8.ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស (Théorème de Gauss) . ពហុគុណរួមតូចបំផុត (Plus Petit Commun Multiple).

ការសង្កេតជាដំបូង. បើកាលណាគេចែក ចំនួន a និង b ដោយ តួចែករួមណាមួយនោះ ដោយការស្មើ $(IV, 8, 1)$, $P.G.C.D.(a, b)$ ក៏ចែកដោយ ដោយ តួចែកនោះដែរ ។ ជាពិសេស បើ d ជា $P.G.C.D.(a, b)$ នោះ $P.G.C.D.$ នៃ $a/_\mathrm{d}$ និង $b/_d$ គឺ ស្មើនឹង 1 ។

និយមន័យ

គេថា ចំនួន $\boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{b}$ បឋម នឹងគ្នា (*premiers entre eux*) ***កាលណា $\boldsymbol{P.G.C.D.(a, b)}$ ស្មើនឹង*** 1[1]។ (*On dit que deux nombres a et b sont premiers entre eux si leur $P.G.C.D.$ est égal* à 1.)

ដោយការសង្កេតនេះ យើងមិនពិបាកនឹងយល់ទេ នូវ ការស្មើដូចតទៅនេះ ដែលជាលទ្ធផលមួយដ៏សំខាន់ ក្នុង ទ្រឹស្តីចែកដាច់ ។

ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស (Théorème de Gauss).

បើចំនួន $\boldsymbol{c}$ ជាតួចែក នៃ ផលគុណ $\boldsymbol{ab}$ ហើយ បើ $\boldsymbol{c}$ បឋមនឹង $\boldsymbol{a}$ នោះ $\boldsymbol{c}$ ជាតួចែក នៃ $\boldsymbol{b}$។

យើងដឹងថា $\boldsymbol{c}$ ជាតួចែក របស់ cb នឹង របស់ ab ។ ដោយ c បឋមនឹង a ដូច្នេះ $P.G.C.D.$ របស់ cb នឹង ab គឺ b ។ ដោយ c ជា តួចែករួម នៃ cb នឹង ab ដូច្នេះ c ជាតួចែក នៃ $P.G.C.D.$ គឺ b ។

ថ្លែង ដោយរបៀប ម្យ៉ាងទៀត៖

---

[1] ចូរ សង្កេត ការខុសគ្នា រវាង **ចំនួនបឋម** និង ***ចំនួនពីរ បឋមនឹងគ្នា*** ។ ចំនួនបឋម គឺ ចំនួនដែលមាន តួចែកតែពីរគត់ គឺ 1 និង ចំនួននោះឯងតែម្តង។ ដូចជា 5 ជាចំនួនបឋម ពីព្រោះ តួចែករបស់វា មាន 1 និង 5។ ចំណែក ចំនួនគត់ ពីរ a និង b បឋមនឹងគ្នា លុះត្រាតែ $P.G.C.D.(a, b) = 1$ ។ ដូចជា ចំនួន 6 និង 25 បឋមនឹងគ្នា ពីព្រោះ $P.G.C.D.(25, 6) = 1$ ថ្វីបើ 25 និង 6 មិនមែនជា ចំនួនបឋមក៏ដោយ។

ចំពោះ ចំនួនគត់ x មួយ គេអាចផ្គូផ្គងនឹង សំនុំ D_x នៃ តួចែកទាំងឡាយរបស់ x ដែល ខុសពី 1 ។ ដូច្នេះ [a និង b បឋម នឹងគ្នា] សមមូលនឹង [$D_a \cap D_b = \emptyset$] ។ ហើយ ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស មានន័យ សមមូលនឹង ៖

$\boldsymbol{D_a \cap D_b = \emptyset \Rightarrow D_{ab} = D_a \cup D_b}$ ។

ការថ្លែងនេះ អាចបង្រីក ដល់ករណី ដែលមាន ចំនួន a_i ច្រើន ។

ពហុគុណ រួម តូច បំផុត (*Plus petit commun multiple*).

សំនុំ នៃពហុគុណ រួម នៃចំនួន a និង b មិនមែនជា សំនុំទទេ ($\emptyset$) នោះទេ ។ ពីព្រោះ វាមានធាតុ ab នៅក្នុងនោះដែរ។ ហើយដោយតាមការស្នើ (III, 6,2) សំនុំនោះ ត្រូវមាន ធាតុមួយ ដែលតូចជាងគេ ដែលហៅថា ពហុគុណ រួម តូច បំផុត នៃ a និង b $P.P.C.M.(a,b)$ ។ បើ $P.G.C.D.$ នៃ a និង b កត់ត្រាដោយ $\Delta(a,b)$ នោះ $P.P.C.M.$ របស់វា អាចកត់ត្រាដោយ $M(a,b)$ ។ បើ $P.G.C.D.$ នៃ a និង b កត់ត្រាដោយ $a \wedge b$ នោះ $P.P.C.M.$ របស់វា អាចកត់ត្រាដោយ $a \vee b$ ។

តែចំពោះ $P.G.C.D.$ ក៏ដូច $P.P.C.M.$ មិនគ្រាន់តែ មានទ្រឹស្តីបទ ដែលចែងថា មាន នោះទេ តែត្រូវមាន ទ្រឹស្តីបទ ដែលអាចឲ្យយើង រកនូវ ចំនួន $P.P.C.M.$ នោះ ថែមទៀត។ គឺ ទ្រឹស្តីបទ ហ្គោស ។

ការស្នើ (*IV*, 8,1).

a និង b គឺជា ចំនួនគត់ មិនសូន្យ ហើយ d ជា $P.G.C.D.$ នៃ a និង b ។ ដើម្បី ឲ្យចំនួន m ជា ពហុគុណ នៃ a និងជា ពហុគុណ នៃ b នោះ ត្រូវតែ និង គ្រាន់តែ m ជា ពហុគុណ នៃ $\frac{ab}{d}$ ។

1/ លក្ខណ្ឌ ត្រូវតែ (*condition nécessaire*)

m ជា ពហុគុណ នៃ $\frac{ab}{d}$ => m ជា ពហុគុណ នៃ a និងជា ពហុគុណ នៃ b ។

យើងតាង $a = da'$ ហើយ $b = db'$

ដោយ d ជា $P.G.C.D.$ នៃ a និង b ដូច្នេះ a' និង b' ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា

m ជា ពហុគុណ នៃ $\frac{ab}{d}$ => $m = k(\frac{ab}{d}) = k.(\frac{a}{d}).b = k.a'.b = (ka')b$

$m = (ka')b$ => <u>m ជា ពហុគុណ នៃ b</u>

$m = k(\frac{ab}{d}) = k.(\frac{b}{d}).a = k.b'.a = (kb')a$ => <u>m ជា ពហុគុណ នៃ a</u> ។

<u>2/ លក្ខណៈ គ្រាន់តែ (condition suffisante)</u>

m ជា ពហុគុណ នៃ a និងជា ពហុគុណ នៃ b => m ជា ពហុគុណ នៃ $\frac{ab}{d}$

m ជា ពហុគុណ នៃ a => $m = k.a = k.d.a'$ (1)

m ជា ពហុគុណ នៃ b => $m = l.b = l.d.b'$ (2)

(1) និង (2) => $k.a' = l.b'$ => a' តួចែក $k.a'$ ក៏ជាតួចែក $l.b'$ ដែរ ។

ហើយដោយ a' និង b' បឋមនឹងគ្នា ដូច្នេះ a' ជាតួចែកនៃ l => $l = a'p$

ដោយ (2) $m = l.d.b' = a'p.d.b' = p.d.a'.b' = p.(d.a').(\frac{d.b'}{d}) = \frac{p.a.b}{d}$

ដូច្នេះ $m = p.\frac{ab}{d}$ ដែល បង្ហាញថា <u>m ជា ពហុគុណនៃ $\frac{ab}{d}$</u> ។

<u>សង្កេត</u>

ដើម្បី បាន ពហុគុណ តូចបំផុត នោះគ្រាន់តែយក $p = 1$ ។ ដោយ m ជា ពហុគុណ នៃ a និងជា ពហុគុណ នៃ b ដូច្នេះ ៖

ពហុគុណរួម តូចបំផុត នៃ a និង b គឺ $\frac{ab}{d}$ ។

<u>អនុសាស្ត្រ(Corollaire).</u>

$P.P.C.M.$ នៃចំនួន a និង b គឺ ជាលទ្ធផល នៃ ផលគុណ $(a \times b)$ ចែក នឹង $P.G.C.D.$ នៃចំនួន a និង b ។

$$\boxed{P.P.C.M.(a,b) = \frac{a \times b}{P.G.C.D.(a,b)}}$$

ឧទាហរណ៍

នៅ $A-$ឧទាហរណ៍ទី១ $a = 156$, $b = 84$ *ហើយយើង បាន*

$P.G.C.D.(156,84) = 12$ *ដូច្នេះ* $P.P.C.M.(156,84) = \frac{156 \times 84}{12} = 1092$

ដោយអនុសាញ្ញនេះ យើងអាចទាញយកនូវកម្មសិទ្ធិ នៃ $P.P.C.M.$

ប្រហាក់ប្រហែលគ្នា

នឹង កម្មសិទ្ធិ នៃ $P.G.C.D$ *ដូចតទៅនេះ៖*

1/ $P.P.C.M.$ *ជាវិធីគណនា មាន លក្ខណៈ ត្រលប់ និង ផ្តុំ*

2/ *បើគេ គុណ ចំនួន* a_i *ទាំងអស់ ដោយ* k *នោះ* $P.P.C.M.$ *ក៏គុណនឹង* k *ដែរ ។*

ម្យ៉ាងទៀត $P.P.C.M.$ *នៃ* n *ចំនួន* $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ *គឺជាចំនួនដែល តូច ជាងគេ ក្នុងចំណោម ចំនួនដែលធំជាង ចំនួន* $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ *។*