3. សញ្ញាណនៃតម្លៃប្រហែល (Notion de valeur approchée)

និយមន័យ

ε សំដៅចំនួនវិជ្ជមាន ខុសពីសូន្យ គេថាចំនួន a ជាតម្លៃប្រហែលខ្វះនៃចំនួន x [ឬក៏ប្រហែលលើស នៃចំនួន x] យកត្រឹម ε បើកាលណា គេមាន វិសមភាព ទាំងពីរខាង គឺះ $a \leq x \leq a + \varepsilon$ [ឬក៏ $a - \varepsilon \leq x \leq a$][1] ។

បើ $\varepsilon = 10^{-n}$ នោះគេបានសញ្ញាណនៃតម្លៃប្រហែល នៃចំនួន x យកត្រឹម10^{-n} (ខ្វះ ឬលើស) ។

ដោយថាចំនួនដេស៊ីមាលអាចមានលេខច្រើនបន្ទាប់ពីកណ្តក់សញ្ញា ហើយបើគេកាត់យកត្រឹមតែ ដេស៊ីមាលជួរ n នោះតម្លៃប្រហែល x_n នៃចំនួន x ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង វិសមភាព ៖

$$x_n \leq x \leq x_n + 10^{-n}$$

ហើយគេថា x_n ជាតម្លៃដេស៊ីមាលប្រហែល[2] យកត្រឹម 10^{-n} (x_n valeur décimale approchée à 10^{-n} *près* du nombre) ។

សង្កេត-1

យើងគួរបញ្ជាក់នូវ ពាក្យខ្វះ ដែលយើងធ្លាប់ប្រើដែរ ដូចជាពាក្យ ៖ លេខ ចំនួន តម្លៃ និមិត្តរូប ។

នៅក្នុងប្រព័ន្ធ ដេស៊ីមាល លេខ មានតែ ដប់ គឺ ០ ១ ២ ៣ ៤ ៥ ៦ ៧ ៨ ៩

[1] ចូរចាំថា ក្នុងទីនេះ a ជាតម្លៃប្រហែល ហើយ x ជាតម្លៃត្រឹមត្រូវ តែដោយតម្លៃ x ទៅមិនដល់ គេបានតែតម្លៃ a ។

[2] បើយើងថាតម្លៃប្រហែល ដោយមិនបញ្ជាក់ នោះគឺថា តម្លៃប្រហែលខ្វះ

ហើយដោយ ដប់លេខនេះ គេអាចសរសេរបាន ចំនួន រាប់លាន រាប់កោដិ ចាប់តាំងពី ចំនួន សូន្យ ឡើងទៅ ។ ដូចយើងមាន ព្យញ្ជនៈ តែជាង ៣០ អាចសរសេរបានពាក្យ ប្រើមិនអស់ ។ តើ តម្លៃ និងចំនួន ដូចគ្នា ឬ ខុសគ្នា ?

នៅក្នុង ឃ្លាខាងលើ គេសរសេរៈ

« **ហើយគេថា x_n ជាតម្លៃប្រហែល នៃចំនួន** x យកត្រឹម $\mathbf{10^{-n}}$ »

យើងឃើញថា ចំពោះ x_n គេប្រើពាក្យ តម្លៃ ហើយចំពោះ x គេប្រើពាក្យ ចំនួន ជាភាសា សាមញ្ញ ចំនួន និងតម្លៃ មានន័យដូចគ្នា តែក្នុងការគណនា រកតម្លៃ ជួនកាល គេទៅមិនដល់តម្លៃ ដែលស្មើនឹងចំនួនពិតនោះ នៅពេលនោះ តម្លៃ និង ចំនួន មិនស្មើគ្នាទេ គេដិងតែតម្លៃប្រហែល នៃ ចំនួនទពិតត្រឹមត្រូវ តែ គេក៏អាចដឹងជាមុនថា តម្លៃប្រហែល នឹងចំនួន ត្រឹមត្រូវ ឃ្លាតពីគ្នា មិនលើសពី 10^{-n} ទេ គឺ ថា

$|x_n - x| \leq \ 10^{-n}$ ។

<u>ចុះអ្វីទៅនិមិត្តរូប</u>? (symbole) គឺរូបដែលគេប្រឌិត ដែលគេគួរសម្រាប់ជាតំណាងអ្វីមួយ ដូចជា $\sqrt{}$ ឬ π ជាដើម ។

<u>សង្កេត-2</u>

គេឲ្យ x = 21,45678

តាមការកត់ខាងលើ x_1 = 21,4 ; x_2 = 21,45 ; x_3 = 21,456 ; x_4 = 21,4567 ;

x_5 = 21,45647 (គឺមាន 5 ដេស៊ីមាល) ។

ចំពោះ n=3, x_n = 21,456 ហើយ x = 21,45678

គេអាចរក y_n ជា<u>ចំនួនគត់</u> តែមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង **(1)** $y_n \leq 10^n x < y_n+1$ ហើយ តម្លៃប្រហែលនៃ x យកត្រិម 10^{-n} គឺ $x_n = 10^{-n} y_n$

ចំពោះ x = 21,45678 ហើយយើងយក n = 3 នោះ $10^n x = 10^3 \times (21{,}45678) = 21456{,}78$

(1) => $y_n \leq 21456{,}78 < y_n + 1$ => យើងគ្រាន់តែយក $y_n = 21456$ នោះ (1) ក៏

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ហើយនៅពេលនោះ $x_n = 10^{-n} y_n$ => $x_3 = 10^{-3}(21456) = 21{,}456$ ដែលជា ចំនួនដូចខាងដើមនៃ សង្កេត-2 ។

រួមសេចក្ដីទៅ ដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលខ្វះនៃ x យកត្រឹម 10^{-n} **យើងគ្រាន់តែទុកក្នុង x ចាប់ពីកណ្ដក់សញ្ញាទៅ n លេខ** (ក្រៅពីនោះលេខបន្ទាប់ដែលនៅសល់ទាំងប៉ុន្មាន យើងលប់ទាំងអស់)។

សង្កេត-3

គួរកត់ចំណាំដែរ ថា តម្លៃប្រហែលយកត្រឹម 10^{-n} នៃ x អាចមិនឲ្យ n លេខ ខាងផ្នែកដេស៊ីមាលនៃ x ជាចាំបាច់ទេ (la donnée d'une valeur approchée quelconque à 10^{-n}près, ne détermine pas nécessairement les n premières décimales du nombre x) ។

ឧទាហរណ៍ ចំនួនដេស៊ីមាល 0,19999 ជាតម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម 10^{-5} នៃចំនួន ដេស៊ីមាល 0,2 ពីព្រោះ $0{,}19999 + 10^{-5} = 0{,}19999 + 0{,}00001 = 0{,}2$ ។ តែចំពោះ ចំនួនទាំង ពីរនេះ (0,19999 និង 0,2) ផ្នែកដេស៊ីមាល មិនស្មើគ្នាទេ។ ការសង្កេតនេះ មានសារសំខាន់ ក្នុងការគណនាតម្លៃប្រហែល ។

ប្រមាណវិធី លើតម្លៃប្រហែល (Opérations sur les valeurs approchées)

យើងតាងដោយ a_1 តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម ε_1 នៃចំនួន x_1

យើងតាងដោយ a_2 តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម ε_2 នៃចំនួន x_2

នៅពេលនោះ ៖

ចំនួន $a_1 + a_2$ ជា តម្លៃប្រហែលខ្វះ យកត្រឹម $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ នៃ $x_1 + x_2$

ហើយបើ a_1 និង a_2 ជាតម្លៃប្រហែល ដេស៊ីមាល[3] យកត្រឹម10^{-n} នៃ x_1 និង x_2 ផលបូក $a_1 + a_2$ ជាតម្លៃប្រហែល នៃ $x_1 + x_2$ យកត្រឹម 2.10^{-n} តែ $a_1 + a_2$ ពុំមែន ត្រូវតែជាតម្លៃប្រហែល <u>ដេស៊ីមាល</u> ឡើយ ។

ក៏ដូចគ្នា ដែរ ការឲ្យតម្លៃប្រហែល នៃ x_1 និង x_2 អាចឲ្យយើងរក តម្លៃប្រហែល នៃផលគុណ $x_1.x_2$ តែត្រូវតែប្រយ័ត្ន ចំពោះសញ្ញា នៃចំនួន <u>អវិជ្ជមាន</u>។ ដើម្បីចៀសវាងការច្រឡំ យើងរកតម្លៃប្រហែលនៃ <u>**ចំនួនវិជ្ជមាន**</u>សិនទៅ។ <u>តទៅនេះយើងសន្មត់ថា ចំនួនដែលយើងសិក្សាសុទ្ធតែជាចំនួន វិជ្ជមាន។</u>

បើ a_1 និង a_2 ជាចំនួនវិជ្ជមាន វិសមភាព ខាងក្រោមនេះ ៖

$$a_1 \le x_1 \le a_1 + \varepsilon \quad \text{និង} \quad a_2 \le x_2 \le a_2 + \varepsilon$$

$$=> \qquad a_1.a_2 \le x_1.x_2 \le (a_1 + \varepsilon)(a_2 + \varepsilon)$$

រឺ $\boxed{a_1.a_2 \le x_1.x_2 \le a_1.a_2 + \varepsilon(a_1 + a_2 + \varepsilon)}$ ដែលបង្ហាញថា $a_1.a_2$ ជាតម្លៃប្រហែលខ្វះយកត្រឹម $\varepsilon(a_1 + a_2 + \varepsilon)$។ ហើយជាពិសេសផលគុណនៃតម្លៃប្រហែល ដេស៊ីមាលយកត្រឹម 10^{-n} នៃx_1និងx_2 កំណត់តម្លៃប្រហែលនៃផលគុណ $x_1.x_2$ តែតម្លៃប្រហែលនោះ <u>ពុំត្រូវតែជា</u> តម្លៃប្រហែល<u>ដេស៊ីមាល</u> ឡើយ ។

ដោយសំអាង លើ គោលការណ៍ នៃ វិសមភាព ៖

$$\boxed{a_1 - b_2 \le x_1 - x_2 \le b_1 - a_2}$$

$a_1 \le x_1 \le b_1$ និង $a_2 \le x_2 \le b_2$ =>

⇨ ដូច្នេះយើងអាចរកតម្លៃប្រហែល នៃផលសង រវាងពីរចំនួន ។

[3] ចំពោះ 10^{-n} តម្លៃប្រហែលនោះបានដោយ លប់ n លេខដេស៊ីមាល ចាប់ពីកណ្ដក់សញ្ញាទៅ

កំដូចគ្នាដែរ ការសិក្សាតម្លៃប្រហែល នៃលទ្ធផលលេខចែក(quotient de 2 nombres positifs) រវាងពីរចំនួន វិជ្ជមាន គឺពឹងផ្អែកទៅលើ វិសមភាព៖

$$0 < a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad \text{និង} \quad 0 < a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

ឲ្យ $\boxed{\frac{a_1}{b_2} \leq \frac{x_1}{x_2} \leq \frac{b_1}{a_2}}$ ដែលជាវិសមភាពមួយ ឲ្យតម្លៃប្រហែលនៃ $\frac{x_1}{x_2}$ ។

នៅទីបញ្ចប់ គេក៏អាចរកតម្លៃប្រហែល របស់ឬសការេនៃ ចំនួនដេស៊ីមាល ដោយ

សង្កេតនូវ វិសមភាព ៖

$0 < a \leq x \leq a + \varepsilon$ ផ្តល់ឲ្យ ៖ $\boxed{\sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{a} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}}$

ពីព្រោះ $a + \varepsilon = a\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right) \Rightarrow$

$$(a + \varepsilon)^{1/2} = a^{1/2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^{1/2} = a^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}.\frac{\varepsilon}{a} + 0\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)\right] \cong \sqrt{a} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}$$ [4]

តែជាទូទៅ ផលចែក ឬ ឬសការេនៃ ចំនួនដេស៊ីមាល មិនមែនជាចំនួន ដេស៊ីមាលទេ ។ បើយើង ចង់តែប្រើការតាងដោយដេស៊ីមាលនោះ យើងត្រូវតែសិក្សាអំពី <u>តម្លៃ**ដេស៊ីមាល**ប្រហែល</u> នៃផលចែក ឬ ឬសការេ (les valeurs décimales approchées des quotients et des racines carrées) ។ ហើយការនេះក៏នាំឲ្យយើង ចូលទៅដល់ « ***ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់*** » (développements décimaux illimités) ។

[4] ចំពោះ $m \in Q$, $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n)$