9. កម្មសិទ្ធិ ជាលក្ខណៈនៃចំនួនពិត (Propriétés caractéristiques des nombres réels).

ទ្រឹស្តី ដែលយើងទើបតែនឹងធ្វើចំពោះ ប្រព័ន្ធនៃ បាត10 (système de base 10) អាចប្រើបាននៅក្នុង ប្រព័ន្ធនៃបាត k (système de base k) : ចំពោះ ចំនួនគត់ k ណាមួយ យើងរាប់រកនូវសំនុំ R_k នៃស្វីត នៃចំនួនគត់ a_0 , $a_1, a_2,$ ……., a_n ដែល

បំពេញ $0 \leq a_i < k$ ចំពោះ $i \geq 1$ (a_0 ជាចំនួនគត់ទូទៅណាមួយ) ហើយយើងអាចហៅ ថា « ចំនួនពិត » គឺ ស្វីតណាមួយ ដែលមានតួច្រើនដល់អនន្ត ខុសពី k – 1[1]។

សង្កេត

a_0 គឺផ្នែក គត់ ហើយ $a_1, a_2,$ ……., a_n គឺលេខនីមួយៗនៃផ្នែក ដេស៊ីមាល ដូច្នេះចំនួនដេស៊ីមាលគឺ $a_0{,}a_1a_2\ldots\ldots a_n$ ។ បើ នៅក្នុង បាត 10 ហើយបើចំនួន

$x = 257{,}999999 \ldots..9$ នោះគេសន្មតយក $x = 258$។

ដោយពង្រីក និយមន័យទាំងឡាយនៃ បាត 10 យើងបាននៅលើ R_k នូវប្រព័ន្ធនៃ អង្គត្រលប់ (on obtient sur R_k une structure de corps commutatif) រៀបតាមលំដាប់ទាំងមូល ($totalement\ ordonné$) ហើយដែលនៅក្នុងនោះ មាន អង្គរង មួយ អ៊ីសូម៉ោស[2](isomorphe) នឹង Q ។ គ្រប់ R_k ទាំងអស់ បំពេញនូវ កម្មសិទ្ធិជាគ្រឹះ (VI,7,5) និង (VI,7,6)។ គេនឹងឃើញដោយមិនពិបាកថា គ្រប់ R_k ទាំងនោះ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ (l’axiome d’Archimède) ដែលយើងនឹងឃើញនៅខាងមុខនេះ។

សំនួរមួយដែលចោទ គឺថា តើចំនួនពិត ដែលបាននៅក្នុង បាត k ដូចគ្នានឹងចំនួនពិតនៅក្នុង បាត 10 ឬទេ? ។

---

[1] ចំពោះ k = 10 នោះ k – 1 = 9 ហើយនៅទីនេះគឺ តួ ដែលខុសពី 9 អាចមានដល់អនន្ត ។

[2] ជាកិរិយាសព្ទ តែមានន័យដូចគ្នានឹង អ៊ីសូម៉ោហ្វីស (ក៏ដូចពាក្យ ថា ដើរ ហើយនិង ដំណើរ)។

តាមពិត គឺមិនមែនចង់បង្ហាញថា សំនុំដែលបានមកទាំងអស់នោះ គឺ ដូចគ្នានោះទេ តែគ្រាន់តែចង់បង្ហាញថា សំនុំទាំងនោះ អ៊ីសូម៉ោស (isomorphe) នឹងគ្នាតែប៉ុណ្ណោះ ។ យើងនឹងឆ្លើយទៅសំនួរនេះ ដោយបង្ហាញថា គ្រប់អង្គ ត្រលប់ មានលំដាប់ទាំងមូល ដែល បានបំពេញ ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ (Axiome d'Archimède) និង ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ (Axiome Cantor) នោះ អ៊ីសូម៉ោស នឹង អង្គនីមួយៗ នៃ អង្គ R_k (ការស្នើ-VI-10-2) ។ ដូច្នេះ អង្គ R_k ទាំងអស់ សុទ្ធតែ អ៊ីសូម៉ោស នឹងគ្នាទៅវិញទៅមក ហើយយើងអាចហៅដោយមិនខ្លាចភាពផ្ទុយគ្នា ថា « ចំនួនពិត » គឺជាតួនៃអង្គ R_k ណាមួយកក៏បាន។ តែសញ្ញាណនៃចំនួនពិត ក្នុងករណីខ្លះក៏ជាសញ្ញាណដែលដឹងដោយញាញ ផ្តល់ដោយការវាស់វែងនៃទំហំ ជាពិសេសដោយការវាស់នូវប្រវែង (la mesure des longueurs)។ ហេតុនេះហើយ នៅក្នុងសៀវភៅថ្នាក់ទាបខ្លះ គេមិនឲ្យអត្ថន័យនៃសញ្ញាណនេះទេ ៖ ចំនួនដែលឥឡូវនេះហៅថាចំនួនពិត គឺជា អាប់ស៊ីស (abscisses) នៃចំណុចនៅលើបន្ទាត់ មានទិសដៅ (des abscisses de points sur une droite orientée) ហើយកម្មសិទ្ធិនៃនៃចំនួននោះ ចេញមកពីកម្មសិទ្ធិដែលគេឲ្យជាធម្មតាទៅសំនុំ ដែលហៅថា «បន្ទាត់ » នៅធរណីមាត្រ (attribuer à l'ensemble appelé « droite » en géométrie) ។ ដូច្នេះយើងត្រូវស្គាល់ឲ្យច្បាស់នូវ « បន្ទាត់ធរណីមាត្រ »នោះ ដើម្បីយើងនឹងអាចបង្ហាញថាវា អ៊ីសូម៉ោស នឹង « បន្ទាត់នៃចំនួន » (*la droite numérique*) សាងសង់ឡើងដោយវិធីពីជគណិត ផ្តើមចេញពីសញ្ញាណនៃចំនួនគត់។ ហើយក៏ត្រូវតែភ្ជាប់កម្មសិទ្ធិនៃ បន្ទាត់ធរណីមាត្រ ទៅនឹងកម្មសិទ្ធិនៃទំហំដែលអាចវាស់បាន (grandeur mesurable)។

ដូច្នេះយើងចាប់ផ្តើមដោយបញ្ជាក់នូស្វ័យសត្យនៃ ទំហំដែលអាចវាស់បាន ដែលយើបានបញ្ចូលនៅ **§1**។ បន្ទាប់មកយើងនឹងឃើញថាតើ ស្វ័យស័ត្យទាំងនោះសម្រួលមកលើបន្ទាត់ធរណីមាត្រដោយរបៀបណា ។ នៅ **§10** យើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់សំនុំដែល

បំពេញនូវស្វ័យស័ត្យទាំងនោះ សុទ្ធតែអ៊ីសូម៉ោស ទៅនឹង បន្ទាត់នៃចំនួន ដែលបាន សាងសង់កាលពីមុន។

ស្វ័យស័ត្យ នៃទំហំ ដែលអាចវាស់បាន (AXIOMES DES GRANDEURS MESURABLES.

យើងបានឃើញនៅ §1 ទំហំដែលនៅក្នុងក្រុមដូចគ្នាតាក់តែងផ្សំបានជា កន្ទះគ្រុប អាបេលីអៀង D (demi-groupe abélien D) និងបំពេញក្បួនសម្រួល (règle de simplification)។ របៀបដែលបានបង្ហាញ នៅ §V-3 និង §V-5[3] អាចធ្វើវាឲ្យទៅជាគ្រុបអាបេលីអៀង G បាន ដោយវិធីឆ្លុះ (par symétrisation)។ គឺក្រុមនេះហើយដែលយើង យកជាបានការ តទៅនេះ។ យើងនឹងឃើញ ក្នុងករណីជាច្រើន វិធីឆ្លុះ បកស្រាយ មកជាទិសដៅនៃទំហំដែលយើងសិក្សា។

ម្យ៉ាងទៀត គេអាចបង្ហាញដោយមិនពិបាក ថាគេអាចពង្រីក រីឡាស្យុងលំដាប់គ្រប់ជាតុដែលនៅក្នុង D ឲ្យបានជា រីឡាស្យុងលំដាប់គ្រប់ជាតុ នៅក្នុង G ដោយដាក់ ថា $a \geq b$ បើ $a - b \in D$ (មើលលំហាត់ voir exercice VI-12) ។ ជាតុនៃ D ក៏ជាជាតុវិជ្ជមាននៃ G ដែរ ។ ហើយគេក៏ឃើញថា រីឡាស្យុង $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$ ដើម្បីឲ្យបានប្រព័ន្ធដូច្នេះ គេដាក់ជានិយមន័យ ដូចតទៅ៖

<u>និយមន័យ</u>

គេហៅថា គ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ គឺ គ្រុបអាបេលីអៀង ដែលនៅក្នុងនោះគេបានកំណត់ រីឡាស្យុងលំដាប់គ្រប់ជាតុ ដែលបំពេញ $\boldsymbol{a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c}$

(ដោយវិធីគណនានៃគ្រុប សរសេរជា បូក) ។

---

[3] §V-3 គឺ §3 នៃជំពូក V

ដោយប្រមូល កម្មសិទ្ធិទាំងឡាយនៃទំហំដែលអាចវាស់បាន នៅ§1 យើងអាចថ្លែងថា៖

***ស្វ័យស័ត្យ នៃទំហំដែលអាចវាស់បាន** (axiomes des grandeurs mesurables).

ទំហំ មានទិសដៅ នៅក្នុងក្រុមតែមួយ (les grandeurs orientées d'un même espèce) ផ្សំបាន ជា គ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ G បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌដូចតទៅ ៖

A) (*ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ* (axiome d'Archimède). ចំពោះធាតុណាក៏ដោយនៃ G ដែលបំពេញ $a > 0$ នោះមាន ចំនួនគត់ n មួយ ដែលបំពេញ $na \geq b$ ។

B) (*ស្វ័យស័ត្យ វិធីចែក* (axiome de division). មានចំនួគត់ k > 1 ដែលចំពោះ ធាតុ a នីមួយៗនៃ G គេអាចផ្គូ នឹងធាតុ b យ៉ាងហោចក៏មួយដែរ ដែលបំពេញ $kb = a$ ។

C) (*ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ* (axiome de Cantor). ស៊ីតពីរ x_n និង x'_n មានធាតុនៅក្នុង G ហើយ បំពេញ ៖

1° $x_n \leq x_{n+1} \leq x'_{n+1} \leq x'_n$ ចំពោះគ្រប់ ចំនួន n $(\forall n)$[4]

2° $\forall \varepsilon > 0$ នៃ G គេអាចរកបាននូវចំនួនគត់ N ដែល វិសមភាព $n > N \Rightarrow x'_n - x_n < \varepsilon$[5]

នៅពេលនោះ គេមានយ៉ាងហោចណាស់ មួយធាតុ x ដែលបំពេញ $x_n \leq x \leq x'_n$ $\forall n$ ។

<u>ស្វ័យស័ត្យ នៃបន្ទាត់ ធរណីមាត្រ</u> **<u>(AXIOMES DE LA DROITE GÉOMÉTRIQUE).</u>**

---

[4] វិឡាស្សង់ 1° បង្ហាញថា (x_n) ជាស៊ីតកើន ហើយ (x'_n) ជាស៊ីត ចុះ ។តែស៊ីត (x_n) មាន ស៊ីត (x'_n) ជា គោលទាល់លើ ហើយស៊ីត (x'_n) មាន ស៊ីត (x_n) ជាគោលទាល់ក្រោម។

[5] ឃ្លានេះគេសរសេរកាត់ដោយ ៖ $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in G)$ $\exists N$ ដែល $\forall n > N$ គេបាន $x'_n - x_n < \varepsilon$ ។

យើងនឹងត្រឡប់មកធរណីមាត្រវិញ ចំពោះសញ្ញាណ បន្ទាត់មានទិសដៅ អង្កត់ វ៉ិចទ័រ ។ នៅពេលនោះយើងនឹងឃើញ និយមន័យ នៃវិធីបូក វ៉ិចទ័រពីរ នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ហើយ និងការតាក់តែងនូវកម្មសិទ្ធិនៃវិធីនេះ។ នៅទីនេះ យើងសន្មត់ថា វ៉ិចទ័រសេរីទាំងឡាយ (les vecteurs libres) នៅលើបន្ទាត់តែមួយមានទិសដៅ ប្រមូលផ្តុំបានជាគ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ (un groupe abélien ordonné) ហើយយើងនឹងសង្កេតឃើញថា ការឲ្យនូវចំណុចមួយនៅលើ បន្ទាត់ ក៏ដូចជាការឲ្យនូវ វ៉ិចទ័រមួយ ដែលមានគល់ជាប់ (un vecteur d'origine fixé)។ រចនាសម្ព័ន្ធ ជាក្រុម នៃសំនុំនៃវ៉ិចទ័រនៅលើបន្ទាត់តែមួយមានទិសដៅ អាចដឹកមកដាក់លើបន្ទាត់ នៅពេលដែលគេបានរើសយកគល់នៃបន្ទាត់នោះ ។ ហើយនៅពេលនោះ ស្វ័យស័ត្យទាំងឡាយនៃ បន្ទាត់ធរណីមាត្របានមកដោយ អនុវត្តមកលើវ៉ិចទ័រនៅលើបន្ទាត់ នូវស្វ័យស័ត្យជាទូទៅទាំងឡាយនៃទំហំដែលអាចវាស់បាន។

I.ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ គេបានសន្មតតាំងពីដើមដំបូងនៃធរណីមាត្រ គឺថាគេច្រើនថ្លែងថា « បន្ទាត់គឺ គ្មានទីបញ្ចប់ » (la droite est illimitée) ដែលមានន័យមិនច្បាស់។

II. គេក៏បានសន្មត តាំងពីដើមដំបូងមកថា មួយ អង្កត់ អាចចែកជា k ចំណែកស្មើគ្នាបាន (un segment quelconque peut être partagé en k parties égales, quel que soit l'entier k) ដោយ k ជាចំនួនគត់ណាក៏ដោយ ៖ នេះក៏ដូចជាយើង សន្មតយកនូវស្វ័យស័ត្យនៃ វិធីចែក (axiome de division) ចំពោះគ្រប់ចំនួន k ។ ហើយទាល់តែដល់ថ្នាក់ទី៩ ទើបសិស្សចេះចែក ដោយធ្វើតាមធរណីមាត្រ អង្កត់ មួយជា k ចំណែក ដោយការអនុវត្តន៍តាមទ្រឹស្តីបទ តាឡែស (par application du théorème de Thalès) ៖ ពីមុនមកសិស្សចេះត្រឹមតែចែក អង្កត់មួយ ជាពីរផ្នែកស្មើគ្នាប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ តទៅនេះ យើងសន្មតត្រឹមតែស្វ័តស័ត្យចែក ដោយ 2 តែប៉ុណ្ណោះ (axiome de division par 2)។

III.ស្វ័យស័ត្យកង់ទ័រ គេប្រើនៅ ក្នុងធរណីមាត្រថ្នាក់ដាន់ដំបូង ដើម្បីតាក់តែងនូវការស្មើ

ដូចតទៅនេះ៖ បរិវេណ នៃពហុកោណ អថេរ (polygone variable) មានកំពូលនៅលើរង្វង់មួយ (inscrit dans un cercle) នោះមានលីមីត (limite) កាលណាជ្រុងធំនៃ ពហុកោណ ខិតទៅរកសូន្យ (si le plus grand côté de ce polygone tend vers zéro)។ ក្រៅពីចំណោទនេះ គេប្រើតែ កម្មសិទ្ធិនៃបន្ទាត់ដែលចេញពីការបន្ទាយទៅក្នុងប្លង់អឺគ្លីត (prolongement dans le plan euclidien) ។ កម្មសិទ្ធិនោះធ្វើអន្តរាគមណ៍ពេលដែលគេសិក្សាពី ការកាត់គ្នា រវាង បន្ទាត់និង រង្វង់ ។ គេសំអាងដោយគំនិតទៅលើ ការជាប់គ្នា (la continuité) ដោយអះអាងថា បន្ទាត់ ដែលកាត់ឆ្លងពី ចំណុចមួយនៅខាង ក្នុងរង្វង់ទៅចំណុចមួយនៅខាងក្រៅរង្វង់ ត្រូវតែកាត់តាមរង្វង់នោះជាចាំបាច់ ។ បើយើងបកស្រាយនូវសញ្ញាណនៃការជាប់គ្នានេះ គេនឹងទៅដល់ សម្មតិកម្មដែលសមមូលនឹង ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ តែការសិក្សានេះត្រូវចេះឋានវិជ្ជាទូទៅ (*des connaissances de topologie générale*) ដែលរៀននៅថ្នាក់បរិញ្ញា។

យើងនឹងឃើញនៅ §10 ថាគ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់ ដែលបំពេញតែ ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីមែដ និង ស្វ័យស័ត្យវិធីចែក នោះអ៊ីសូម៉ោស តែមួយផ្នែកនៃចំនួនពិត R តែប៉ុណ្ណោះ ។ នៅពេលណាដែលគេមិនទាន់បានបញ្ចូល ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ (ឬស្វ័យស័ត្យដែលសមមូល) ទេ នោះបន្ទាត់ធរណីមាត្រ នៅមិនទាន់កំណត់បានពេញលេញឡើយ ៖ គេគ្រាន់តែអាចនិយាយថា ជា សំនុំមួយ អ៊ីសូម៉ោស ទៅនឹងមួយផ្នែកនៃ R ហើយ នៅក្នុងនោះក៏មាន អង្គនៃរឺសការេ (*le corps des racines carrées*) ដែលយើងបានឃើញរួចមកហើយនៅ § V – 9 នៃជំពូក V ។