7. វិធីបូក នៃចំនួនពិត (Addition des nombres réels).

និយមន័យ

A= $a_0,a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ និង B= $b_0,b_1 \ldots\ldots\ldots.\ldots$ ជាចំនួនពិតទាំងពីរ (គឺថាជាធាតុនៃ Δ - Δ_9) យើងបង្កើត ចំពោះចំនួន n មួយ នូវការបូក $A_n + B_n$ ដែលជាចំនួនប្រហែល យកត្រឹម 10^{-n} ។ ស៊ីត $A_n + B_n$ ជាស៊ីត កើន ទាល់លើដោយ a_0+b_0+2 [1] ។

តាមនិយមន័យ គោលទាល់លើ ក្នុង R នៃស៊ីតនេះ នឹងហៅថា **ផលបូកនៃចំនួន A និង B** ហើយគេតាងដោយ A+B ។

ក្នុងករណីដែល A និង B ជាចំនួនទសភាគ (គឺជាចំនួន ក្នុង Δ_0) យើងបាន ចំពោះ n ធំគ្រាន់បើដែរនោះ $A = A_n$ និង $B = B_n$ ។ ដូច្នេះ sup($A_n + B_n$) = A + B ៖ យើងឃើញឡើងវិញនូវ ផលបូកនៃចំនួនទសភាគ ។ ដូច្នេះ ក្នុងនិយមន័យនេះ វិធីបូកក្នុង R នៃចំនួនពិត ក៏ជាវិធីបូកក្នុង Δ_0 នៃចំនួនទសភាគដែរ ។

ការស្នើ-VI-7-1
វិធីបូកនៃ ចំនួនពិត មានលក្ខណៈត្រលប់ ។

ដោយថា ផលបូក A+B និង B+A គឺ រៀងៗខ្លួន កំណត់ដោយស៊ីត A_n+B_n និង B_n+A_n ហើយដោយ វិធីបូកនៃចំនួនទសភាគ មានមានលក្ខណៈត្រលប់ នោះគេបាន $A_n+B_n = B_n+A_n$ ។ ដូច្នេះ ស៊ីតទាំងពីរ A_n+B_n និង B_n+A_n មានគោលទាល់លើស្មើគ្នា គឺថា A+B = B+A ។

ការស្នើ-VI-7-2
ចំនួនពិត សូន្យ ជា ធាតុ នប៉ុសកលិង្គ (élément neutre) នៃ វិធីបូក ហើយចំនួនពិតនីមួយៗ មានចំនួនផ្ទុយ ។

[1] ដោយ $0, a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < 1$ ដូច្នេះ A= $a_0,a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < a_0+1$

ជាដំបូង យើងឃើញច្បាស់ក្រឡែតថា លេខបូក មាន ជាតុនប៉ុសកលិង្គ គឺ ចំនួនទសភាគសូន្យ ដែលជា **D.D.I.** មានលេខ សុទ្ធតែសូន្យ ។ ម្យ៉ាងទៀត ចំនួនទសភាគនីមួយៗ សុទ្ធមានតែមាន ចំនួនទសភាគផ្ទុយ ។

ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែ បង្ហាញថា មាន ចំនួនផ្ទុយ នៃចំនួនពិត ដែលមិនមែនជាចំនួនទសភាគ គឺថា ជាចំនួន មិននៅក្នុង Δ_0 និង Δ_9 (គឺចំនួន អសនិទាន) ។ បើ

A = $a_0, a_1 a_2$…………………. ជាចំនួន D.D.I.របៀបនោះ យើងបាន D.D.I. A' របៀបនោះដែរ ដោយយើងតាង៖

$a'_0 = -1 - a_0$ និង $a'_i = 9 - a_i$ ចំពោះ $i \geq 1$ **(F1)** ហើយផលបូក $A_n + A'_n$ គឺចំនួនទសភាគ $\bar{1},9999\ldots9 = -10^{-n}$ ដែលសរសេរ ដោយ n ដេស៊ីមាលស្មើនឹង 9 ។ គោលទាល់លើ នៃផលបូក $A_n + A'_n$ គឺជាចំនួនទសភាគ ដំណាងដោយ D.D.I. មិននឹងន៏ (représenté par un D.D.I. irrégulier) $\bar{1},9999$…….. គឺ សូន្យ ហើយយើងក៏បាន A + A' = 0 ។

<u>ឧទាហរណ៍</u> គេឲ្យ A= 2,4263 ដោយប្រើ **(F1)** យើងរក A'

A = 2,4263 => $a_0=2$; $a_1=4$; $a_2=2$; $a_3=6$; $a_4=3$;

$a'_0 = -1 - a_0 \Rightarrow a'_0 = -1-2 = -3$

$a'_i = 9 - a_i$ ចំពោះ $i \geq 1$ => $a'_1 = 9 - 4 = 5$; $a'_2 = 9 - 2 = 7$; $a'_3 = 9 - 6 = 3$;

$a'_4 = 9 - 3 = 6$ ។

ដូច្នេះ A' = $\bar{3},5736$ ហើយ A+A' = 2,4263 + $\bar{3},5736 = \bar{1},9999 = -10^{-4}$ ។

<u>ការស្មើ-VI-7-3</u>

បើ A, B, C ជាចំនួនពិត វិសមភាព $A \leq B$ នាំឲ្យ $A + C \leq B + C$ ។

បើ A_n, B_n, C_n ជា រៀងៗខ្លួន តម្លៃដេស៊ីមាល ប្រហែល យកត្រឹម លំដាប់ n នៃ A,B,C វិសមភាព $A \leq B$ ផ្តល់ឲ្យ $A_n \leq B_n$ ដូច្នេះ $A_n + C_n \leq B_n + C_n$ ។

បើយើងតាង $\alpha = sup_{\Delta}(A_n + C_n)$ និង $\beta = sup_{\Delta}(B_n + C_n)$ នោះដោយ ការស្នើ-VI--V-2 យើងបាន $A + C \leq B + C$ ។ ពីព្រោះ $A + C$ និង $B + C$ ជាចំនួនពិត ដែលរៀងៗខ្លួន តាងដោយ D.D.I. α និង β ។

<u>ការអនុវត្តន៍</u>

ដោយប្រើ ការស្នើ-VI-7-3 ពីរដង យើងបានចំពោះ វិសមភាព ខាងក្រោមនេះ៖

$A_n \leq A < A_n + 10^{-n}$ និង $B_n \leq B < B_n + 10^{-n}$ =>

$A_n + B_n \leq A + B < A_n + B_n + 2.10^{-n}$

ដូច្នេះ ផលបូកនៃ $A_n + B_n$ ជាតម្លៃប្រហែល ខ្វះ យកត្រឹម 2.10^{-n} នៃផលបូក $A + B$ ។

<u>**ការស្នើ-VI-7-4**</u>

វិធីបូក ចំនួនពិត មានលក្ខណៈ ផ្តុំ (associative) ។

យើងតាងដោយ A_n, B_n, C_n តម្លៃ ដេស៊ីមាលប្រហែល យកត្រឹមលំដាប់ n នៃ បីចំនួនពិតជម្មតា A, B,C ដោយប្រើ**ការស្នើ**-VI-7-3 វិសមភាព ខាងក្រោមនេះ ៖

$$A_n \leq A < A_n + 10^{-n} \quad (1)$$

$$B_n \leq B < B_n + 10^{-n} \quad (2)$$

$$C_n \leq C < C_n + 10^{-n} \quad (3)$$

យើងចង់បង្ហាញថា A + (B+C) = (A + B) + C [2]

ដោយប្រើ (2) និង (3) យើងបាន ៖ $(B_n + C_n) \leq (B + C) < (B_n + C_n) + 2.10^{-n}$ (4)

---

[2] ក្នុងវិធីគណនា a+(b+c) គេគណនា b បូកនឹង c ជាមុនសិន រួចហើយដល់បានលទ្ធផល ទើបគេយកមកបូកនឹង a ។ ហើយគេថា លេខបូក មានលក្ខណៈផ្តុំ កាលណា (a+b)+c = a+(b+c) ។

ដោយប្រើ (1) និង *(2)* យើងបាន ៖ $(A_n + B_n) \leq (A + B) < (A_n + B_n) + 2.10^{-n}$ (5)

ដោយប្រើ (1) និង (4) យើងបាន ៖

$A_n + (B_n + C_n) \leq A + (B + C) < A_n + (B_n + C_n) + 3.10^{-n}$ រឺ ដោយ A_n, B_n, C_n ជាទសភាគ ធម្មតា ៖ $\mathbf{A_n + B_n + C_n \leq A + (B + C) < A_n + B_n + C_n + 3.10^{-n}}$ **(7)**

ដោយប្រើ *(5)* និង (3) យើងបាន ៖

$(A_n + B_n) + C_n \leq (A + B) + C < (A_n + B_n) + C_n + 3.10^{-n}$ រឺ ដោយ A_n, B_n, C_n ជាទសភាគ ធម្មតា ៖ $\mathbf{A_n + B_n + C_n \leq (A + B) + C < A_n + B_n + C_n + 3.10^{-n}}$ **(8)**

ដោយ (7)និង (8) យើងឃើញថា ចំនួនទសភាគ $A_n + B_n + C_n$ ជាតម្លៃប្រហែលខ្វះយកត្រឹម 3.10^{-n} នៃផលបូក $(A + B) + C$ និង $A + (B + C)$ ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall n$ ។ ដូច្នេះ តាម ការស្នើ-VI-6-2 ផលបូកទាំងពីរនេះ ស្មើគ្នា ដែលគេបកស្រាយថា ទំនាក់ទំនង $(A + B) + C = A + (B + C)$ ដែលថា វិធីបូក មានលក្ខណៈផ្តុំ ។

ការសន្និដ្ឋាន

ដោយការស្នើទាំងអស់ ដែលបានឃើញរួចមកហើយនេះ គេថា ចំពោះវិធីបូក ចំនួនពិតរួមគ្នាបានជា ក្រុមមួយ ហៅថា « **គ្រុបអាបេលីអៀងមានលំដាប់គ្មានសល់** [3]» (groupe abélien totalement ordonné) ។

សេចក្តីសង្កេតអំពីស្វីត

យើងតាងដោយ(A^{α}) ស្វីត កើន និង បន្ថែម (majorée) នៃចំនួនពិត ហើយដោយ A គោលទាល់លើ របស់ស្វីតនោះ ក្នុង Δ ។ យើងធ្លាប់បានឃើញរួចមកហើយ (មើល ការស្នើ-*VI*- 5-1) ថានៅពេលនោះមាន ស្វីត នៃចំនួនគត់ α_n ដែល $\forall \alpha \geq \alpha_n, A_n^{\alpha} = A_n$ ។

[3] បានន័យថា បើគេឲ្យចំនួនពិតពីរ A និង B គេអាចប្រៀបធៀបជានិច្ច ចំនួនទាំងពីរនោះ គឺថាគេអាចសរសេរថា ៖ A$\leq B$ ឬ B$\leq A$ រឺ៖ $\forall A \in R$, $\forall B \in R$ ។

បើ A’ ជា គោលទាល់លើ ក្នុង R នៃ A^{α} នោះ គេបានទៅតាមករណី $A' = A$ ឬ $A' = \bar{A}$ ហើយគ្រប់ករណីទាំងអស់ $A' < A_n + 10^{-n}$ ។ ហើយបើ ចំពោះ $\alpha \geq \alpha_n$ នោះគេបាន $A^{\alpha} \leq A' < A^{\alpha} + 10^{-n}$ ។

នៅដែលយើងកំណត់សញ្ញាណជាទូទៅនៃ លីមីត នោះអាចនិយាយថា ចំនួនពិត $A' = sup_R\,(A^{\alpha})$ គឺជាលីមីតរបស់ស៊ីតA^{α} ហើយយើងក៏អាចថ្លែងថា ៖

<u>*ការស្នើ*-VI-7-5</u>

គ្រប់ស៊ីត កើន ហើយ បន្ថែម នៃចំនួនពិត មានលីមីត ។

ក្នុងការស្នើនេះ A’ ជា គោលទាល់លើ ក្នុង R នៃ A^{α} ហើយនៅពេលនោះយើងបាន $A^{\alpha} \leq A' < A^{\alpha} + 10^{-n}$ ។

ឥឡូវនេះបើ A’ ជា គោលទាល់ក្រោម ក្នុង R នៃ ស៊ីតចុះ ហើយបន្ថយ (minorée) A^{α} នៃចំនួនពិត នៅពេលនោះយើងក៏បាន៖ ចំពោះ α ធំបង្គួរ នូវវិសមភាព $A^{\alpha} - 10^{-n} < A' \leq A^{\alpha}$ ដែលគេបកស្រាយថា A’ ជា លីមីតនៃស៊ីត A^{α} ។

សម្រាប់តទៅមុខ យើងត្រូវបង្ហាញថា ចំនួនពិត ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងការស្នើខាងក្រោមនេះ ។

ដោយសង្កេតនូវ (I) យើងឃើញថា (x_n) ជាស៊ីត កើន ហើយបន្ថែមដោយ $x'_p,\ \forall p$ ។ ដូច្នេះ ស៊ីតនេះ មាន គោលទាល់លើនៅក្នុង R តាងដោយ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \leq x \leq x'_p\ ,\ \forall n, \forall p$ ដូច្នេះក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \leq x \leq x'_n\ ,\ \forall n$ ។

<u>ការស្នើ</u>-**VI-7-6**

គេឲ្យ (x_n) និង (x'_n) ពីរស្វីតនៃចំនួនពិត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹង៖

(I) $\boldsymbol{x_n \le x_{n+1} \le x'_{n+1} \le x'_n \ , \ \forall n}$

នៅពេលនោះ គេអាចរកបានយ៉ាងហោចណាស់មួយ នូវចំនួន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $\boldsymbol{x_n \le x \le x'_n \ , \ \forall n}$ ***។***

<u>សង្កេត</u>

បើស្វីត x_n និង x'_n ផ្ទៀងផ្ទាត់ ត្រឹមតែ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ **(I)** *តែប៉ុណ្ណោះ នោះវាអាចមាន $\boldsymbol{x}$ លើសពីមួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \le x \le x'_n \ , \ \forall n$ ។ ដើម្បីជានាថា x មានតែមួយនោះ ត្រូវ ស្វីត x_n និង x'_n ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង ល័ក្ខខ័ណ្ឌ បន្ថែមមួយទៀតគឺ ៖*

(II) ***ទោះជា ចំនួន $\varepsilon > 0$ ប៉ុណ្ណាក៏ដោយ គេក៏អាចរកចំនួន p ដែលកាលណាគេយក ចំនួនគត់ $n \ge p$ នៅពេលនោះគេបាន*** $x'_n - x_n \le \varepsilon$ *(គេបកស្រាយល័ក្ខខ័ណ្ឌនេះ ដោយនិយាយថា ផលសង $(x'_n - x_n)$ ខិតជិតសូន្យ) ។*

ឧបមាថា លក្ខ័ខ័ណ្ឌ (I) និង (II) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំងពីរ ហើយ យើងតាងដោយ x ***និង*** *y ចំនួនពិត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \le x \le x'_n$, $x_n \le y \le x'_n \ , \ \forall n$ ។ បើ p ជាចំនួនគត់គេឲ្យ នោះគេអាច យក n ដែលឲ្យ $x'_n - x_n \le 10^{-p}$(ដោយ (II)) ។ នៅពេលនោះ យើងឃើញថា <u>ចំនួនទាំងពីរ</u> x* ***និង*** *y មាន x_n ជាតម្លៃ ប្រហែល យកត្រឹម 10^{-p} ហើយវាត្រូវយ៉ាងនេះ ទោះជា p ប៉ុនណាក៏ដោយ ។ ដូច្នេះ $x = y$ (ដោយ ការស្នើ*-**VI-6-2**)។

ដោយការសង្កេតនេះ ចំនួនពិត អាចកំណត់ដោយ ស្វីត x_n នៃតម្លៃប្រហែលខ្វះ (valeur approchée par défaut) *<u>និង</u> ដោយ ស្វីត x'_n នៃតម្លៃប្រហែលលើស* (valeur approchée par excès) *ហើយ ផលសង $(x'_n - x_n)$ រវាងស្វីតទាំងពីរត្រូវខិតជិតសូន្យ ។*