លំហាត់

IV-7. នៅក្នុងស្បោង មួយ មាន ប៊ូល 10 មានលេខ ពី 1 ទៅ 10។ គេ យកប៊ូលមួយ ចេញមក គេកត់លេខវា ហើយ គេដាក់ប៊ូលនោះចូលក្នុង ស្បោងវិញ ទើប គេយក ប៊ូលមួយ ចេញមកទៀត ហើយគេកត់លេខវា ដូចលើកទី១ដែរ ។

1/ ចូរ រក ប្រូបាប ដើម្បី ឲ្យ y ដែលជា ផលបូក នៃ លេខរបស់ ប៊ូលទាំង ពីរ ស្មើនឹង ចំនួន x ដែល គេឲ្យ ។

2/ គូក្រាប ដោយ ដាក់នៅ អាប់ស៊ីស ចំនួន x ហើយ ដាក់នៅ អរដោនេ ចំនួន y ។

3/ ចូរ ពន្យល់ថា ហេតុអ្វី ក៏ ក្រាបនោះ ឆ្លុះ ធៀបនឹង បន្ទាត់ $x = 11$ ។

<u>ពន្យល់និង ចម្លើយខ្លះ</u>

ដោយប៊ូល មាន 10 ពីលេខ 1 ទៅលេខ 10 ហើយគេ ទាញយក២លើក ដោយដាក់ ប៊ូល ទៅក្នុងស្បោងវិញ មុននឹងទាញយកប៊ូលទី២ ។ ឧបមា យើង តាងដោយ x_1 លេខរបស់ប៊ូលទី១ និង x_2 លេខរបស់ប៊ូលទី២ នោះ <u>ចំនួនករណី អាច</u> មាន $10 \times 10 = 100$ ពីព្រោះ x_1 ក៏ដូច x_2 អាចយក លេខ ពី 1 ទៅ 10 ដូចគ្នា ។

ដោយ $x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ ដើម្បី រក ចំនួនករណី ស្រប និង ប្រូបាប y យើងអាច ធ្វើ តារាង ដូចខាងក្រោមនេះ ដោយសង្កេតថា $2 \le x \le 20$ ក្រៅពីនេះ $y = 0$ ៖

x	ករណីស្រប	ចំនួនស្រប	y		x	ករណីស្រប	ចំនួនស្រ	y
1	0	0	0		12	(10,2), (9,3),(8,4), (7,5), (6,6) ,..	9	9/100
2	(1,1)	1	1/100		13	(10,3), (9,4), (8,5),(7,6), …	8	8/100
3	(1,2), (2,1)	2	2/100		14	(10, 4), (9,5), (8, 6), (7,7),..	7	7/100
4	(1,3), (2,2),(3,1)	3	3/100		15	(10,5), (9,6), (8, 7), (7, 8), ..	6	6/100
5	(1,4),(2,3),(3,2), …	4	4/100		16	(10,6), (9,7), (8,8), …	5	5/100

6	(1,6), (2,4), (3,3), ..	5	5/100		17	(10,7), (9,8), ..	4	4/100
7	(1,7), (2,5), (3,4), ..	6	6/100		18	(10, 8), (9, 9), (8,10)	3	3/100
8	(1,7), (2,6), (3,5), ..	7	7/100		19	(10,9), (9, 10)	2	2/100
9	(1,8), (2,7), (3, 6),	8	8/100		20	(10, 10)	1	1/100
10	(1, 9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), ..	9	9/100					
11	(1, 10), (2,9), (3,8),(4,5), (5,6), (6,5), ….	10	10/100					

<u>*តារាងអថេរ (tableau de variation)*</u>

ដើម្បី នឹងគូក្រាប យើង ធ្វើ តារាងអថេរ នៃ អនុគមន៍ $y = f(x)$ *។ ដោយប្រើ តារាងនេះ យើង អាចកំណត់ អនុគមន៍* f *បាន ។*

x	1	2	10	11	12		20 21
y	0	1/100	9/100	10/100	9/100		1/100 0

តារាង អថេរ នេះ បានមកពី តារាង ខាងលើ ដែល មាន ចំនួន x *និង* y *ហើយនិង ករណី ស្រប និង ចំនួន ស្របៗ ចំពោះ ករណីស្រប បើ* (x_1, x_2) *ជា ករណីស្រប នោះ* (x_2, x_1) *ក៏ជា ករណីស្របដែរ ពីព្រោះ លេខបូក មានលក្ខណៈ ត្រលប់ គឺថា បើ* $x = x_1 + x_2$ *នៅពេលនោះ ក៏* x *ស្មើនឹង* $x_2 + x_1$ *ដែរ ។ មានន័យថា មានករណីស្រប យ៉ាងហោច២ បើកាលណា* $x_1 \neq x_2$ *។ នៅក្នុង តារាងខាងលើ ខ្ញុំមិនបាន សរសេរ ករណីស្រប ទាំងអស់ទេ តែចំពោះ ចំនួនស្រប នោះ ត្រឹមត្រូវហើយ ។*

ដោយ ករណីស្រប យើងបាន ឲ្យ x គ្រប់ចំនួន ដែល x អាចយក នោះប្រូបាប ទាំងអស់ នៅក្នុង តារាង នេះ បើយើង បូក ទាំងអស់ទៅ ត្រូវ ស្មើ នឹង 1 ។ ចូរពិនិត្យ ដោយខ្លួនឯងទៅ ។ ដល់ គូក្រាបបានហើយ នោះយើងនឹងឃើញថា បន្ទាត់ ពីរ មាន រៀង ដូច តារាង អថេរដែរ ។ យើងអាច បញ្ជាក់ ការសង្កេតនេះ ដោយ រក សមីការ នៃ បន្ទាត់ ទាំងពីរនោះ ដូច តទៅ ៖

យើងដឹងហើយថា សមីការ នៃបន្ទាត់មាន ទម្រង់ $y = ax + b$។ ហើយ បើយើងដឹង កូអរដោនេ នៃ ពីរ ចំណុច A និង B នោះយើងអាច រក a និង b នៅក្នុង សមិការ នេះបាន ។

<u>a / សមីការ $y = ax + b$ ចំពោះ $1 \le x \le 11$</u>

យើងយក ចំណុច $A(1, 0)$ និង ចំណុច $B(10, 9/100)$

$y = ax + b$ => ចំពោះ ចំណុច $A(1, 0)$ យើងបាន ៖ $0 = a + b$ => $a = -b$

ចំពោះ ចំណុច $B(10, 9/100)$ យើងបាន ៖ $9/100 = 10a + b$ =>

$9/100 = 10a - a = 9a$ => $a = 1/100$ និង $b = -1/100$ ។ ដូច្នេះ $y = \frac{1}{100}(x - 1)$ (F1)

យើងឃើញថា ចំណុច $C(11, 10/100)$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹង សមីការ (F1) នេះដែរ ។

<u>b / សមីការ $y = ax + b$ ចំពោះ $12 \le x \le 21$</u>

យើងយក ចំណុច $D(12, 9/100)$ និង ចំណុច $E(20, 1/100)$

$y = ax + b$ => ចំពោះ ចំណុច $D(12, 9/100)$ យើងបាន ៖

$9/100 = 12a + b$ => $b = -12a + \frac{9}{100}$

ចំពោះ ចំណុច $E(20, 1/100)$ យើងបាន ៖

$1/100 = 20a + b$ => $b = -20a + \frac{1}{100}$

$-12a + \frac{9}{100} = -20a + \frac{1}{100}$ =>

$a = -\frac{1}{100}$ ហើយ $b = \frac{21}{100}$

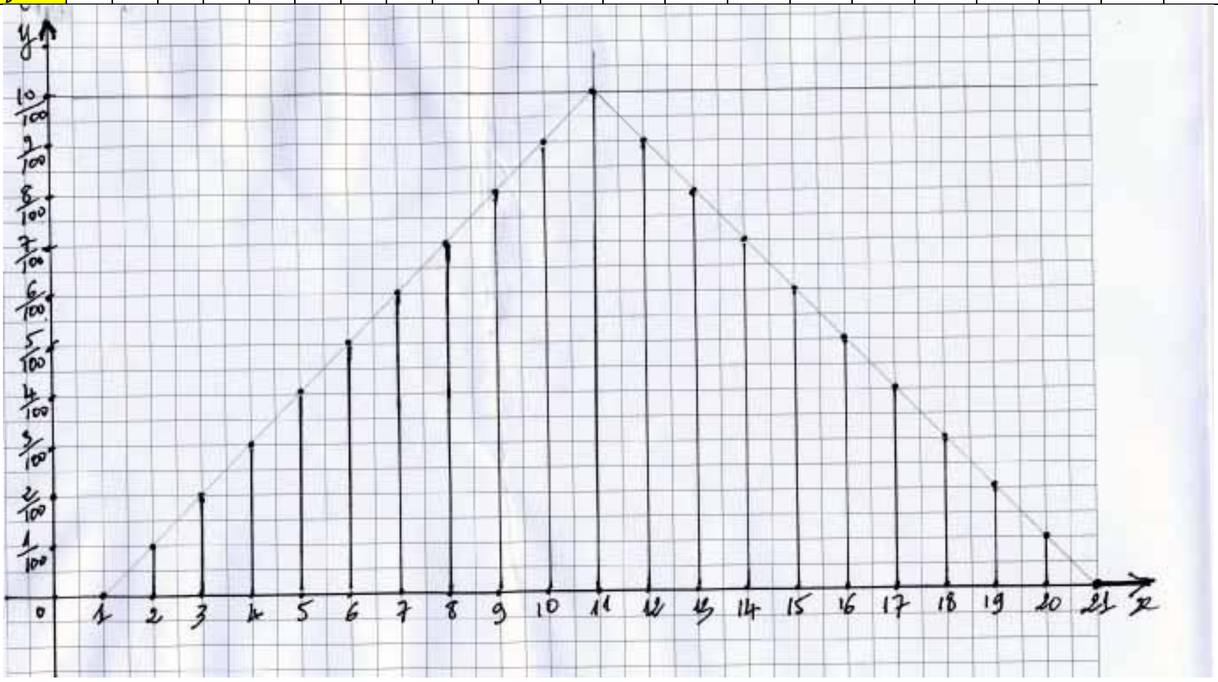
ដូច្នេះ $y = \frac{1}{100}(-x + 21)$ (F2)

ដូច្នេះ ច្បាប់ប្រូបាប នៃ ព្រឹត្តការណ៍នេះ ជា អនុគមន៍ f កំណត់ ដូចតទៅនេះ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}(x-1) & \text{បើ } 1 \le x \le 11 \\ \frac{1}{100}(-x+21) & \text{បើ } 12 \le x \le 21 \\ 0 & \text{ក្រៅពីនោះ} \end{cases}$$

មុននឹងគូ ក្រាប នៃ អនុគមន៍ f យើង ស្រង់ ដាក់ក្នុង តារាងខាងក្រោមនេះ នូវ តម្លៃ អថេរ x និង ប្រូបាប y ដែលស្របជាមួយ ដែលមានក្នុង តារាង មាន ករណីស្រប ៖

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
y'[1]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0



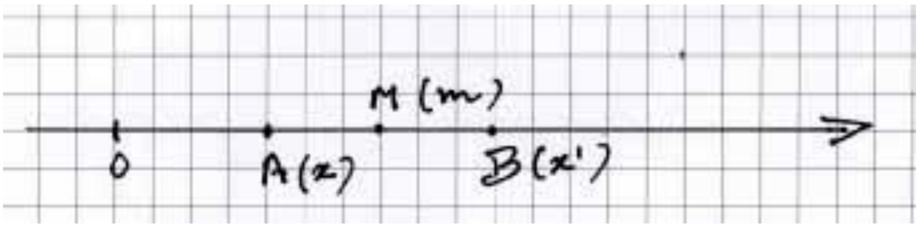
នេះ គឺ <u>ដ្យាក្រាមជាដំបង</u> (*diagramme en bâtons*) នៃច្បាប់ ប្រូបាបខាងលើ ។

យើងសង្កេតឃើញថា បន្ទាត់ $x = 11$ បន្ទាត់ឆ្លុះ នៃ ដ្យាក្រាមនេះ។ ដើម្បីនឹងបង្ហាញ ថា បន្ទាត់ $x = 11$ ជាបន្ទាត់ឆ្លុះនៃ ដ្យាក្រាម យើងប្រើ រូបមន្ត ដូចតទៅ ៖

---

1 ដោយ $y = y'/100$

បើចំណុច $M(m,0)$ មាន កូអរដោនេ $(m,0)$ បើនៅកណ្ដាល ចំណុច $A(x,0)$ និង $B(x',0)$ នោះគេបាន $m = \frac{x+x'}{2}$



យើបាន $x + x' = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OM} + \overline{MA} + \overline{OM} + \overline{MB} = 2\,\overline{OM} = 2m$ (ពីព្រោះ $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$) => $m = \frac{x+x'}{2}$ ។ គេថា អាប់ស៊ីស នៃចំណុចកណ្ដាល ស្មើនឹង ពាក់កណ្ដាល ផលបូក នៃ អាប់ស៊ីស នៃចំណុចទាំងពីរ ខាងចុង ។ ដើម្បីបង្ហាញថា ដ្យាក្រាម ឆ្លុះ ធៀប នឹងបន្ទាត់ $x = 11$ យើងយក ចំណុចពីរ លើដ្យាក្រាម ៖

ចំណុចទី១ មានអាប់ស៊ីស $x1 \le 11$ => $f(x1) = \frac{1}{100}(x1-1)$

ចំណុចទី២ មានអាប់ស៊ីស $x2 \ge 11$ => $f(x2) = \frac{1}{100}(-x2+21)$

ដើម្បី ចំណុច ទាំងពីរ ឆ្លុះ គ្នា ទៅវិញទៅមក ទាល់តែ យ៉ាងហោច មាន កំពស់ ស្មើគ្នា គឺ

$f(x1) = f(x2) \Leftrightarrow \frac{1}{100}(x1-1) = \frac{1}{100}(-x2+21)$ =>

$x1 - 1 = -x2 + 21$ => $x1 + x2 = 22$ => $\frac{x1+x2}{2} = 11$ ។ ដោយ $x = 11$ ជាបន្ទាត់ ឆ្លុះ ដូច្នេះ ដោយរូបមន្ត ស្ដីពីចំណុច កណ្ដាលខាងលើនោះ យើង អាចសន្និដ្ឋានថា ដ្យាក្រាមជាជំបង នេះ ឆ្លុះ ធៀបនឹង បន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x = 11$ ។

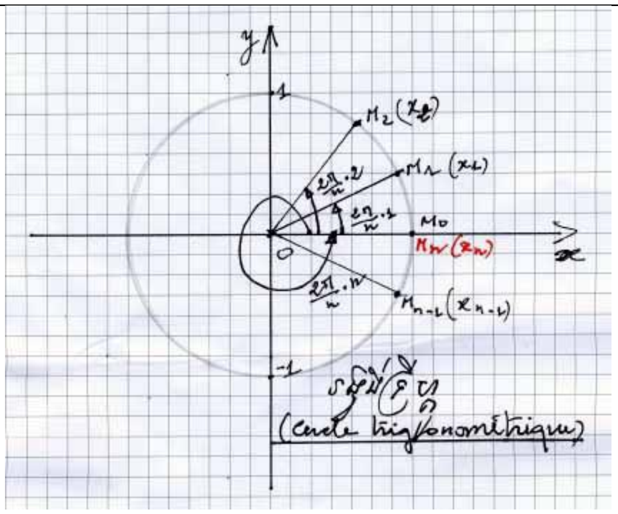
IV-8. គេឲ្យស៊ីត $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ ដែលមាន n ជាតុ ខុសគ្នាទាំងអស់ ។ គេហៅថា ពែមុតាស្យុងរង្វង់មូល (permutation circulaire) នៃស៊ីតនេះ គឺ ជា ពែមុតាស្យុង p កំណត់ដោយ $p(x_k) = x_{k+1}$ ចំពោះ $k < n$ ហើយ $p(x_n) = x_1$ ។

1/ ចូរបង្ហាញថា ផលគុណ p^n នៃ n ពែមុតាស្យុងរង្វង់មូល ជា បំផ្លែងឲ្យដដែល តាងដោយ អក្សរ I (transformation identique) ។ ដោយហេតុនេះ ចូរបង្ហាញថា ពែមុតាស្យុង $I, p, p^2, p^3, \ldots\ldots, p^{n-1}$ ផ្សំបានជា គ្រុបរងមួយ (un sous – groupe) នៃ គ្រុប នៃពែមុតាស្យុងទាំងឡាយ ទៅលើសំនុំ $E = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ ។

2/ ចំពោះ តួ x_k មួយ គេបានចំណុច M_k មួយ នៅលើ រង្វង់ ទ្រីហ្គូ មួយ (cercle trigonométrique) [មាន ផ្ចិត o និង កាំ $OM_k = 1$] កំណត់ដោយ $\widehat{Ox, OM_k} = \frac{2k\pi}{n}$ ៖ ដូច្នេះ គេបាន ការអនុវត្តន៍ ប៊ីសេចទីវ មួយពី E ទៅលើ ប៉ូលីហ្គូនស្មើជ្រុង មាន n ជ្រុង (polygone régulier de n côtés)។ ចូរបង្ហាញថា ពែមុតាស្យុង p^k (ផលគុណនៃ k ពែមុតាស្យុងរង្វង់មូល) ក៏ដូចជា ដំណើរវិល នៅលើរង្វង់ទ្រីហ្គូ ពីចំណុច M_i ទៅចំណុច M_{i+k} ដោយមុំ $\frac{2k\pi}{\text{n}}$ (une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{\text{n}}$ des sommets du polygone) ។

<u>ពន្យល់ និង ចម្លើយខ្លះ</u>

<u>Fig-1</u>



$x_1 \to M_1 \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n} \times 1$

$x_2 \to M_2 \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_2}) = \frac{2\pi}{n} \times 2$

$x_3 \to M_3 \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_3}) = \frac{2\pi}{n} \times 3$

. . . .

$x_{n-1} \to M_{n-1} \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_{n-1}}) = \frac{2\pi}{n}(n-1)$

$x_n \to M_n \to (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_n}) = \frac{2\pi}{n} \times n = 2\pi$

មុនដំបូង យើងត្រូវយល់ថាអ្វីទៅ ពែមុតាស្យុងរង្វង់មូល គឺ ពែមុតាស្យុង វិលមករក ធាតុដើមវិញ ។ ឧបមា $n = 4$ ហើយ យើងយកស៊ីត ៖ 2, 4, 6, 8 ។ ដូច្នេះ ពែមុតាស្យុង

វង្វង់មួល p លើស៊ីតនេះ គឺ ៖ $p(2) = 4$; $p(4) = 6$; $p(6) = 8$; $p(8) = 2$ ។ ដូចយើង វត់ ពី បង្គោល លេខ 2 ទៅ ដល់ បង្គោល លេខ 4 ។ ហើយចេញពីលេខ 4 ទៅ លេខ 6 ។ ហើយចេញពី លេខ 6 ទៅ លេខ 8 ។ ហើយចេញពី លេខ 8 ត្រលប់មកលេខ 1 វិញ។ ដូច្នេះ វត់ មួយថ្ងៃវាល់ល្ងាច នៅតែវិល វល់ នៅតែមួយកន្លែង ។ យើងអាចទុក p ជាអនុគមន៍ កំណត់ ពី ស៊ីត ទៅ ស៊ីត ដដែល គឺថា ៖

$2 \to p \to 4 - p \to 6 \to p \to 8 \to p \to 2$ ឬ $p(p(p(p(2)))) = p(p(p(4)))$ ឬ

$p(p(p(4))) = p(p(6))) = p(8) = 2 = I(2)$ => $p^4 = I$ ។

<u>a/ យើងត្រូវបង្ហាញ $p^n = I$</u> ដោយ p មានល័ក្ខខ័ណ្ឌ $p(x_k) = x_{k+1}$ ចំពោះ $k < n$ ហើយ $p(x_n) = x_1$ (C1) ។

$p^n = I$ <=> $p^n(x_1) = x_1$ ។

ដើម្បីបង្ហាញ យើង បង្ហាញ ដោយ រ៉េគារ៉េង់ លើ n ៖

$p(x_1) = x_2$ => $p(p(x_1)) = p(x_2)$ ឬ $p^2(x_1) = x_3$ => យើងឃើញថា ស្វ័យគុណ 2 នៃ p^2 បូកនឹង សន្ទស្សន៍ (indice) 1 នៃ x_1 ស្មើនឹង សន្ទស្សន៍ (indice) 3 នៃ x_3

ដូច្នេះ យើង តាង រូបមន្ត មួយថា ៖

$p^n(x_1) = x_{n+1}$ (F1)

ដោយរូបមន្តនេះត្រូវ ចំពោះ $n = 2$ ពីព្រោះ $p^2(x_1) = x_3$ យើងសន្មតថា (F1) ត្រូវចំពោះ p^n (ស៊ីត មាន n តួ)ហើយយើងត្រូវបង្ហាញ ថា p^{n+1} (ស៊ីត មាន $n+1$ តួ) ក៏ត្រូវដែរ។

ដោយ (F1) $p^n(x_1) = x_{n+1}$ => $p(p^n(x_1)) = p(x_{n+1})$ ឬ $p^{n+1}(x_1) = p(x_{n+1})$

ដោយ $n + 1$ ជាចំនួន តួ ទាំងអស់នៃស៊ីត ដូច្នេះ $p(x_{n+1}) = x_1$ តាមលក្ខខណ្ឌ នៃ p ។

ដូច្នេះ $p^{n+1}(x_1) = x_1$ <=> $p^{n+1} = I$ ។

b/ ចូរបង្ហាញថា ពៃមុតាស្យុង $I, p, p^2, p^3, \ldots\ldots, p^{n-1}$ ផ្សំបានជា គ្រុបរងមួយ $(un\ sous-groupe)$ នៃគ្រុប នៃពៃមុតាស្យុងទាំងឡាយ ទៅលើសំនុំ $E = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$

សូមរំលឹកឡើងវិញ អំពីនិយមន័យ របស់ គ្រុបរង (sous-groupe)

គេថា បំណែក H មួយនៃ គ្រុប G គាត់តែងផ្សំបានជា « គ្រុបរង » បើ ៖

1°/ $x \in H \;\Rightarrow\; x^{-1} \in H$

2°/ $x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$ ។

នៅទីនេះ $H = \{ I, p, p^2, p^3, \ldots\ldots, p^{n-1} \}$ ហើយ $E = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$

ត្រូវបង្ហាញថា ៖ $x \in H \;\Rightarrow\; x^{-1} \in H$

យើងយក $p^k \in H$ ដោយ $1 \le k \le n-1$ និង $p^n = I$

ដើម្បីរក ធាតុឆ្លុះ $p^l \in H$ របស់ ធាតុ p^k យើងប្រើនិយមន័យ គឺ

$p^l \in H$ ជាធាតុ ឆ្លុះ របស់ ធាតុ $p^k \in H \iff p^l p^k = p^k p^l = I$

$p^l p^k = I \Rightarrow p^l p^k = p^n \Rightarrow p^{l+k} = p^n \Rightarrow l + k = n \Rightarrow l = n - k$

ដោយ $n < n + (n-1)$ និង $1 \le k \le n-1$ $\Rightarrow$ $n - 1 \le n - k < n + (n-1) - (n-1)$ ឬ $n - 1 \le n - k < n \Rightarrow$

$1 \le n - k \le n - 1$ បើ $n \ge 2$ [2]។ ដូច្នេះ $p^{n-k} \in H$ ហើយឆ្លុះនឹង p^k ហើយ ដោយលេខបូកមានលក្ខណៈត្រលប់ $l + k = k + l$ នោះ

$p^l p^k = I = p^{l+k} = p^{k+l} = p^k p^l \Rightarrow p^k p^{n-k} = p^{n-k} p^k = I$ ។

ត្រូវបង្ហាញ ថា $x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$

យើងយក ធាតុពីរក្នុង H : $p^k \in H$ និង $p^l \in H$ តើ $p^k p^l$ នៅក្នុង H ទេ ?

---

[2] ដោយ $1 \le k \le n-1$ ដូច្នេះ បើ $n = 1$ នោះយើងបាន $1 \le k \le 0$ ដែលទៅមិនរួច ដូច្នេះ n ត្រូវតែ $n \ge 2$ ទើបស្របនឹង ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ។

យើងដឹងថា $p^k p^l = p^{k+l} = p^m$ ដោយ $m = k + l$ ។

បើ $1 \le m \le n-1$ នៅពេលនោះ $p^m \in H$ => $p^k p^l \in H$

បើ $m \ge n$ នៅពេលនោះ យើងធ្វើលេខចែក អឺគ្លីត នៃចំនួនគត់ យើងបាន

$m = nq + r$ ដោយ $r < n$ => $p^m = p^{nq+r} = (p^n)^q p^r = I^q p^r = p^r$

ដោយ $1 \le r \le n-1$ => ដូច្នេះ $p^r \in H$ => $p^m \in H$ <=> $p^k p^l \in H$ ។

ដោយ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $1°/$ និង $2°$ បំពេញហើយ ដូច្នេះ H គ្រុបរង។

<u>សំនួរ ទី២</u>

ចំពោះសំនួរ នេះ ចូរ មើលរូប រង្វង់ ទ្រីហ្គូ ខាងលើ ។ ត្រូវមើលប្រធានបទឲ្យយល់ គឺថា ៖ ចំពោះ ស្វីត ដែលមាន n ធាតុ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ នោះ គេឲ្យ ៖

$x_1 = \widehat{Ox, OM_1} = \frac{2\pi}{n} \times 1$ ដោយ M_1 ជាចំណុច នៅលើរង្វង់ ទ្រីហ្គូកំណត់ដោយ មុំ $\widehat{Ox, OM_1} = \frac{2\pi}{n} \times 1$ ។ ចូរសង្កេតថា ដើម្បីបាន $\frac{2\pi}{n}$ គេចែក រង្វង់ទាំងមូល ជា n ភាគស្មើគ្នា។ បើ យើងតាង M_0 ជាចំណុច លើរង្វង់ ដែលកាត់ដោយ អ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ នោះមុំ $\widehat{M_0 O M_1} = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n}$ ។ ត្រូវសង្កេតថា មុំ នីមួយៗ មាន អ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ ជាជ្រុង រួម ក៏ដូចជា M_0 ជាចំណុចរួម នៃធ្នូទាំងអស់ដែរ ។ ដើម្បី ឆ្លង ពីចំណុច មួយ ទៅ ចំណុច បន្ទាប់ គេអាចប្រើ ដំណើរវិល (Rotation) មានផ្ចិត O និង មុំ $\frac{2\pi}{n}$ ដែល យើងតាងដោយ $Rot(O, \frac{2\pi}{n})$ ។ ឧបមាដូចជា $M_0 - Rot(O, \frac{2\pi}{n}) \rightarrow M_1$ -$Rot(O, \frac{2\pi}{n}) \rightarrow M_2$ (Fig-2) ។

$M_0 \rightarrow Rot(O, \frac{2\pi}{n} \times 2) \rightarrow M_2$

នៅក្នុងចំណោទយើងនេះ $Rot(O, \frac{2\pi}{n})$ គឺ តាងដោយ p ពីព្រោះ ដោយ រូបភាព (Fig-1) ខាងលើ $p(x_k) = x_{k+1}$ <=> $p(M_k) = M_{k+1}$ ។គេចង់ឲ្យយើងបង្ហាញថា ពៃមុតាស្យុង (ពី M_h ទៅ M_{h+1}) ហើយ (ពី M_{h+1} ទៅ M_{h+2}) ហើយ (ពី M_{h+2} ទៅ M_{h+3}).. ...... ហើយ (ពី M_{h+k-1} ទៅ M_{h+k}) នោះស្មើនឹង $Rot(O, \frac{2\pi}{n} \times k)$ ពី M_h ទៅ M_{h+k} ។ គឺថា $p^k = Rot(O, \frac{2k\pi}{n})$ ។ ដោយ

$\frac{2k\pi}{n} = \left(\frac{2\pi}{n}\right)k = \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} + \ldots\ldots + \frac{2\pi}{n}$ (k ដង) ដូច្នេះ

$$Rot(O,\frac{2k\pi}{n})\,(M_h) = [Rot(O,\frac{2\pi}{n})\circ Rot(O,\frac{2\pi}{n})\circ Rot(O,\frac{2\pi}{n})\circ \ldots Rot(O,\frac{2\pi}{n})]\,(M_h)$$

$$= [\,p\circ p\circ p\circ \ldots\circ p\,]\,(M_h) = p^k(M_h) \Rightarrow Rot(O,\frac{2k\pi}{n}) = p^k$$ ។

<u>សង្កេត</u>

1/ ដំណើរវិល ឬ រូតាស្យុង (rotation) ជា ពៃមុតាស្យុងពិសេស ពីព្រោះវាវិល ជុំវិញ ផ្ចិត នៃ រង្វង់មូល ដូច្នេះចម្ងាយ ពី ចំណុចមកផ្ចិត នៅដដែល មិនផ្លាស់ប្តូរ ។ ហើយចំពោះ ពៃមុតាស្យុង ធម្មតា គេគ្រាន់តែផ្លូរកន្លែង ចំណុចនីមួយៗ តែប៉ុណ្ណោះ។

2/ ឃើញថានៅ លើ រង្វង់មូល ចំណុច នីមួយៗ $M_1(x_1), M_2(x_2), M_3(x_3), \ldots, M_n(x_n) = M_0$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ កាលណា មុំ ដែលផ្ទ នឹង x_i ផ្សេងៗគ្នា ។ ដែល គួរកត់សម្គាល់ ដែរ គឺមុំ នីមួយៗ សុទ្ធតែ តូច ឬ យ៉ាងច្រើន ស្មើនឹង 2π គឺថា $0 \le x_i < 2\pi$ ។ ហេតុនេះហើយ បានជាគេថា មាន ប៊ីសេចស្យុង រវាង x_i និង ចំណុច M_i ដោយ ហេតុ តែល័ក្ខខ័ណ្ឌ $0 \le x_i < 2\pi$ នេះឯង។ ឧបមា គេ ជំនួស x_i ដោយ $x_i + 2\pi$ នោះ ចំណុច $M_i(x_i)$ និង ចំណុច $M_i(x_i + 2\pi)$ ចំណុចទាំងពីរនេះជាន់លើគ្នា (មើល $Fig-1$) ។ ហេតុនេះហើយ បានជាទូទៅ កាលណា គេឲ្យ ចំណុច M មួយ នៅលើរង្វង់មូល ហើយ បើ មុំ $\alpha = (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$ ដោយ $0 \le \alpha < 2\pi$ នោះគេសរសេរ $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}) = \alpha + 2k\pi, (k \in N)$ ។ នេះ ដោយហេតុថា មុននឹងមកដល់ចំណុច M នោះ យើងមិនដឹងថា គេបានធ្វើ ប៉ុន្មានជុំ រួចមកហើយទេ ។