8. វិធីគុណ នៃចំនួនពិត (*Multiplication des nombres réels*).

និយមន័យ

បើ A និង B ជាចំនួនពិត វិជ្ជមាន នោះតម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល លំដាប់ n ទូទៅ (valeurs décimales approchées d’ordre quelconque n) ក៏វិជ្ជមាន ហើយ ផលគុណ $A_n\ B_n$ នៃតម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល បានទៅជាស៊ីតមួយ កើន នៃចំនួនទសភាគ បន្ថែម ដោយចំនួនគត់ $(a_0+1)(b_0+1)$[1] ។

> តាមនិយមន័យ គោលទាល់លើ (ឬលីមីត) ក្នុង R នៃស៊ីត A_nB_n នឹងហៅថា ផលគុណ នៃចំនួន A, B ហើយតាងដោយ A B គឺថា ៖
>
> $A\ B = sup_R(A_n\ B_n)$ បើ $A \geq 0$ និង $B \geq 0$ ។

បើ A និង B ជាចំនួនទសភាគ តាមនិយមន័យខាលើ យើងក៏ឃើញឡើងវិញនូវ ផលគុណ នៃចំនួនទសភាគ ។

ផលគុណនៃចំនួនពិត ជាទូទៅ នឹងកំណត់ដោយ ក្បួនសញ្ញា ៖ ហើយជាទូទៅ យើងនឹងហៅថា តម្លៃដាច់ខាត (*valeur absolue*)នៃចំនួនពិត ជាទូទៅ A គឺចំនួនពិត វិជ្ជមាន $|A|$ ស្មើនឹងចំនួនណាមួយដែលធំជាងគេក្នុងចំណោម ចំនួន A និង -A ។ ផលគុណ A B នៃពីរចំនួនពិត ជាទូទៅ មិនសូន្យ នឹងកំណត់ដោយ $A\ B = |A||B|$ ឬ $A\ B = -|A||B|$ ទៅតាម A និង B មានសញ្ញា ដូច ឬ មិនដូចគ្នា។ ហើយយើងនឹងដាក់ថា A B = 0 បើ A ឬ B សូន្យ ។

ដូច្នេះវាច្បាស់ហើយ ថា ផលគុណ នៃចំនួនពិតពីរ អាចស្មើនឹងសូន្យ បើសិនជា កត្តាណាមួយស្មើនឹងសូន្យ ។

---
[1] $A = a_0,a_1a_2.... \Rightarrow A < a_0+1$

ការស្នើ-VI-8-1

វិធីគុណ នៃចំនួនពិត មានលក្ខណៈ ត្រលប់ (commutative) ។

យើងគ្រាន់បញ្ជាក់ ការស្នើនេះ ដោយយកចំនួនពិត A និង B ទាំងពីរ វិជ្ជមានហើយនៅពេលនោះ ផលគុណ A B និង B A គឺជាគោលទាល់លើ ក្នុង R នៃស្វ៊ីតពីរស្មើគ្នា A_nB_n និង B_nA_n ដូច្នេះ ៖ A B = B A ។

ដើម្បី បញ្ជាក់នូវការស្នើ-VI-ឯទៀតៗ ក្នុង វិធីគុណនៃចំនួនពិត យើងនឹងពឹងផ្អែកទៅលើវិធីគុណនៃចំនួនទសភាគ ។ តែជាដំបូង យើងត្រូវបញ្ជាក់ នូវរបៀបខិតទៅជិតរវាង ផលគុណនៃពីរចំនួនពិត និង ផលគុណនៃពីរតម្លៃប្រហែលរបស់វា ។

ការស្នើ-VI-8-2

បើចំនួនពិត A, B, C បំពេញ $C \geq 0$ និង $A \geq B$ នោះគេបាន $A C \geq B C$ ។

យើងឃើញថាគ្រាន់តែបញ្ជាក់ ការស្នើនេះក្នុងករណី A និង B ជាចំនួនវិជ្ជមាន[2] នៅពេលនោះ គេបាន $A_n \geq B_n$ ដូច្នេះក៏បាន $A_nC_n \geq B_nC_n$ ហើយ វិសមភាព $A C \geq B C$ ជាផលវិបាក នៃការស្នើ-VI-5-2 ។

ការអនុវត្តន៍

បើ A_n និង B_n ជា តម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល យកត្រឹមលំដាប់ n នៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន A, B នោះ គេបាន ៖ $0 \leq A_n \leq A < A_n + 10^{-n}$ និង $0 \leq B_n \leq B < B_n + 10^{-n}$

ហើយដោយប្រើ ការស្នើ-VI-8-2 ពីរដង យើងទាញយកបាននូវ៖

$$A_nB_n \leq A B < (A_n + 10^{-n})(B_n + 10^{-n})$$

[2] យើងបានឃើញរួចមកហើយ ចំនួនវិជ្ជមាន និងចំនួនធម្មតា ខុសគ្នាតែត្រង់សញ្ញា ប៉ុណ្ណោះទេ ចំពោះតម្លៃដាច់ខាត វាស្មើគ្នា ។

ការស្នើ-VI-8-3

វិធីគុណ នៃចំនួនពិត មានលក្ខណៈ ផ្តុំ (associative) ។

ដោយក្បួន សញ្ញា យើងគ្រាន់តែ បញ្ជាក់ នូវទំនាក់ទំនង៖

(A B) C = A (B C) *ក្នុងករណីដែល* A, B, C *ជាចំនួនពិត វិជ្ជមាន ។*

យើងឃើញថា ចំនួន $P_1 = (A\,B)\,C$ *និង* $P_2 = A\,(B\,C)$ *ទាំងពីរនេះផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង វិសមភាព មានរៀងជា ៖*

(1) $A_n\, B_n\, C_n \ \le\ P\ <\ (A_n + 10^{-n})(B_n + 10^{-n})(C_n + 10^{-n})$ [3]

យើងចង់ដាក់ $M = (A_n + 10^{-n})(B_n + 10^{-n})(C_n + 10^{-n})$ *ឲ្យមានរៀងជា* $k.10^{-n}$

ដោយបំបែក ៖

$M = A_n\, B_n\, C_n + 10^{-n}(A_nB_n + A_nC_n + B_nC_n) + 10^{-2n}(A_n + B_n + C_n + 1)$

$M < A_n\, B_n\, C_n + 10^{-n}(A_nB_n + A_nC_n + B_nC_n) + (A_n + B_n + C_n + 1)$ (*ពីព្រោះ* $10^{-2n} < 1$)

យើងតាងដោយ k *ចំនួន ដែល ធំឬស្មើនឹង៖*

$k \ge AB + AC + BC + A + B + C + 1 \ \Rightarrow\ M < A_n\, B_n\, C_n + k.10^{-n}$

ដូច្នេះ **(1)** *ទៅជា៖* $A_n\, B_n\, C_n \ \le\ P\ <\ A_n\, B_n\, C_n + k.10^{-n}$ *៖ វិសមភាពនេះ បង្ហាញថា* $A_n\, B_n\, C_n$ *ជា តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម* $k.10^{-n}$ *នៃចំនួន* P_1 *និង* P_2 *។*

---

[3] *តើយើងសង្កេត ឃើញយ៉ាងណាដែរ ចំពោះរបៀបបញ្ជាក់ នៃ ការស្នើ*-VI- *ទាំងឡាយ ដែលទាក់ទងនឹង* ***ចំនួនពិត?*** *របៀបដែលគេប្រើ គឺបើចំនួនពិត* A *នោះគេគិតពី* *<u>តម្លៃប្រហែលរបស់វា</u>* A_n *ហើយដោយស្វីត* A_n *មានគោលទាល់លើ នោះគេថា ទំនាក់ទំនងដែលគេចង់បង្ហាញនោះ ក៏នៅតែត្រូវ ទៅដល់លីមីត ដែល ជា* ***ចំនួនពិត*** *។ ហេតុអ្វីបានជាគេប្រើ* A_n ? *ព្រោះ* A_n *ជាចំនួនទសភាគធម្មតា ដែលគេស្គាល់ វិធីបូក ឬ វិធី ចែក រួចទៅហើយ ហើយគេក៏ស្គាល់លក្ខណៈរបស់វា ដូចជា ៖ ត្រលប់ ឬ ផ្តុំ ជាដើម ។ នេះជារបៀប មួយដែលគេច្រើនប្រើ បើកាលណាគេចង់ពង្រីក* (généraliser) *ទ្រឹស្តីអ្វីមួយក្នុងការស្រាវជ្រាវ* (la recherche)*។ នៅទីនេះ គឺការពង្រីកចំនួន ទសភាគ មក ចំនួនពិត ។*

ការស្នើ-VI-8-4

វិធីគុណនៃចំនួនពិត មានលក្ខណៈបំបែក ចំពោះវិធីបូក ។

ដើម្បីបង្ហាញ ការស្នើ-VI-នេះ គេគ្រាន់តែ បញ្ជាក់ណូវ រូបមន្ត (A + B) C = A C + B C និង (A - B) C = A C – B C ដោយសន្មត់ A, B, C ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ យើង បង្ហាញតែ រូបមន្តទីពីរ ដែលមិនជាស្រួលក្នុងចំណោមរូបមន្តទាំងពីរ ។ ហើយយើង សន្មត់ថា A > B ដើម្បីគោរពក្បួននៃសញ្ញា ។ កាលណា n ធំ យើងអាចបាន $A_n \geq B_n + 10^{-n}$ ហើយនិង វិសមភាព ៖ $A_n \leq A < A_n + 10^{-n}$; $B_n \leq B < B_n + 10^{-n}$; $C_n \leq C < C_n + 10^{-n}$

វិសមភាពទាំងនេះ ផ្តល់ឲ្យ ៖

$A_n - B_n - 10^{-n} \leq \mathrm{A - B} < A_n - B_n + 10^{-n}$ ហើយ ដោយ គុណនឹង C_n

(I) $C_n\,(A_n - B_n - 10^{-n}) \leq C\,(\mathrm{A - B}) < (C_n + 10^{-n})\,(A_n - B_n + 10^{-n})$ [5] ។

ហើយម្យ៉ាងទៀត៖

$C_n\, A_n \leq \mathrm{C}\,A < (C_n + 10^{-n})\,(\mathrm{A_n} + 10^{-\mathrm{n}})$

$C_n\, B_n \leq \mathrm{C\,B} < (C_n + 10^{-n})\,(B_n + 10^{-n})$

ដូច្នេះ ៖

(II) $\mathrm{C_n}\, A_n - (C_n + 10^{-n})\,(B_n + 10^{-n}) < \mathrm{C\,A - C\,B} < (C_n + 10^{-n})\,(\mathrm{A_n} + 10^{-\mathrm{n}}) - C_n\, B_n$ [6]

យើងចង់បង្ហាញថា ចំនួនទសភាគ $C_n\, A_n - C_n\, B_n = C_n\,(A_n - B_n)$ ជាតម្លៃប្រហែល

---

[4] កាលណាវិធីគណនា ណាមួយ មានលក្ខណៈ ផ្តុំ នោះគេអាចលប់វង់ ក្រចក គឺថា គេអាចសរសេរ ៖ (A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C

[5] នេះជាខាង (A – B) C

[6] បើ [A < B និង C < D] => [A – D < B – C] គឺថា ៖ A តូច គេយក D ធំមកដក ហើយ B ធំ គេយក C តូចមកដក ដូច្នេះ វិសមភាព នៅដដែល ។

នៃចំនួនពិត $C A - C B$ និង $C (A - B)$ ដោយ យកត្រឹម $\underline{10^{-n}(A + B + 2C + 1)}$ បាន ដោយប្រើ (I)និង (II) ។ ដោយហេតុការណ៍នេះត្រូវ កាលណា n ធំគ្រប់គ្រាន់ នោះគេក៏ បាន $C A - C B = C (A - B)$ ។ ខ្ញុំទុកជូនលោកអ្នករក ការបង្ហាញនេះ ដោយខ្ញុំបានធ្វើ នៅ ក្នុងការស្នើ-VI-8-3 រួចម្តងមកហើយ ។

ដើម្បីបញ្ចប់ កម្មសិទ្ធិ នៃវិធីគុណ យើងនៅតែបញ្ជាក់ថា ចំនួនពិតនីមួយៗ ក្រៅពីសូន្យ មាន ចំរាស ។ តែដំបូង យើងត្រូវបញ្ជាក់ថា ចំនួនទសភាគ នីមួយៗ ក្រៅពីសូន្យ មាន

ការស្នើ-VI-8-5

បើ A និង B ជាចំនួនទសភាគ ហើយបើ B មិនសូន្យ នោះមានចំនួនពិត C មិន សូន្យ ដែលឲ្យ A = B C ; ហើយការបំបែកដេស៊ីមាលនៃ C បានមកពី វិធីចែក មិន ចប់ នៃចំនួន A ដោយចំនួន B ។

<u>បង្ហាញ ៖</u>

ដោយគុណ A និង B ដោយ ស្វ័យគុណដ៏សមរម្យ នៃ 10 យើងអាចសន្មត ថា A និង B ជាចំនួនគត ។ ម្យ៉ាងទៀតដោយក្បួននៃសញ្ញា យើងអាចកំរិតយក A និង B ជាចំនួន វិជ្ជមាន ។

បើយើងតាងដោយ x_n លទ្ធផល ប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} នៃវិធីចែក A នឹង B នោះ យើងបាន វិសមភាព (មើល §4)៖

$$(1) \qquad B\,x_n \leq A < B(x_n + 10^{-n})$$

ការសិក្សានៅ §4 អាចឲ្យយើងរប់ថា x_n តម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល យកត្រឹមលំដាប់ n នៃ D.D.I. $x_0, c_1 c_2 \ldots\ldots.. c_n \ldots\ldots\ldots$ ដែលមិនជាប់ជំពាក់នឹង n [7]។ ហើយបើយើង តាង

[7] ត្រូវដឹងថា ក្នុងការសេសេរ D.D.I. នេះ ៖

ដោយ C ចំនួនពិត តាងដោយ D.D.I. នេះ យើងបាន វិសមភាព ៖

$$x_n \leq C \leq x_n + 10^{-n} \quad =>$$

(2) $B\,x_n \leq B\,C \leq B\,(x_n + 10^{-n})$

ដោយប្រៀបធៀប (1) និង (2) យើងឃើញថា A និង B C ទាំងពីរ មាន $B\,x_n$ តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម 10^{-n} $\forall n$ ។ ដូច្នេះ តាមការស្នើ-VI-6-2 យើងបាន A = B C ។

ដោយ (1) យើងមាន $A < B(x_n + 10^{-n})$ => B C < B($x_n + 10^{-n}$) => C < ($x_n + 10^{-n}$) ដែលបង្ហាញថា $x_0, c_1c_2 \ldots\ldots c_n \ldots\ldots$ ជាតំណាងដេស៊ីមាលធម្មតា[8] នៃចំនួន C (*représentation décimale régulière du nombre* C) ។

ម្យ៉ាងទៀត C ជាចំនួនពិត តែមួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង A = B C ។ ព្រោះថាបើមាន $A = B\,C'$ ឲ្យ $B(C - C') = 0$ ដូច្នេះ $C = C'$ ។ ដូច្នេះ គេអាចតាង ដោយមិនខ្លាចច្រឡំ $\frac{A}{B}$ ជាចំនួន C ដែលជា ផលចែកដាច់ ក្នុងវិធី ចែក A ដោយ B ។

ដូច្នេះ ចាប់ពីពេលនេះទៅ ចំរាស នៃចំនួនពិត គឺកំណត់ដោយ ស៊ីតកើន នៃតម្លៃប្រហែលខ្វះ ឬ ដោយស៊ីត ចុះ នៃតម្លៃប្រហែលលើស ។

ការស្នើ-VI-8-6

គ្រប់ចំនួនពិត មិនសូន្យ មាន ចំរាស ។

គេឲ្យចំនួនពិត $A \neq 0$ គេចង់រក ចំនួន *B* (តែមួយ) ដែលឲ្យ A B = 1 ។ យើងសន្មតថា $A > 0$ [9] (ពីព្រោះ ក្បួនសញ្ញានោះ យើងចេះហើយ ចូរសម្រួលទៅតាមនោះចុះ) ។

$x_0 = x_0$; $x_1 = x_0, c_1$; $x_2 = x_0, c_1c_2$; …. ; $x_n = x_0, c_1c_2 \ldots\ldots c_n$; ……. ។

[8] គឺមិនមែននៅក្នុង Δ_9

[9] ដូចជា A = 0,0000245814…… ជាដើម

យើងតាងដោយ A_n តម្លៃដេស៊ីមាល ប្រហែល យកត្រឹមលំដាប់ n នៃ A ។ ដោយ A > 0 ដូច្នេះ មានចំនួនគត់ p_0 ដែល $p \geq p_0$ នោះយើងបាន $A_p > 0$ ។ យើងតាង $A_{p_0} = \alpha$ ។ ម្យ៉ាងទៀត គេដឹងថា ស៊ីត A_n+10^{-n} ជាស៊ីតចុះ បន្ថយដោយ A_p ,$\forall p$ (minorée par A_p, $\forall p$) ។ ចំពោះតម្លៃ n នីមួយៗ ដោយ**ការស្នើ-VI-8-5** គេបានចំនួនពិត B_n ដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $B_n(A_n+10^{-n}) = 1$ ។

ស៊ីត B_n ជាស៊ីត កើន ហើយ បន្ថែមដោយ $\frac{1}{\alpha}$ (ពីព្រោះ $B_n(A_n+10^{-n}) = 1$ =>

$B_n = \frac{1}{A_n+10^{-n}} \leq \frac{1}{\propto}$)។ យើងតាងដោយ B គោលទាល់លើ នៅក្នុង R នៃស៊ីតនេះ។

គេក៏បាន $B \geq B_n$ ហើយម្យ៉ាងទៀត ទំនាក់ទំនង $B_n \leq \frac{1}{A_p}$ ដែលត្រូវចំពោះ $p \geq p_0$ បណ្តាលឲ្យ $B \leq \frac{1}{A_p}$ ។ ចំពោះ $n \geq p_0$ គេបានវិសមភាព ៖

$$\frac{1}{A_n+10^{-n}} \leq B \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{(ព្រោះ } B_n \text{ ជាស៊ីត កើន)}$$

ដោយ $A_n \leq A \leq A_n + 10^{-n}$ នោះគេបាន៖

$$\frac{A_n}{A_n+10^{-n}} \leq A\,B \leq \frac{A_n + 10^{-n}}{A_n} \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{A_n}{A_n+10^{-n}} - 1\right| \leq |A\,B - 1| \leq \left|\frac{A_n + 10^{-n}}{A_n} - 1\right|$$

រឺ $$\frac{10^{-n}}{A_n+10^{-n}} \leq |A\,B - 1| \leq \frac{10^{-n}}{A_n}$$

ដោយ $\frac{1}{A_n} \leq \frac{1}{\alpha}$ ដូច្នេះ $\mathbf{|A\,B - 1| \leq \frac{1}{\alpha} 10^{-n}}$ ដែលបង្ហាញថា ចំពោះ $n \geq p_0$, ចំនួនពិត A B និង 1 មានតម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម $\frac{1}{\alpha} 10^{-n}$ ។ ដូច្នេះ គេបាន A B = 1 នេះមានន័យថា ៖ ក្នុង R កាលណា A មិនសូន្យ នោះ A ក៏មាន B ជាចំរាសរបស់វា។

សង្កេត

មកដល់ត្រឹមនេះ បើលោកអ្នកយល់ហើយក៏ សាធុទៅ តែបើមិនទាន់យល់ ថា ∝ នោះ

បានមកដោយរបៀបយ៉ាងណា នោះមានពន្យល់ដូចតទៅនេះ ដោយឧទាហរណ៍ ៖

ឧបមា A = 0,0008273……

យើងឃើញថា $A_0 = 0$; $A_1 = 0,0$; $A_2 = 0,00$; $A_3 = 0,000$; $A_4 = 0,0008 > 0$

n	**p**	A_p	A_n	$A_n + 10^{-n}$
n= p_0	$p_0 = 4$	$A_{p_0} = 0,0008 = \propto$	0,0008	$0,0008 + 10^{-4} =$ 0,0009
4	p = 4	$A_p = 0,0008 > 0$	$A_n = A_p = 0,0008 = \propto$	0,0009
5			0,00082	0,00083
6			0,000827	0,000828
7			0,0008273	0,0008274
…			…….	…..

នៅក្នុងតារាងនេះ ចាប់ពី $n \geq 5$ ទៅ ស្វ៊ីត $A_n + 10^{-n}$ ចុះ រហូត តែវា ឃាំងដោយ $A_p = \propto$ ពីព្រោះ ៖

$0,0008 = \propto < 0,00083 < 0,000828 < 0,0008274 < \ldots\ldots..$ ។

ដោយ $\propto \leq A_n$ ចំពោះ $n \geq p_0$ ដូច្នេះ $\frac{1}{A_n} \leq \frac{1}{\propto}$ ។

ដើម្បីរកចំរាស នៃ *A* គេក៏អាចប្រើស្វ៊ីត ចុះ $B'_n = \frac{1}{A_n}$ ហើយ គោលទាល់ក្រោម *B´* នៃស្វ៊ីតនេះ (ដូច *B* ដែរ) ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $\frac{1}{A_n + 10^{-n}} \leq B' \leq \frac{1}{A_n}$ ចំពោះ $n \geq p_0$

ដូច្នេះ យើងក៏បាន A B’ = 1 ហើយ B = B’ ។

ដោយការសិក្សានេះ គេឃើញថា សំនុំនៃចំនួនពិត ជា អង្គត្រលប់ (corps commutatif) រៀបតាមលំដាប់ទាំងអស់ (totalement ordonné) ។

ពីចំនួន សនិទាន $\frac{a}{b}$ គេអាចផ្តំ នឹងចំនួនពិត ដែលជា ផលចែក a ដោយ b ៖ ដូច្នេះ

គេមានអាំងសេចស្យុង (injection) ពី Q ទៅ R ។ គេក៏អាចថា អង្គ Q (corps Q) នៃចំនួនសនិទាន ជាអង្គតូច (sous-corps) នៃ R ។

ដោយប្រើរបៀបដូចគ្នានឹង របៀបដែលប្រើក្នុង ការស្មើ (VI – 8 – 5) បានការស្មើដូចតទៅ ៖

ការស្មើ-VI-8-7

ចំនួនពិត វិជ្ជមាននីមួយៗ មានរឹសការេវិជ្ជមាន ដែលជា D.D.I បានមកដោយបន្តដល់អនន្ត នូវប្រមាណវិធីរករឹសការេ ។

ជាទូទៅ គេអាចតាំងឡើងថា ចំនួនពិតវិជ្ជមាន មានរឹសវិជ្ជមានលំដាប់ p ដោយ p ជាចំនួនគត់ ណាមួយក៏ដោយ ។