9.ចំនួន បឋម (Nombres premiers).

និយមន័យ តាមបូរាណ

ចំនួនគត់ មួយ ជាចំនួន បឋម បើកាលណា តួចែក នៃចំនួននោះ មានតែ ខ្លួនវា និង 1 តែប៉ុណ្ណោះ ។

ដូច្នេះ តាម និយមន័យនេះ ចំនួន 1 ក៏ជា ចំនួនបឋម ដែរ ។ តែនៅពេល ប្រើ ម្តងៗ គេត្រូវតែ បញ្ជាក់ថា ចំនួន បឋមដែលគេប្រើក្នុងទីនេះ គឺ ខុសពី 1 ។ ដូច្នេះ ដើម្បី សម្រួល គេសន្មត ថា ចំនួន 1 មិនមែនជាចំនួន បឋម ទេ ហើយការសន្មតនេះក៏ស្រប ទៅនឹង ទ្រឹស្តី នៃពិជគណិត (les théories algèbriques) ដែរ ។

ឧទាហរណ៍ ៖

ចំនួន $2,3,5,7,11,13,17,19$ ជាចំនួន បឋម ។ យើងឃើញថា ចំនួន បឋម មានលក្ខណៈ មិន ស្មើទៀងទាត់ (irrégulier) ។

ការស្មើ (IV,9,1)

គ្រប់ចំនួន ដែល ខុសពី 0 និង 1 នោះយ៉ាងតិចណាស់ ក៏មានតួចែក បឋម មួយដែរ ។

បង្ហាញ បើចំនួន a ខុសពី 0 និង 1 នោះសំនុំ D_a នៃតួចែករបស់វា ខុសពី 1 គឺ ខុសពី សំនុំ $\emptyset$ ពីព្រោះ $a \in D_a$ ។ ដូច្នេះ D_a ដោយមាន a ជាធាតុបន្ថែមនោះ ក៏ មានចំនួនធាតុ មិនអនន្ត ។ ហើយមិនពិបាកទេ ថា ចំនួនតូចជាងគេ b នៅក្នុង D_a គឺជាចំនួន បឋម។

ការស្មើ (IV,9,2)

ចំនួន បឋម មានច្រើនជា អនន្ត (Il existe une infinité de nombres premiers) ។

បង្ហាញ

ដើម្បីបង្ហាញថា ចំនួន បឋម មានច្រើនដល់អនន្ត យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $\forall n \in N$ ដែលគេឲ្យ យើងអាចរក ចំនួន បឋម b មួយបាន ដែល ធំជាង n ។

ដោយ n យើងបាន $n!$ ហើយ ដោយ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n$ ដូច្នេះ តួចែក បឋម នៃ $n!$ ស្មើ នឹង n បើ n ជាចំនួន បឋម ។ តែចំពោះ តួចែក បឋម នៃ $1 + n!$ ត្រូវតែ ធំ ជាង n ជានិច្ច។ ឧបមាន $n = 5 \Rightarrow n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \Rightarrow$ តួចែក បឋមនៃ $n!$ គឺ 2, 3, 5 ។ តែតួចែក បឋមនៃ $1 + n! = 1 + 120 = 121$ ដែលជា ចំនួន បឋម ហើយ $121 > 5$ ។

រួមសេចក្តីទៅ កាលណា គេមាន ចំនួន n នោះគេក៏មាន ចំនួន បឋម មួយដែល ធំជាង n ។ ដោយចំនួន គត់ n មានច្រើនដល់ អនន្ត ដូច្នេះ ចំនួន បឋម ក៏មានច្រើនដល់ អនន្តដែរ។

បំបែកជា កត្តា បឋម

យើងចេញដំណើរ ពី ចំនួន a មួយដែល ខុសពី 0 និង 1។ យើងតាងដោយ x_1 តួចែក បឋម តូចជាងគេ នៃ a ហើយ p_1 គឺចំនួន p ដែលធំជាងគេដែលឲ្យ a ចែក ដោយ ${x_1}^p$ ដាច់ ។ យើងតាងដោយ a_1 ផលចែកដាច់ រវាង a និង ${x_1}^{p_1}$ ។ យើងអាច បើ $a_1 \neq 1$ ធ្វើ វិធីដដែលឡើងវិញ ចំពោះ a_1 គឺថា តួចែក បឋម ដែលតូចជាងគេនៃ a_1 គឺ x_2 ហើយ $x_2 > x_1$ ពីព្រោះ x_1 មិនចែក a_1 ។ ហើយយើងអាច សរសេរ ៖ $a = {x_1}^{p_1}. {x_2}^{p_2}. a_2$ ដោយ ចំនួន a_2 ចែកដោយ x_2 មិនដាច់ ។ ហើយគេ ធ្វើ វិធីដដែលឡើងវិញ ចំពោះ a_2 ហើយតែរបៀបនេះ រេះតែ តៗទៅ ។ តែដោយ ស្វ៊ីត a_i ចុះជានិច្ច នោះ នៅពេលណាមួយនៃវិធីដដែលៗនេះ ផលចែកនោះត្រូវតែ ស្មើនឹង 1 ។ យើងអាចសរសេរដូចតទៅនេះ ដោយសន្មត ថា $a_{k+1} = 1$ ៖

$a = x_1^{p_1} . \cancel{a_1}$

$\cancel{a_1} = x_2^{p_2} . \cancel{a_2}$

$\cancel{\ldots\ldots\ldots}$

$a_i = x_{i+1}^{p_{i+1}} . \cancel{a_{i+1}}$

$\cancel{\ldots}$

$\cancel{a_{k-1}} = x_k^{p_k} . \cancel{a_k}$

$\cancel{a_k} = x_{k+1}^{p_{k+1}} . a_{k+1}$ ដោយគុណ តួ ខាងឆ្វេង សញ្ញា = ជាមួយគ្នា ហើយ គុណ តួខាង ស្តាំ សញ្ញា = ជាមួយគ្នា នោះយើងបាន បន្ទាប់ពីលប់តួ ដូចគ្នា៖

$a = x_1^{p_1} . x_2^{p_2} \ldots\ldots x_k^{p_k} . x_{k+1}^{p_{k+1}} . a_{k+1}$ ហើយដោយ $a_{k+1} = 1$ នោះយើងបាន

$\boldsymbol{a = x_1^{p_1} . x_2^{p_2} \ldots\ldots x_k^{p_k} . x_{k+1}^{p_{k+1}}}$ ដោយ $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ ។

<u>ឧទាហរណ៍</u> យើងយក $a = 504$ ។យើងចែក 504 ជាមួយនឹងចំនួនបឋម ពី តូច ទៅ ធំ :

$$\left.\begin{array}{l} 504 = 2 \times 252 \\ 252 = 2 \times 126 \\ 126 = 2 \times 63 \end{array}\right\} \quad 504 = 2^3 \times 63 \quad \Leftrightarrow \quad a = x_1^{p_1} . a_1$$

$$\left.\begin{array}{l} 63 = 3 \times 21 \\ 21 = 3 \times 7 \end{array}\right\} \quad 63 = 3^2 \times 7 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = x_2^{p_2} . a_2$$

$7 = 7 \times 1 \Rightarrow$ $\Leftrightarrow a_2 = x_3^{p_3} . a_3 \quad (a_3 = 1)$ ដូច្នេះ

$a = x_1^{p_1} . x_2^{p_2} . x_3^{p_3}$ គឺ

$504 = 2^3 . 3^2 . 7$ ។

<u>ការស្នើ</u> <u>$(IV, 9, 3)$</u>

ចំនួន គត់ a ខុសពី 0 និង 1 អាចសរសេរ មានរាង ជាផលគុណតែមួយ

យ៉ាងគត់ គឺ $a = x_1^{p_1}.x_2^{p_2}\ldots\ldots x_n^{p_n}$ នៃស្វ័យគុណ នៃចំនួនបឋមមិនដូចគ្នា $x_1x_2x_3\ldots\ldots x_n$ ។

ការបំបែកជា កត្តាបឋម ឲ្យនូវ របៀបមួយងាយស្រួល ដើម្បីនឹងរក $P.G.C.D.$ និង $P.P.C.M.$ ដោយមិនចាំច់ប្រើ ក្បួនដោះស្រាយ អឺគ្លីត ។ ហើយដោយ របៀបនេះ យើង អាច បានការស្មើ ដូចតទៅនេះ ៖

<u>ការស្មើ ($IV, 9, 4$)</u>

បើ ចំនួន គត់ a និង b ជាចំនួនគត់ បឋម នឹងគ្នា នោះ a^n និង b^n ក៏ បឋម នឹងគ្នា *គ្រប់ ចំនួន* $\boldsymbol{n}$ $(\forall \boldsymbol{n})$ ។

(គេអាច បង្ហាញ ដោយប្រើ ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស តែម្តង ក៏បានដែរ)

================ *ចប់ មេរៀន នៃជំពូក IV* =================