2.ចំលាស់ (*arrangements*) – ពៃមុតាស្យុង (*permutations*).

ចំលាស់ ដូចខ្ញុំបានជម្រាបនៅ §-1 ថាយើងដោះស្រាយចំណោទ-ទី៣ ជាមុនសិន គឺ ថា គេឲ្យសំនុំ E មួយ មាន n ជាតុ ហើយគេថា ៖

***ស្វីត* មួយដែលមាន p *ជាតុខុសគ្នា* នៃ E គឺជា *ចំលាស់* p ទៅ p ជាតុនៃ E ។**

ចំលាស់ ពីរ ខុសគ្នា កាលណា កាលណា ជម្រើសខុសគ្នា ឬ ក៏ ការរៀបតាមលំដាប់ ខុសគ្នា ។ ចំណោទ ទី៣ គឺ រកចំនួន A_n^p នៃ ចំលាស់ p ទៅ p នៃ E ។

គេបានចំលាស់របៀបនេះ ដោយ មុនដំបូង យើង ជ្រើស យកជាតុទី ១ បន្ទាប់មក ជាតុទី២ ហើយចេះតែ ត។ ទៅ ៖ បើយើងជ្រើសបាន $(p-1)$ ជាតុដំបូងហើយ នោះជាតុ ទី $p^{ième}$ ត្រូវរើសយកក្នុង សំនុំនៃ $n-(p-1)$ ជាតុដែលនៅសល់ ដូច្នេះ យើងអាចមាន $n-(p-1)$ ជម្រើស។ ដូច្នេះ យើងបាន រូបមន្ត រេគារ៉ង់ ៖

$A_n^p = [n-(p-1)]A_n^{p-1}$ (F1)

ហើយដោយ $A_n^1 = n$ នោះយើងបាន ដោយ រេគារ៉ង់ មានទីបញ្ចប់ នូវរូបមន្ត ជា ទូទៅ មួយ ៖

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots(n-p+1)} \quad \text{(F2)}$$

ដោយប្រើ (F1) ហើយដោយយក $p = 2, 3, 4, \dots\dots, p$ ហើយដោយគុណ ទាំងសង្ខាង នោះយើងបាន៖

$$\begin{aligned}
p = 2 &: \quad A_n^2 = (n-1)A_n^1 = (n\text{-}1)\,n \\
p = 3 &: \quad A_n^3 = (n-2)A_n^2 \\
p = 4 &: \quad A_n^4 = (n-3)A_n^3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p = \mathrm{p} &: \quad A_n^{\mathrm{p}} = [n-(\mathrm{p}-1)]A_n^{p-1}
\end{aligned}$$

$A_n^p \quad = \quad n(n-1)(n-2) \ldots \ldots \ldots [n-(p-1)]$ ដែលជារូបមន្ត (F2) ។

ជាពិសេស ចំពោះ $p = n$ គេបាន ៖

$A_n^n \ = \ 1.2.3 \ldots \ldots \ldots .n$

តែ A_n^n គឺមិនមែន អ្វីក្រៅពី ចំនួន ស៊ីត ដែលមាន n ជាតុខុសគ្នា ដែលគេអាចបង្កើតបានដោយ n វត្ថុដែលគេឲ្យ គឺជា ជាចំនួន ចំលាស់ ទាំងអស់ដែលខុសគ្នា នៃសំនុំដែលមាន n ជាតុ ។ ដូច្នេះ យើង បានឆ្លើយទៅនឹង សំនួរ នៃចុះណោទ ទី១ ។

ចំនួន $A_n^n \ = \ 1.2.3 \ldots \ldots \ldots .n$ គេតាងដោយ $n!$ មើលថា « ហ្វាក់តូរ្យែល n »

ហើយដោយ ការកត់ត្រានេះ គេអាចសរសេរ A_n^p ជា $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ ។

ការស្នើ (IV,2,1)

ចំនួន ចំលាស់ p ទៅ p នៃ n ជាតុ ($n \geq p$) គឺ ៖

$$\boldsymbol{A_n^p = n(n-1) \ldots \ldots \ldots (n-p+1) \ = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

គឺជា ផលគុណ នៃ p ចំនួនគត់ តៗ គ្នា ដោយ n ជាចំនួន ធំជាងគេ ។ ហើយចំពោះ $n = p$ ផលគុណនោះ ទៅជា ចំនួន ចំលាស់ ដែលខុសគ្នា នៃ សំនុំ ដែលមាន n ជាតុ គឺ $n!$ ។

ឧទាហរណ៍

គេមាន $10! = 3\,628\,800$ ចម្លើយដែលអាចមាន នៅពេលប្រឡងប្រជែង ដែលគេឲ្យយើង តម្រៀប តាមការពេញចិត្ត 10 វត្ថុដែលគេឲ្យ។ គេមាន $6! = 720$ របៀបដាក់ភ្ញៀវ 6 នាក់ ឲ្យអង្គុយ ជុំវិញ តុបាយ បើសិនជាគេមិនកំណត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ ក្នុងការរៀបភ្ញៀវនេះ។ តែ គេអាចបង្ហាញ ថា ចំនួននេះ ធ្លាក់ចុះមកត្រឹម $2 \times 3! \times 3! \ = 72$ បើសិនជាគេឲ្យ ប្រុស 3នាក់ និងស្រី 3នាក់ អង្គុយ ដោយ ប្រុសនិងស្រី ឆ្លាស់គ្នា ។

សង្កេត

ចំនួន $n!$ កើនរហ័សណាស់ ជាមួយនឹង n (អ្នកខ្លះគេថា ចំណុច ! សម្តែងនូវការភ្ញាក់របស់ មាស៊ីនគិតលេខ ចំពោះ លទ្ធផលដ៏ធំសំបើមនេះ) ។ ដូច្នេះ គេអាច តម្រៀបបាន ជា ចំលាស់ តែ កាលណាចំនួន n ជាតុនៅតិច នៅឡើយ ។ គេអាច សរសេរ $2\times 3 = 6$ ចំលាស់ ចំពោះ 3 អក្សរ a,b,c យក ពីរតួម្តង ពីរតួម្តង គឺ ab, ba, ac, ca, bc, cb ហើយ $3! = 6$ ចំលាស់ នៃ 3 អក្សរនោះដែរ គឺ $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ តែគេពុំអាច យក n ឲ្យហួសពី 4 ទេ បើមិនចង់មិនចង់សរសេរ ច្រើនទំព័រ ដោយឥតប្រយោជន៍ ។

ចំណោទ អរូបី (abstrait) ដែលមកជាមួយ

ចំលាស់ p ទៅ p ជាតុខុសគ្នា នៃសំនុំ E កើតបានជា ស្វីត មួយ ដែលមាន p ជាតុខុសគ្នា នៃ E តាំងដោយ $x_1, x_2, \dots\dots, x_p$ ។ ដោយជាតុ ទាំងអស់នោះខុសគ្នា ដូច្នេះ $i \neq j$ => $x_i \neq x_j$ ។ បើយើង តាំង ជានិច្ច ដោយ N_p^* សំនុំ $1, 2, 3, \dots\dots, p$ នៃចំនួនគត់ នៅចន្លោះ ពី 1 ទៅ p យើងអាចថា ការឲ្យនូវ សំលាស់នេះ ក៏ដូចជា ការឲ្យនូវ អាំងសេចស្យុង ពី N_p^* ទៅក្នុង E កំណត់ដោយ $i \to x_i$ ហើយ ចំនួន A_n^p អាចបកស្រាយ ជាចំនួន អាំងសេចស្យុង ពី N_p^* ទៅក្នុង E ចំពោះ សំនុំ E មួយដែលមាន n ។ ជាទូទៅ A_n^p ស្មើនឹង ចំនួន អាំងសេចស្យុង ពី សំនុំ X មួយ ដែលមាន p ជាតុ ទៅសំនុំ Y មួយដែលមាន n ជាតុ ពីព្រោះ ដោយមាន ប៊ីសេចស្យុង ពី X ទៅ N_p^* នោះយើង អាចនាំមកវិញ ក្នុង ករណីដែល $X = N_p^*$ ។ សូមនឹកមកវិញថា ការអនុវត្តន៍ ពីរ f និង g ពី X ទៅ Y ខុសគ្នា បើកាលណា មាន ជាតុ x ណាមួយ យ៉ាងហោច នៅក្នុង X ដែល គេបាន $f(x) \neq g(x)$ ។

ចំពោះ $n = p$ គេឃើញថា ចំនួន ប៊ីសេចស្យុង ពី សំនុំមួយ ដែលមាន n ជាតុ ទៅលើ សំនុំមួយ ដែល n ជាតុ គឺស្មើនឹង $n!$ ។ ពីព្រោះថា បើ X និង Y មាន ចំនួន ជាតុ ស្មើគ្នា នោះ អាំងសេចស្យុងមួយ ពី X ទៅក្នុង Y គឺត្រូវតែ ជា ប៊ីសេចស្យុង

បើមិនដូច្នោះទេ X គ្រាន់តែ អេគីប៉ូតង់ នឹង ផ្នែកមួយតែប៉ុណ្ណោះ នៃ Y ដែលផ្សេងពី Y ដូច្នេះវាផ្ទុយពី ទ្រឹស្តី បកតិសំខ្យា មានព្រំដែន នៅ **ជំពូក**-III ។ ជាពិសេស ចំនួន ប៊ីសេចស្យុង ពី សំនុំ មាន n ជាតុ ទៅលើសំនុំដដែល មាន $n!$ ។ ដោយគេបានហៅថា ពែមុតាស្យុង (permutation) នៃសំនុំមួយ គឺ ជា ប៊ីសេចស្យុង ពី សំនុំនោះ ទៅលើ សំនុំដដែល ។ ដូច្នេះ យើងអាចថ្លែងថា ៖

ការស្មើ (IV,2,2)

ចំនួន ពែមុតាស្យុង (permutations) នៃសំនុំមួយ មានព្រំដែន មាន n ជាតុ គឺស្មើនឹង $n!$ ។

សង្កេត

ពេលខ្លះ គេនិយាយថា ចំលាស់ នៃសំនុំ E គឺជា ស៊ីត បានមកពីតម្រៀប តាមលំដាប់នូវ ជាតុនៃ E តែតាមគោលការណ៍ ចំលាស់ នៃ E គឺជា វិធីប្រតិបត្តិការ មួយ ដែល ឆ្លង ពី តម្រៀបមួយ មក តម្រៀបមួយផ្សេងទៀត ៖ គេ ច្រើនតែ ច្រឡំ លទ្ធផល និង កិច្ចការ ដែល ផ្តល់ លទ្ធផល ។ យើងនឹងឃើញ ន័យរបស់ពាក្យ ពែមុតាស្យុង នៅពេលដែល និយាយអំពី ពែមុតាស្យុងវិលជុំវិញ (permutation circulaire) ៖ សំនុំ E គេរៀបបានជា ស៊ីត $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ គេហៅថា ពែមុតាស្យុងវិលជុំវិញ គឺ ការអនុវត្តន៍ ពី E ទៅ E កំណត់ដោយ $f(x_i) = x_{i+1}$ ចំពោះ $i < n$ ហើយ $f(x_n) = x_1$ ។

សូម រំលឹកថា ចំលាស់ ទាំងអស់ នៃ សំនុំ E បង្កើតបានជា គ្រុប (groupe) មួយ ហៅ គ្រុបឆ្លុះ (groupe symétrique) (មើល ជំពូក II – 8) ។ បើ E មាន n ជាតុ យើងបាន គ្រុបមួយ ដែល មាន $n!$ ជាតុ។