1. រង្វាស់ និង តម្រុយ នៃ ទំហំ (Mesure et repérage des grandeurs).

ដូចជាខាងធរណីមាត្រ ធ្វើឲ្យអ្នកគណិតសាស្ត្រជាតិក្រេច (les mathématiciens grecs) ទទួលថាមាន រឺសការេ នៃចំនួនវិជ្ជមានជាទូទៅ ។ ការបញ្ចូល និមិត្តរូប (symbole) √ តំណាង រឺសការេ អាចវាស់ប្រវែងអង្កត់ទាំងឡាយ ដែលគេគូរ ដោយ បន្ទាត់ និង ដែកឈាន (par la règle et le compas) ដោយគេយក <u>អង្កត់ណាមួយ ជាខ្នាត</u>។ តែ និមិត្តរូបទាំងនោះ មិនអាចឲ្យ « តម្លៃ » ទៅ ប្រវែងរង្វង់ ដែលមានកាំ ស្មើនឹង ១ ឬក៏ផ្ទៃក្រឡាដែលរង្វង់នោះព័ទ្ធជុំវិញឡើយ។ គេអាចបង្ហាញថា « ចំនួន » π មិនមែនជា រឺសការេ នៃចំនួន សនិទានណាមួយ ទេ ហើយក៏មិនមែនជា ចម្លើយ នៃសមីការពហុធា ដែលមានមេគុណ ជាចំនួនគត់ដែរ ។

ជាទូទៅ ចំណោទក្នុងការវាស់ទំហំ នាំឲ្យយើងបញ្ចូលនូវ «ចំនួន » ដែលយើងពុំច្បាស់ថាជាចំនួន សនិទាន ឬ ក៏ជាចំនួនពីជគណិត។ តែចំពោះចំណោទនេះ   យើងក៏ត្រូវបោះបង់ចោល នូវគំនិតដំបូង ដែលគិតថា ជា « រង្វាស់ » **ត្រឹមត្រូវ** (mesure exacte)[1] ។ សញ្ញាណ ទំហំ ជាសញ្ញាណដែលយើងដឹងមិនបាច់ពិចារណា ព្រោះយើងជួបប្រទះនឹងសញ្ញាណនេះ ក្នុងជីវិតរស់នៅសព្វថ្ងៃ ដូចជា ៖ ប្រវែង ចំណុះ ទម្ងន់ ពេល កំដៅ ល្បឿន កម្លាំង   ចរន្តអគ្គីសនី....។ល។ ដោយពុំចង់ដាក់ជាស្វ័យស័ត្យ (axiome) យើងអាចសន្មត ថាអាចប្រៀបធៀប នូវទំហំទាំងឡាយ <u>ដែលមានប្រភេទដូចគ្នា</u> ហើយយើងក៏មានសញ្ញាណថាទំហំក៏អាចផ្លះប្តូរជាប់ជាបន្តៗទៅ[2] (grandeur variant continûment)។ គេថាទំហំទាំងឡាយ នៃប្រភេទណាមួយ «វាស់បាន » (mesurable) បើកាលណាគេអាចបូក ទំហំនោះ ។ ហើយវិធីបូក ត្រូវ បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌដូចតទៅ ៖

---

[1] ហេតុនេះហើយ បានជាមានពាក្យ « រង្វាស់ » **ប្រហែល**

[2] ដូចយ៉ាង កំដៅ ធាតុអាកាសផ្លាស់ប្តូរជាប់តៗគ្នាជានិច្ច។

១-វិធីបូក មានលក្ខណៈត្រលប់ (commutative) និង លក្ខណៈផ្តុំ (associative) បានន័យថា គេអាចបូកទំហំច្រើន ដោយតាមលំដាប់ដែលគេចង់

២-វិធីបូក មានធាតុនប៉ុសកលិគ្គ (élément neutre) ហៅថា **ទំហំសូន្យ**

៣- ទំនាក់ទំនង $A \geq B$ មានន័យដូចគ្នានឹងថា៖ មានទំហំ C ដែលឲ្យ $A = B+C$ (បានន័យថា ទំហំ សូន្យ ជាទំហំ តូចជាងគេបំផុត)

៤- ទំនាក់ទំនង $A + B = A + C \Rightarrow B = C$ (អាចឲ្យន័យដល់ $A - B$ កាលណា $A \geq B$) ។

ដូច្នេះ គេអាច ឲ្យអត្ថន័យ ដល់ ទំហំ nA (ចំពោះ ចំនួនគត់ n ប៉ុន្មានក៏ដោយ) គឺ ជាផលបូក n ដង នៃទំហំ A ។

ទំនាក់ទំនង $A \geq B \Rightarrow nA \geq nB$ ហើយ ចំពោះ $n \geq p$ $(n,p \in N)$, $nA \geq pA$ ។

ដើម្បី វាស់ ទំហំមួយ គេចាប់រើសយក ទំហំខុសពីសូន្យ មានប្រភេទដូចគ្នានឹងទំហំដែលត្រូវវាស់ ទំហំនោះគេហៅថា « **ឯកតា** » (unité) ។ បន្ទាប់មកគេចាប់ ព័ទ្ធ ទំហំដែលវាស់នោះ ដោយពីរ ចំនួនគត់បន្ទាប់គ្នា បានមកដោយប្រើ« ឯកតា » គឺថា ៖

បើ X ជាទំហំត្រូវវាស់ និង U ជាឯកតា នោះ (U,X) ត្រូវ បំពេញ វិសមភាព ៖

$$nU \leq X < (n+1)U$$

គេថាចំនួនគត់ n ជា <u>រង្វាស់ប្រហែល</u> ខ្វះ[3] នៃទំហំ X (n est la mesure approchée par défaut de la grandeur X) ។ តែ រង្វាស់ប្រហែលនោះមាន បើសិន ក្នុងចំណោមចំនួន n ទាំងឡាយដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $nU \leq X$ នោះ មានចំនួន M មួយធំជាងគេ ។

[3] រង្វាស់ប្រហែលខ្វះ គឺ ខ្វះត្រឹម មួយ ឯកតា

ដូច្នេះយើងត្រូវសន្មត ថា ទំហំដែលមានរង្វាស់ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង សម្មតិកម្ម (hypothèse) ដែលយើងនឹងឃើញ ទៅពេលខាងមុខ **§9** ហៅថា **ស្វ័យស័ត្យ អារស៊ីម៉ែត** [4](Axiome d'Archimède) ។ សម្មតិកម្ម (hypothèse) នោះដូចតទៅ ៖

« ចំពោះ គូ (U,X) នៃទំហំណាក៏ដោយ ឲ្យតែមានប្រភេទដូចគ្នា ហើយ U ខុសពីសូន្យ នោះគេមានចំនួនគត់ p ដែលឲ្យ $pU > X$ » ។

ម្យ៉ាងទៀត រង្វាស់ប្រហែល ដែលបាននោះ កាន់តែត្រឹមត្រូវ កាលណា ឯកតា U កាន់តែតូច ៖ នេះនាំឲ្យយើងប្តូរយក ឯកតាថ្មី ដែលជាប្រភាគនៃ ឯកតាចាស។ តែយើងក៏ត្រូវសន្មតថាចំពោះចំនួនគត់ p ($p \geq 2$) គេចេះចែក <u>ទំហំដែលអាចវាស់បាន</u> នោះ (grandeur mesurable) ជា p ចំណែកគត់តែម្តង ។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា ទំហំដែលអាចវាស់បាន ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង «**ស្វ័យស័ត្យនៃការចែក** » (axiome de division) ដែលនឹងថ្លែងនៅ **§9** ។ ហើយយើងនឹងឃើញនៅ §10 ថា ដោយស្វ័យស័ត្យទាំងនេះ តាមទ្រឹស្តី គេអាចឲ្យអត្ថន័យ អំពី<u>រង្វាស់</u> ត្រឹមត្រូវ នៃ <u>ទំហំដែលអាចវាស់បាន</u> (la mesure exacte d'une grandeur mesurable) ។

តែក្នុងការប្រតិបត្តិ ទោះជាទំហំអាចវាស់បានក្តី មិនអាចវាស់បានក្តី គេច្រើនតែប្រើកុងទ័រ (compteurs) ក្នុងការវាស់ លទ្ធផលរូបសាស្ត្រ (effet physique) នៃទំហំទាំងនោះ (ដូចជា ដែករីកដោយកំដៅ ការយឺតនៃរ៉ឺស្ស័រ កំពស់ទឹកឡើងចុះ ។ល។) ។ ទ្រនិចរតចុះឡើងមុខផ្ទាំងលេខ ឬ លើបន្ទាត់ដែលចែកជាឯកតា ក៏អាចវាស់ទំហំបានដែរ ។ បើទំហំនោះវាស់មិនបាន គេដាក់តម្រុយ ដៅចំណាំ (repérage)៖ ចំពោះ ទំហំ នៃប្រភេទ

[4] សេចក្តីស្នើ (proposition) មិនអាចបង្ហាញបាន ដែលត្រូវតែទុកជាត្រូវ។

ដែលគេសិក្សា គេផ្គូជាមួយនឹងចំនួន (ជាលេខ) ដែលកើន ជាមួយនឹងទំហំនោះ ហើយគេនៅតែហៅ (ដោយមិនចំ)ថាជា «រង្វាស់ » ដដែល ។

តែទុកជាប្រើប្រដាប់វាស់ល្អយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏គេពុំអាចថា ការដៅចំណាំទំហំនោះ **បានត្រឹមត្រូវនោះទេ ៖ ព្រោះថា ម្ជុលដែលចង្អុល លេខនោះ ក៏វាមានកម្រាស់ដែរ ហើយ** គំនុស បើធ្មារខ្វាំងពេកនោះ ក៏មើលមិនឃើញដែរ។ ហើយមួយទៀត មានកម្លាំងធម្មជាតិបន្ទាប់បន្សំមកចូលលាយឡំជាមួយ ដែលតម្រូវឲ្យកែរតែយើងក៏ដឹងមិនច្បាស់ដែរ ។ រួមសេចក្ដីទៅ យើងគ្រាន់តែបាន រង្វាស់ប្រហែលៗ នឹងរង្វាស់ត្រឹមត្រូវ នៃ ទំហំក្នុងធម្មជាតិ ។

តែដោយចិត្តមនុស្ស ស្រឡាញ់ភាពល្អឥតខ្ចោះ ចាប់ជឿថាមាន រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ ដែលគេអាចរកបាន បើសិនគេអាចបង្កើតគ្រឿងប្រដាប់វាស់ត្រឹមត្រូវឥតខ្ចោះ។ ដោយយើងពុំទាន់រកបាននូវ គ្រឿងប្រដាប់វាស់ត្រឹមត្រូវឥតខ្ចោះនោះនៅឡើយ យើងអាចស្រម័យថា រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ ជា លីមីតរួម នៃ រង្វាស់ប្រហែលទាំងឡាយ ដែលបានដោយ គ្រឿងប្រដាប់វាស់កាន់តែត្រឹមត្រូវទៅៗ រហូតដល់ត្រឹមត្រូវជាដាច់ខាត(la précision tendrait à être absolue) ។ ដើម្បីប្រឌិត សញ្ញាណអរូបី (notion abstraite) នៃរង្វាស់ត្រឹមត្រូវ គេត្រូវបំភ្លេច បត្តិភូតិទាំងឡាយ ដែលមកធ្វើឲ្យចំណោទនេះកាន់តែពិបាក ។

ចំពោះគណិតសាស្ត្រ រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ របស់ទំហំមួយ ជាគោលទាល់លើ (borne supérieure) នៃរង្វាស់ប្រហែលខ្វះទាំងឡាយ (de ses valeurs approchées par défaut) និងជាគោលទាល់ក្រោម (borne inférieure) នៃរង្វាស់ប្រហែលលើស[5] ទាំងឡាយ (de ses valeurs approchées par excès)

$$\text{រង្វាស់ប្រហែលខ្វះ} \leq \text{រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ} \leq \text{រង្វាស់ប្រហែលលើស}$$

[5] រង្វាស់ប្រហែលលើស គឺ លើស យកត្រឹមមួយឯកតា

រី បើនិយាយជាស៊ីត បើគេតាងដោយ ៖

(x_n) : ស៊ីត នៃ រង្វាស់ប្រហែលខ្វះ ទាំងឡាយ ដែលបានមកដោយប្រើ គ្រឿងវាស់ កាន់តែប្រណីតឡើងៗ

(x'_n) : ស៊ីត នៃ រង្វាស់ប្រហែលលើស ទាំងឡាយ ដែលបានមកដោយប្រើ គ្រឿងវាស់ កាន់តែប្រណីតឡើងៗ

នៅពេលនោះ x រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ គឺជា <u>ចំនួនតែមួយ</u> ដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង $x_n \leq x \leq x'_n$, $\forall n$។ ហើយបើមើលតាមអរូបី (du point de vue abstrait)ស៊ីតទាំងពីរ (x_n) និង (x'_n) ជាស៊ីតនៃចំនួន សនិទាន វិជ្ជមាន ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង លក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ ៖

1° $\forall n$, គេបាន : $x_n \leq x_{n+1} < x'_{n+1} \leq x'_n$ (1)

2° ផលសង : $x'_n - x_n$ ខិតជិត សូន្យ ។

យើងគួរសួរដែរ ថាតើ (1) នេះបានមកពីណា ? ដើម្បីយល់ យើងមើលនិយមន័យ

- ស៊ីត (x_n) ខាងលើ យើងឃើញថា x_n ជារង្វាស់ប្រហែល <u>តូចជាង</u> រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ តែដោយគ្រឿងវាស់កាន់តែប្រណីត x_n កាន់តែឡើងទៅជិតតម្លៃត្រឹមត្រូវ x ដូច្នេះ (x_n) ជាស៊ីតកើន ។
- ចំណែក ស៊ីត (x'_n) វិញ យើងឃើញថា x'_n ជារង្វាស់ប្រហែល <u>ធំជាង</u> រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ តែដោយគ្រឿងវាស់កាន់តែប្រណីត x'_n កាន់តែចុះទៅជិតតម្លៃត្រឹមត្រូវ x ដូច្នេះ (x'_n) ជាស៊ីតចុះ ។

ដើម្បីតាង រង្វាស់ត្រឹមត្រូវ ដោយចំនួន នោះត្រូវតែពង្រីក សញ្ញាណចំនួន ដែលធ្វើឲ្យ « **សំណុំ** ដែលមានតំលៃដំឡើងនោះ ត្រូវទទួលថា មានគោលទាល់លើ » (Il faut donc étendre la notion de nombre de manière que tout ensemble majoré admette une borne supérieure) ឬក៏ថា ស្វ៊ីតទាំងគូ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង ល័ក្ខខ័ណ្ឌ **1°** និង **2°** អម «ចំនួន » យ៉ាងតិចណាស់មួយ (encadre au moins un nombre) ។ យើងនឹងឃើញ ល័ក្ខខ័ណ្ឌនេះ នៅ §9 ក្រោមឈ្មោះថា **ស្វ័យស័ត្យ កង់ទ័រ** (axiome de Cantor) ។

ចំនួន ដ៏ទូលំទូលាយទាំងឡាយដែល (les nombres généralisés) បានដោយ របៀបខាងលើនេះ សព្វថ្ងៃគេហៅថា **ចំនួនពិត** ។ សំនុំនៃចំនួននេះ គេតាងដោយ អក្សរ R ហើយ ហៅថា បន្ទាត់នៃចំនួន (droite numérique)។

ដើម្បីស្គាបនាចំនួនពិត របៀបដែលស្របទៅនឹងកំរិតថ្នាក់ទី ១២ គឺ របៀបដោយប្រើ « **ការពង្រីកដេស៊ីមាលដោយគ្មានទីបញ្ចប់** » (développements décimaux illimités) ។