោយ p_n និង p'_n គឺចំនួនគត់ ដែលធំជាងគេបំផុត ដែលបំពេញ $p_n u \ \leq k^n x$ និង $p'_n u \ \leq k^n x'$ នោះយើងបាន $p'_n > p_n$+1 [3]។

បានន័យថា ($y'_n - y_n$) ខិតជិតសូន្យកាលណា $n \to +\infty$ គឺថាស៊ីត (y_n) និង ស៊ីត (y'_n) មានលីមីត ($limite$) ជិតគ្នាដែរ ។ ហើយដោយ ស៊ីតទាំងពីរនេះ មានបង្គោលតែមួយ គឺ $f(x)$ ដូច្នេះ ត្រូវតែ ស៊ីត (y_n) ឡើង និង ស៊ីត (y'_n) ចុះ ។

[3] ពីព្រោះ $x' > \ x$ ។ ឧបមា $x = \ 1{,}1416$ ហើយ $x' = 1{,}1501$ ដោយ $k \geq 2$ បើ យើង យក $k = 10 \quad u = 2$ នោះ $k^n(\,x' - x) > 2\,u$ ទៅជា 10^n (1,1501- 1,1416) > 2u ឬ $10^n(0{,}0085) \ > \ 4 \ => \ n \ = \ 3$ ដូច្នេះ $p_n u \ \leq k^n x$ ទៅជា $p_n \ \leq \ \frac{10^3}{2}(1{,}1416)$= 570,8 => p_n = 570។ ហើយក៏ដូចគ្នាចំពោះ $p'_n \leq k^n x'$ ទៅជា $p'_n \ \leq \ \frac{10^3}{2}(1{,}1501)$= 575,05 => $p'_n = 575$។ ដូច្នេះ $p'_n \ > p_n$ + 1 ។

ខ្ញុំសូមរំលឹកឡើងវិញ នូវការកំណត់នៃ អនុគមន៍ f ៖

$p_n u \le k^n x < (p_n+1)u$ => $k^{-n}p_n \le f(x) < k^{-n}(p_n+1)$ (F1)

ដូច្នេះយើងបាន តាមនិយមន័យ p'_n

$f(x') \ge p'_n k^{-n} > (p_n+1)k^{-n} \ge f(x)$ => $f(x') > f(x)$ ។ដូច្នេះ f កើន ។

2°/ បើ $x = 0$ ដោយ (F1) $p_n u \le k^n.0 < (p_n+1)u$ => $p_n = 0$ => $f(0) = 0$

ដោយយក $n = 0$ $k^n = 1$ ហើយ (F1) $p_n u \le 1.u < (p_n+1)u$ => $p_n = 1$ => $f(u) = 1$

3°/ $f(a+b) = f(a) + f(b)$

យើងតាងដោយ p_n [ក៏ដូច q_n] ចំនួនគត់ដែលធំជាងគេបំពេញ $p_n u \le k^n a$

[ក៏ដូច $q_n u \le k^n b$] ។ ដោយ វិសមភាព៖

$k^{-n}p_n \le f(a) < k^{-n}(p_n+1)$ និង $k^{-n}q_n \le f(b) < k^{-n}(q_n+1)$ =>

$$k^{-n}(p_n+q_n) \le f(a)+f(b) < k^{-n}(p_n+q_n+2)$$

ម្យ៉ាងទៀត ៖ $(p_n+q_n)u \le k^n(a+b) < (p_n+q_n+2)u$ =>

ដូច្នេះដោយ (F1) $k^{-n}(p_n+q_n) \le f(a+b) < k^{-n}(p_n+q_n+2)$

ដូច្នេះ ចំនួន $f(a+b)$ និង $f(a)+f(b)$ មានចំនួនប្រហែល (*valeur approchée*) ស្មើគ្នា ចំពោះចំនួន n នីមួយៗ $(\forall n \in N)$ ដូច្នេះ $f(a+b) = f(a)+f(b)$ ។

<u>ករណីដែល G ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងស្វ័យស័ត្យ(B)និង (C)</u>

យើងចង់បង្ហាញថា f ប៊ីសេចទីវ ពី G ទៅ R_k ។ ដោយ f កើនជានិច្ច ដូច្នេះ f អាំងសេចទីវរួចទៅហើយ ដូច្នេះនៅតែបង្ហាញថា f ក៏ សឺសេចទីវដែរ ។ គឺថា ចំពោះធាតុ y មួយនៃ R_k នោះមានធាតុ $x \in G$ (xយ៉ាងហោចមួយ) ដែលបំពេញ $f(x) = y$ ។

បើ y [4] មានរាង $y = pk^{-n}$ ដោយ n និង p ជាចំនួនគត់ នោះយើងគ្រាន់តែយក

[4] បានជាយករាងបែបនេះ ដោយ រូមមន្ត (F1)

$x = pk^{-n}u$ [ដោយស្វ័យស័ត្យ B មានចំនួនគត់ $k > 1$ មួយ ដែលកាលណាគេឲ្យធាតុ u មួយនៃ G នោះគេអាចផ្គូរ នឹង $u_n = k^{-n}$ ដែលឲ្យ $k^n u_n = u$] [5]។ ដូច្នេះបើ y ជាធាតុមួយនៃ R_k កំណត់ដោយស្វីត $y_n = p_n k^{-n}$ ដែលជាចំនួនប្រហែលមាន $k - décimales$ (k-ដេស៊ីមាល) នោះយើងអាចសាងសង់ស្វីត ពីរ $x_n = p_n k^{-n}u$ និង

$x'_n = (p_n + 1)\, k^{-n}u$ ។

ស្វីតទាំងពីរនេះ បំពេញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ (1°) និង (2°) នៃស្វ័តស័ត្យ កង់ទ័រ (ស្វ័យស័ត្យ C) ពីព្រោះ បើកាលណាគេឲ្យ ε នៃ G ដោយស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ នោះមានចំនួនគត់ p ដែលបំពេញ $p\varepsilon \geq u$ => $\varepsilon \geq u \times \frac{1}{p} \geq u \times \frac{1}{k^p}$ (ពីព្រោះ k ចំនួនគត់ ធំជាង 1)

ដូច្នេះ $\varepsilon \geq k^{-p}u$ ហើយចំពោះ $n > p$ នោះគេបាន

$x'_n - x_n = [(p_n + 1) - p_n]\, k^{-n}u = k^{-n}u \leq \varepsilon$ ។

ដូច្នេះ មានធាតុ x មួយនៃ G ដែលបំពេញ $x_n \leq x \leq x'_n$ ចំពោះចំនួន n ណាក៏ដោយ ($\forall n$) ហើយ វិសមភាព $f(x_n) \leq f(x) \leq f(x'_n)$ <=> $p_n k^{-n} \leq f(x) \leq (p_n + 1)k^{-n}$ => $f(x) = y$ ។

សង្កេត

បើ f ប៊ីសេចទីវ គេអាចកំណត់ វិធីគុណ នៅលើ G ដោយដាក់ $f(xy) = f(x)f(y)$ ហើយនៅពេលនោះ គេបាននៅលើ G មាន រចនាសសម្ព័ន្ធមួយជា អង្គត្រលប់ (*on obtient sur G une structure de corps commutatif*) អ៊ីសូម៉ោស នឹង R_k ដោយយក u ជា

---

[5] ធាតុដែលគេឲ្យ គឺ ចំនួនគត់ k ≥ 2 និង $u > 0$ ។ បើ k ជាចំនួនគត់ នោះ k^n ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ ដូច្នេះ តាមស្វ័យស័ត្យចែក B គេអាចចែក u ដោយ k^n ហើយគេបាន u_n ដែលបំពេញ $k^n u_n = u$ ។

ឯកតា (*unité*) ៖ ការសាងសង់នេះ យកមកអនុវត្តិលើ បន្ទាត់ធរណីមាត្រ ដោយយក $k = 2$ ហើយនិងលើ សំនុំនៃទំហំដែលអាចវាស់បាន នៅក្នុងពួកជាមួយគ្នា (*et* à *l'ensemble des grandeurs mesurables d'une même espèce*) ៖ ការរើសយកឯកតា អាចកំណត់ ផលគុណនៃ ពីរប្រវែង ហើយជាទូទៅ នៃ ពីរទំហំដែលអាចវាស់បាននៅក្នុងពួកជាមួយគ្នា ។ ហើយនៅក្នុងសំនុំនោះ (បន្ទាត់ឬ ទំហំដែលអាចវាស់បាន) គេបាន ប្រព័ន្ធនៃ អង្គត្រលប់ (*une structure de corps commutatif*)។ យើងនឹងសង្កេតឃើញថា នៅលើអង្គទាំងអស់ដែលយើងបាននោះ វិសមភាព $a \le b$ និង $c \ge 0$ => $ac \le bc$ ។ ផ្ទុយទៅវិញ យើងទុកឈ្មោះ អង្គត្រលប់មានលំដាប់ សម្រាប់អង្គត្រលប់ ដែលមានរ៉ឺឡាស្យុងលំដាប់ទាំងមូល (*relation d'ordre totale*) គឺថា $a \le b$ => $a + c \le b + c$, $\forall c$ ហើយនិង $ac \le \text{bc}$, បើ $c \ge 0$ ។ យើង អាចសន្មតថា G មានរចនាសម្ព័ន្ធ ជាអង្គត្រលប់មានលំដាប់ ហើយនៅពេលនោះ យើងការស្នើដូច តទៅនេះ៖

> **<u>ការស្នើ-VI-10-2.</u>** K ជាអង្គ ត្រលប់ មានលំដាប់ បំពេញស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ។ ចំពោះចំនួនគត់ k ណាក៏ដោយ ដែល ធំជាងឬស្មើនឹង 2 ($k \ge 2$) នោះគេមាន ការអនុវត្តន៍ ឡើងជានិច្ច f តែមួយគត់ ពី K ទៅ R_k ដែល បំពេញ $f(a + b) = f(a) + f(b)$ និង $f(a\, b) = f(a)f(b)$, $\forall a \in K$, $\forall b \in K$ ។ បើ លើសពីនេះទៅទៀត K បំពេញស្វ័យស័ត្យ (B) (ស្វ័យស័ត្យកង់ទ័រ) នៅពេលនោះ f ប៊ីសេចទីវ ដែលធ្វើឲ្យ K អ៊ីសូម៉ោស (*isomorphe* à) នឹង R_k ។

ដើម្បីនឹងបង្ហាញ ការស្នើនេះ ជាដំបូងយើងសង្កេតនូវ អង្គ ដែលបំពេញស្វ័យស័ត្យចែកដោយ k (ស្វ័យស័ត្យកង់ទ័រ)ចំពោះចំនួនគត់ k ណាក៏ដោយដែលធំជាង 1 ($k > 1$) ។

បន្ទាប់មក យើងយក ការស្នើ VI-10-1 មកអនុវត្តលើ K។ ហើយដល់ចុងក្រោយ ដើម្បីបង្ហាញ រ៉ឺឡាស្យុង $f(a\,b) = f(a)f(b)$ យើងប្រើរបៀបដូចកាលយើងប្រើសម្រាប់បង្ហាញ រ៉ឺឡាស្យុង $f(a+b) = f(a)+f(b)$ ។

<u>អនុសាធ (*Corollaire*)</u>

គ្រប់ អង្គ R_k សុទ្ធតែ អ៊ីសូម៉ោស នឹងគ្នា ទាំងអស់ ។

យើងដឹងថា អង្គ ទីមួយៗ R_k ដូចជា R_{10} ជាដើម បំពេញស្វ័យស័ត្យកង់ទ័រ (ការស្នើ VI-7-6) ។ ម្យ៉ាងទៀត អង្គទាំងនោះ សុទ្ធតែបំពេញ ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ ។ តើដោយហេតុអ្វី ? ពីព្រោះថា បើ a និង bជាធាតុពីរ នៃ R_k ហើយបើ $a > 0$ នោះគេអាចរកចំនួនគត់ p និង q ដែលឲ្យ $k^{-p} < a$ នឹង $q > b$ ។ ហើយ ចំពោះ $n > q\,k^p$ គេបាន ៖ $\begin{matrix} n > qk^p \\ a > k^{-p} \end{matrix} \Big| \Rightarrow na > q > b$ ។

រួមសេចក្តីទៅ បើ a និង b ជាធាតុពីរនៃ R_k នោះមានចំនួនគត់ n ដែលឲ្យ $na > b$ ។ ដូច្នេះ យើងអាច ប្រើ ការស្នើ (VI-10-2) បានដោយយកជាអង្គ K នូវអង្គណាមួយ នៃ R_k ដូចជា R_{10} ឬ R_2 ជាដើម ហើយយើងក៏បាននូវលទ្ធផលដែលបានប្រកាសខាងលើ ។

<u>ការសន្និដ្ឋាន</u>

អំណើះតទៅ យើងអាចនិយាយ ដោយមិនផ្ទុយថា គ្រប់អង្គ R_k ដូចគ្នាទាំងអស់ (*tous les corps R_k sont identiques*)។ អង្គតែមួយនោះ (ប្រហែលគ្នាដោយអ៊ីសូម៉ោហ្វីស – *déterminée à un isomorphisme près*) នឹងតាងដោយ R ហើយហៅថា « បន្ទាត់នុយមេរីក (*droite numérique*) » ធាតុរបស់វា ហៅថាចំនួនពិត ហើយធាតុ នៃ R_k អាចហៅថា ការសរសេរចំនួនពិតនៅក្នុងប្រព័ន្ធនៃបាត k (*la représentation des nombres réels dans le système de base k*) ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងដឹងថា បន្ទាត់ធរណីមាត្រ អ៊ីសូម៉ោសនឹង បន្ទាត់នុយមេរីក ហើយផ្ទាស់

នៃទំហំដែលអាចវាស់បាន គឺជាចំនួនពិត ។

ជាចុងក្រោយ យើងអាច អនុវត្ត ការស្នើ (VI-10-1) មកលើ R តែម្តង ដោយយក u ជាចំនួនពិត វិជ្ជមាន មិនសូន្យ ជាទូទៅណាមួយ ($u \in R$ និង $u > 0$) ។ ដូច្នេះយើងឃើញថា មានការអនុវត្តន៍ f កើនជានិច្ច តែមួយគត់ ពី R ទៅ R ដែល បំពេញ $f(u) = 1$ និង $f(a+b) = f(a) + f(b), \ \ \forall a \in R, \ \forall b \in R$ ។ អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x}{u}$ ក៏បំពេញ លក្ខខ័ណ្ឌនេះដែរ ហើយយើងអាចថ្លែងថា៖

ការស្នើ-VI-10-3. ការអនុវត្តន៍ កើនជានិច្ច ពី R ទៅ R ដែល បំពេញ $f(a+b) = f(a) + f(b), \ \ \forall a \in R, \ \forall b \in R$ នោះត្រូវតែ លីនេអ៊ែរ (linéaire) គឺថាមានរាង ជា $f(x) = \lambda x$ ចំនួនពិត λ វិជ្ជមាន ខុសពីសូន្យ $(\lambda > 0)$ ។

$f(x) = \lambda x$ ជា សមីការ នៃបន្ទាត់ ដូចជា $y = ax$ ជាបន្ទាត់កាត់តាម គល់ o ។

<u>ប្រព័ន្ធនៃ ស្វ័យស័ត្យផ្សេងទៀត (*Autres systèmes d'axiomes*)</u>

គេអាច ប្រឌិតប្រព័ន្ធស្វ័យស័ត្យផ្សេងពីនេះដើម្បីកំណត់លក្ខណៈនៃចំនួនពិត។ ជាពិសេសគេអាចជំនួស ស្វ័យស័ត្យ ចែក(B) ដោយ ស្វ័យស័ត្យតទៅនេះ ដែលជាផលវិបាកនៃស្វ័យស័ត្យ (B) ហើយមានការ កម្រិតតិចជាង ៖

D) **ចំពោះធាតុ a, b ណាក៏ដោយ ដែលបំពេញ $a < b$ នោះមាន ធាតុ c មួយ ដែលឲ្យ $a < c < b$ (វិសមភាព ដាច់ខាត - inégalité stricte) ។**

បើនិយាយតាមធរណីមាត្រ ស្វ័យស័ត្យនេះ ថ្លែងថា ៖ នៅចន្លោះ ពីរចំណុច នៃបន្ទាត់ គេមានជានិច្ច នូវចំណុចទី បី ។ ស្វ័យស័ត្យនេះ ផ្ទៀងផ្ទាត់ បើគេសន្មតថា អង្កត់នីមួយៗ មាន កណ្តាល (*un segment admet un milieu*) ។

======================== **ចប់ ចំនួនពិត** ==========================