<u>6.ចំណោទ នៃ ភាពចែកដាច់ (**Problèmes de divisibilité**).</u>

ការសិក្សាសំខាន់ជាង ក្នុងលេខគណិតថ្នាក់ដំបូង គឺចំណោទ ដែលកើតឡើង អំពីការ សិក្សានូវ ភាពចែកដាច់ នៃប្រភាគ ។ គេ សម្រួល ប្រភាគ ដោយចែក [ភាគយក និង ភាគបែង] នឹងតួចែករួម (*leurs diviseurs communs*) ។ ហើយដើម្បី សម្រួល ប្រភាគ ពីរ ឲ្យមាន ភាគបែងតែមួយ នោះត្រូវ ស្គាល់ ពហុគុណរួម (*un multiple commun*) នៃភាគបែង ទាំងពីរ (*de leurs dénominateurs*) ។ ដូច្នេះ គេត្រូវដោះស្រាយនូវ ចំណោទ ពីរ ដូចតទៅនេះ៖

1/ រក សំនុំ នៃតួចែករួម នៃពីរចំនួនដែលគេឲ្យ (*déterminer l'ensemble des diviseurs communs de deux nombres donnés*).

2/ រក សំនុំ នៃពហុគុណរួម នៃពីរចំនួនដែលគេឲ្យ (*déterminer l'ensemble des multiples communs de deux nombres donnés*).

<u>តួចែករួម ធំបំផុត (*$P.G.C.D.$*) *LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX NOMBRES.*</u>

សំនុំ នៃតួចែករួម នៃពីរចំនួន a និង b សំនុំនោះ ត្រូវបន្ថែម (**majoré**) ដោយ ចំនួន នីមួយៗ a ឬ b ។ ដូច្នេះ តាមការស្នើនៅ ជំពូកទី បី ($III, 6, 3$) សំនុំនោះត្រូវមាន ចំនួនមួយដែលធំជាងគេ។ ដូច្នេះ យើងបានបញ្ជាក់ ថាមាន <u>តួចែករួមមួយ ដែលធំជាងគេ</u> (**un plus grand commun diviseur**) ចំពោះ ពីរចំនួនគត់ ណាក៏ដោយ ។ ដោយវិធីដូចគ្នានេះ គេក៏អាច បង្ហាញថា មាន ចំនួនមួយដែលធំជាងគេ នៅក្នុងសំនុំ នៃតួចែករួម នៃចំនួន $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ដែលគេឲ្យ។ តែ ទ្រឹស្តីបទ នេះគ្រាន់តែបាន បញ្ជាក់ថា មាន ចំនួនធំនោះ តែ មិនបានប្រាប់នូវរបៀបដែល រក ឲ្យឃើញតែម្តងនូវ $P.G.C.D$ នៃចំនួនដែលគេឲ្យ។ ហើយក៏មិនបានឲ្យ នូវកម្មសិទ្ធិជាគ្រឹះ នៃ $P.G.C.D$ ដែលថា ៖ តួចែក នៃចំនួនទាំងឡាយដែលគេឲ្យ ជាតួចែក របស់ $P.G.C.D$ នៃចំនួន ទាំងនោះដែរ ។

<u>ក្បួនដោះស្រាយអឺក្លីត</u> <u>$(Algorithme\ d'Euclide)$</u> ថ្វីបើចាស់យូរណាស់មកហើយ បានឲ្យទាំង $P.G.C.D$ និង កម្មសិទ្ធិទាំងឡាយផង ដូច្នេះ នៅតែមានតម្លៃដដែល។ យើងរំលឹកឡើងវិញដូចតទៅនេះ៖

I. ដោយចេញពីការសង្កេត ៖ តួចែករួម នៃ a និង b ក៏ចែកដាច់ នូវ សំណល់ $(le\ reste)$ក្នុងការចែក a ដោយ b $(de\ la\ division\ de\ a\ par\ b)$។

II. ចំនួន $\boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{b}$ គេបានឲ្យ នោះគេ កំណត់ ស្វីត b_i ដោយ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ៖

(1) $\boldsymbol{b_0 = a}$ $\boldsymbol{b_1 = b}$ $\boldsymbol{b_{i-1} = b_i q_i + b_{i+1}}$ និង $\boldsymbol{b_{i+1} < b_i}$ (R2)

ដូច្នេះ ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ខាងចុងនេះ សម្ដែងថា b_{i+1} ជាសំណល់ ក្នុងការចែក b_{i-1} ដោយ b_i។ ដោយ b_{i-1} និង b_i គេដឹង ដូច្នេះ b_{i+1} ត្រូវកំណត់បាន កាលណា b_i មិនសូន្យ ។ តែ ស្វីត b_i ជាស្វីត ចុះ ជានិច្ច គេមាន វិសមភាព $b_{i+1} \leq b_i - 1$

ដូច្នេះ ដោយ វេគារ៉េង លើ $b_{i+1} \leq b_i - 1$ ៖ នោះមាន ចំនួន k យ៉ាងច្រើនស្មើនឹង b ដែលឲ្យ $b_{k+1} = 0$ ដូច្នេះគេបាន $b_{k-1} = b_k q_k$ ។ ហើយ ការចែក a ដោយ b ក៏មិនអាចបន្ត ហួសពីនេះ ពីព្រោះ សំណល់ $b_{k+1} = 0$ វាសូន្យទៅហើយ ។

ដើម្បីនឹងយល់ ទំនាក់ទំនង (R2) ខាងលើនេះ ខ្ញុំសូមយកឧទាហរណ៍មួយដោយ យក $a = 156$ និង $b = 84$ ដូច្នេះ ដោយ (R2)

$b_0 = 156$ $b_1 = 84$ $b_{i-1} = b_i q_i + b_{i+1}$ និង $b_{i+1} < b_i$

ចំពោះ $i = 1$ => $b_0 = b_1 q_1 + b_2$ => $156 = 84 \times 1 + 72$ និង $b_2 = 72 < 84$

=> $(b_0, b_1, b_2) = (156, 84, 72)$

ចំពោះ $i = 2$ => $b_1 = b_2 q_2 + b_3$ => $84 = 72 \times 1 + 12$ និង $12 < 72$

=> $(b_1, b_2, b_3) = (84, 72, 12)$

ចំពោះ $i = 3$ => $b_2 = b_3 q_3 + b_4$ => $72 = 12 \times 6 + 0$ និង $0 < 12$

=> $(b_2, b_3, b_4) = (72, 12, 0)$ ដូច្នេះ យើងឃើញថា សំណល់ $b_4 = 0$ ហើយ

$b_2 = b_3q_3$ **=>** តួចែក របស់ $\boldsymbol{b_3}$ ក៏ ជាតួចែក របស់ $\boldsymbol{b_2}$ ដែរ ហើយក៏ជាតួចែករបស់ $\boldsymbol{b_1}$ ទៀត ពីព្រោះ $b_1 = b_2q_2+b_3$ …. ។ល។ នៅក្នុង ឧទាហរណ៍នេះ $b_3 = 12 = 3 \times 4$ ដូច្នេះ ចំនួន 3 និង 4 ជាតួចែករបស់ $\boldsymbol{b_3}$ ។ ហើយក៏ជាតួចែករួម របស់ b_0 និង b_1 ដែរ ។

III. គេបង្ហាញដោយ រ៉េគារង់ថា សំនុំ នៃតួចែករួម របស់ a និង b ស្មើនឹង សំនុំ នៃតួចែករួម របស់ b_i និង b_{i+1} $\forall i \leq k-1$ (ដោយ $b_{k+1} = 0$) ។ តែដោយ សំនុំតួចែករួម របស់ b_{k-1} និង b_k ក៏ស្មើនឹង សំនុំ នៃតួចែក របស់ b_k នោះបើដោយតាង $d = b_k$ យើងអាចថ្លែងថា ៖

<u>***ការស្មើ (IV,6,1)***</u>

បើ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ មិនសូន្យ នោះមានចំនួន d មួយ ដែល សំនុំនៃ តួចែករួម នៃ a និង b ស្មើនឹងសំនុំនៃ តួចែកនៃ d ។

ដូច្នេះ d ជាតួចែករួម ធំបំផុត នៃ a និង b។ វាស្មើនឹង សំណល់ចុងក្រោយគេ មិនសូន្យ នៅក្នុងការចែក បន្តគ្នា កំណត់ដោយ ទំនាក់ទំនង (1) ។

<u>*ការកត់ត្រា*</u>

ការកត់ត្រាតទៅនេះ មិនមែនជាទូទៅទេ សូមទុកដូចជា លំហាត់ទៅចោះ។

ដោយ មួយគូ (a,b) គេអាចផ្គូផ្គងនឹង ចំនួនគត់មួយ មិនសូន្យ ដែលតាងដោយ $d = P.G.C.D(a,b)$ ។ បើយើងតាងដោយ N^* សំនុំនៃចំនួនគត់មិនសូន្យ នោះយើងបានកំណត់នូវ ការអនុវត្តន៍មួយ ពី $N^* \times N^*$ ទៅក្នុង N^* ហើយបើយើង សរសេរការ ការអនុវត្តន៍នោះដោយ តួអក្សរ Δ នោះ $P.G.C.D(a,b)$ អាចសរសេរជា $\Delta(a,b)$។ តែយើងក៏សង្កេតឃើញថា ការអនុវត្តន៍ Δ កំណត់ ឲ្យបាន ច្បាប់តាក់តែងផ្សំក្នុងមួយ ($loi\ de\ composition\ interne$) លើ N^* ដូច្នេះយើង បញ្ចូលមកនូវ សញ្ញាគណនាមួយ ដូចជា Λ ហើយតាង $P.G.C.D$ នៃចំនួន a និង b ដោយ $a \Lambda b$ ។