11. កង់ នៃពហុធា - ការពង្រីក តាមពីជគណិត ហើយនិងការគិតមិនដល់ (L'anneau des polynômes. Extensions algèbriques et transcendantes).

ចំពោះ លោកអ្នកសិក្សាអំពីពីជគណិត សញ្ញាណនៃពហុធា គឺជាប់ជំពាក់នឹងការសិក្សា អំពីអនុគមន៍ទេ ៖ ពហុធា ដែលមានអថេរតែមួយ គ្មានអ្វីក្រៅពីស្វីត មានចំនួនជាតុដល់ទៅអនន្ត $a_0, a_1, \dots\dots.., a_n$ យកក្នុងកង់ត្រលប់ A ហើយសូន្យចាប់ពីជួរណាមួយទៅ ។ គេថាពហុធាសូន្យ បើគ្រប់មេគុណស្មើនឹងសូន្យ ហើយពហុធាសូន្យនឹងតាងដោយ (0) ។

ពហុធាមួយ $P = (a_0, a_1, \dots\dots.., a_n)$ មានដឺក្រេ $(degré)$ យ៉ាងច្រើនស្មើនឹង p ហើយចំពោះ $n > p$ គេបាន $a_n = 0$ ។ ហើយគេថាមានដឺក្រេ p បើថែមលើនេះ $a_p \neq 0$ ដូច្នេះ ដឺក្រេនៃពហុធាមិនសូន្យ គឺ ចំនួនគត់ p ដែលតូចជាងគេបំផុតបានបំពេញ ចំពោះ $n > p$ គេបាន $a_n = 0$ ។ ចំពោះ ពហុធាសូន្យ គេមិនមានកំណត់ដឺក្រេវាទេ តែគេអាចនិយាយថា ចំពោះចំនួនគត់ n ណាក៏ដោយ ពហុធាសូន្យ មានដឺក្រេធំបំផុតត្រឹម n ៖ ការសន្មតនេះធ្វើឲ្យងាយដល់ការថ្លែងនានា។

ពហុធាមួយដែលមានដឺក្រេយ៉ាងច្រើនស្មើនឹង p គឺកំណត់ដោយស្វីតមិនអនន្ត $a_0, a_1, \dots\dots.., a_p$ នៃ $p+1$ ជាតុក្នុង A ដោយត្រូវយល់ថា មេគុណទាំងឡាយបន្ទាប់ពី a_p ទៅ សុទ្ធតែសូន្យ។ ពហុធានោះនឹងតាងជារូបរាងដោយ ៖

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$$

ហើយគេ ជា ពហុធាមួយនៃអថេរ x $(c'est\ polynôme\ de\ la\ variable\ x)$ ។ តែយើងមិនទាន់ប្រើការសរសេរនេះភ្លាមទេ ដរាបណាយើងមិនទាន់បានវែកញែកសម្ព័ន្ធរវាង សញ្ញាណអរូបីនៃពហុធា $(la\ notion\ abstraite\ de\ polynôme)$ និងសញ្ញាណនៃ អនុគមន៍ពហុធា$(la\ notion\ de\ fonction\ polynôme)$ ដែលយើងនឹងសិក្សា នៅពេល

ខាងមុខ ។

ការបូក (*Addition*)

យើងតាងដោយ $P = (a_0, a_1, \dots\dots.., a_p)$ ពហុធាដែលមានដឺក្រេយ៉ាងច្រើនស្មើនឹង p ហើយដោយ $Q = (b_0, b_1, \dots\dots.., b_q)$ ពហុធាដែលមានដឺក្រេយ៉ាងច្រើនស្មើនឹង q និង $\sup(p, q)$ គឺចំនួនណាមួយដែលធំក្នុងចំណោម (p, q) ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $n > \sup(p, q)$ នោះគេបាន $a_n + b_n = 0$ ។ដូច្នេះ ស្វ៊ីត $a_n + b_n$ កំណត់នូវពហុធាដែលមានដឺក្រេយ៉ាងច្រើនស្មើនឹង $\sup(p, q)$ ។

តាមនិយមន័យ ពហុធាដែលមានមេគុណ (*coefficients*) $a_n + b_n$ ហៅថា បូកនៃ ពហុធា P, Q ហើយតាងដោយ $P + Q$ ។

ការគុណ (*Multiplication*)

ដោយយកការកត់ត្រាដដែល យើងតាង៖

(1) $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots\dots. + a_k b_{n-k} + \dots\dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

ចំពោះ $n > p + q$ នោះគេមាន $c_n = 0$ ដែលបង្ហាញថា ស្វ៊ីត c_n កំណត់នូវពហុធាដែលមានដឺក្រេយ៉ាងច្រើនស្មើនឹង $p + q$ ។ តាមនិយមន័យ ពហុធានេះហៅថា គុណនៃ ពហុធា P, Q ហើយតាងដោយ PQ ។

ជាការងាយទេ ដែលបង្ហាញថា វិធីគណនា បូកនិងគុណ ដែលកំណត់ដោយនិយមន័យនេះ ធ្វើឲ្យសំនុំនៃពហុធាដែលមានមេគុណនៅក្នុងAនោះ មានរចនាសម្ព័ន្ធជា កងត្រលប់ (*une structure d'anneau commutatif*) ។ កង នេះគេតាងដោយ $A[x]$ ។

ករណី A ជាកងសុចរិត (*cas où A est un anneau d'intégrité*)

យើងត្រលប់មកការកត់ត្រាខាងលើវិញ ដោយឧបមាថា P មានដឺក្រេ p ហើយ Q មានដឺក្រេ q ហើយមេគុណ c_n កំណត់ដោយរូបមន្ត (1)។ ដូច្នេះ គេបាន $c_{p+q} = a_p b_q$ ដោយ $a_p \neq 0$ និង $b_q \neq 0$ ដូច្នេះបើ A ជាកងសុចរិត នោះ $c_{p+q} \neq 0$។ យើងអាចថ្លែងថា៖

***ការស្នើ*(V,11,1)**

បើ A ជាកង់សុចរិត ការគុណនៃពហុធា P, Q មិនសូន្យ គឺមិនសូន្យ ហើយដឺក្រេរបស់វាស្មើនឹងផលបូកនៃដឺក្រេ នៃ ពហុធា P, Q ។

អនុសាព្យ (Corollaire)

បើ A ជាកង់សុចរិត នោះ $A[x]$ក៏ជាកង់សុចរិតដែរ។

សង្កេត

បើ A មានធាតុឯកតា តាងដោយ 1 នោះកង់ $A[x]$ ក៏មានធាតុឯកតា ដែលជាពហុធាមានដឺក្រេសូន្យ កំណត់ដោយមេគុណ មិនសូន្យ $a_0 = 1$ ។

តែប៉ុន្តែបើ A ជាអង្គក៏ដោយ ពហុធាដែលមានមេគុណក្នុង A មិនផ្សំបានជាអង្គទេ[1] ។

អនុគមន៍ពហុធា (*Les fonctions – Polynômes*)

តាមពិត និយមន័យ នៃ ការបូកនិងការគុណ នៃពហុធា គឺបានដោយការសិក្សាអំពី អនុគមន៍ដែលត្រូវផ្គូនឹងពហុធានោះ ។

ពីពហុធា $P = (a_0, a_1, \dots\dots\dots, a_p)$ យើងអាចផ្គូនឹងអនុគមន៍ $\bar{P}$ ការអនុវត្តន៍ពី A ទៅក្នុង A ដដែល គំណត់ដោយ ៖ $\bar{P}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p$ ហើយគេអាចពិនិត្យបញ្ជាក់ថា ការបូកនិងការគុណនៃពហុធា P និង Q ដែលបានកំណត់មកហើយនោះគឺដើម្បី ឲ្យអនុគមន៍ $\bar{R} = \overline{P+Q}$ និង $\bar{S} = \overline{PQ}$ ដែលផ្គូនឹង $R = P + Q$ និង $S = PQ$ នោះគឺជាផលបូកនិងផលគុណនៃ អនុគមន៍ $\bar{P}, \bar{Q}$ ។ បានន័យថា ៖ $\bar{R}(x) = \bar{P}(x) + \bar{Q}(x)$ និង $\bar{S}(x) = \bar{P}(x)\bar{Q}(x)$ ដែលគេបកស្រាយដោយ សមភាពជារូបនិមិត្ត ៖

$$\overline{P+Q} = \bar{P} + \bar{Q} \quad \text{និង} \quad \overline{PQ} = \bar{P}\bar{Q} \quad ។$$

តែបើគេកំណត់ ការបូកនិងការគុណនៃពហុធា ដោយយកអំពីការបូកនិងការគុណ

[1] *ពីព្រោះធាតុមួយៗ គ្មានចំរាស ឧបមា $P(x) = 3x$ បើ $Q(x)$ជាពហុធាចំរាស នោះត្រូវ $P(x)Q(x) = 1$ => $Q(x) = \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{3x} = \frac{1}{3}x^{-1}$ ប៉ុន្តែបើ $\frac{1}{3} \in A$ តែចំពោះ x^{-1} ចំនួន -1 មិននៅក្នុង N ទេ ។*

នៃអនុគមន៍ដែលផ្ទួនោះវិញ គេនឹងជួបនូវការលំបាកដ៏ខ្លាំង៖ តើការឲ្យអនុគមន៍ $\bar{P}$ អាចកំណត់បានពហុធា P ឬទេ ? គឺថាការអនុវត្តន៍ $P \rightarrow \bar{P}$ ពីសំនុំនៃពហុធា ទៅសំនុំនៃការអនុវត្តន៍ពី A ទៅ A នោះអាំងសេចទីវឬទេ? បើសិនជាមិនអាំងសេចទីវទេនោះ ពហុធា $P+Q$ និង PQ នឹងមិនកំណត់បានដោយគ្រប់គ្រាន់ដោយរូបមន្ត ៖

$$\overline{P+Q}\,(x) = \bar{P}(x) + \bar{Q}(x) \quad \text{និង} \quad \overline{PQ}\,(x) = \bar{P}(x)\,\bar{Q}(x)$$ ។

តែគេឃើញដោយងាយថា ចម្លើយមិនជាវិជ្ជមានតែគ្រប់ពេលនោះទេ ៖ ឧបមាបើ A ជាកងដែលមានតែ 2 ធាតុ គឺថ្នាក់នៃសំណល់ម៉ូឌុយឡូ 2 (មើល §7) នោះ អនុគមន៍-ពហុធា $x(x+1) \equiv 0$ [2] (កុងគ្រុយ នឹង សូន្យ ម៉ូឌុយឡូ 2) ពីព្រោះ ក្នុងផលគុណ នៃចំនួនពីរជាប់គ្នា x និង $x+1$ មានចំនួនណាមួយជាចំនួនគត់គូ (un nombre pair) ដូច្នេះ ចែកដោយ 2ដាច់ គឺថាសំណល់ស្មើនឹងសូន្យ។ ដូច្នេះ ពហុធា $P_1 = (0,1,1)$ និង ពហុធា $P_2 = (0)$ ទាំងពីរនេះ ផ្ទួនឹង អនុគមន៍-ពហុធា $\bar{P}(x) = x(x+1)$ ។ នេះមកតែពីមាន តួចែកនៃសូន្យ(diviseur de zéro) នៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះ ។

តែត្រូវដឹងថា ចំពោះពហុធាធម្មតាដែលយើងធ្លាប់ប្រើនោះ (គឺមេគុណនៅក្នុង Z, Q, R, C) ពហុធាទាំងនោះសុទ្ធតែអាចកំណត់បានដោយ អនុគមន៍ដែលផ្ទួទាំងអស់ដោយចេញមកពី ទ្រឹស្តីបទ ជាទូទៅខាងក្រោមនេះ៖

ការស្មើ(V,11,2)

គេឲ្យ A ជាកងសុចរិត (anneau d'intégrité) មានធាតុច្រើនដល់អនន្ត ហើយ P និង Q ជាពហុធាដែលយកមេគុណក្នុង A នៅពេលនោះ សមភាពនៃអនុគមន៍ $\bar{P}$ និង $\bar{Q}$ ដែលផ្ទួនឹងពហុធានោះ បណ្តាលឲ្យមានសមភាព រវាង ពហុធានោះ ឬដោយ រូបនិមិត្ត ៖

$$(\bar{P} = \bar{Q}) \Rightarrow (P = Q)$$ ។

ការសង្កេតដំបូង

បើយើងតាង $R = P - Q$ យើងបាន $\bar{R} = \bar{P} - \bar{Q}$ ហើយយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា ទំនាក់ទំនង $\bar{R}(x) = 0$ ដែលត្រូវចំពោះគ្រប់ $x \in A$ => $R(x) = (0)$ ដោយតាង (0) ជាពហុធា ដែលមានមេគុណទាំងអស់សុទ្ធតែសូន្យ ឬ ដោយសរសេរជា រូបនិមិត្ត

$\forall x \in A,\ \bar{R}(x) = 0 \quad => \quad R(x) = 0$

បើយើងហៅថា « សូន្យ » នៃពហុធា R គឺជាតួ $x \in A$ ដែលឲ្យ $\bar{R}(x) = 0$ នោះ កម្មសិទ្ធិនេះចេញមកពី សម្មតិកម្មលើ A និង ទ្រឹស្តីបទដូចតទៅនេះ ៖

<u>ការស្នើ(V,11,3)</u>

បើ A ជាកងសុចរិត ពហុធាមួយមានដឺក្រេ n ហើយយកមេគុណក្នុង A មានយ៉ាងច្រើន n «សូន្យ» ខុសពីគ្នា ។

យើងនឹងបង្ហាញការស្នើនេះ ក្នុងករណីដែល A មានធាតុឯកតា e មួយ ដោយ សន្មតថាគេអាចបានករណីនេះដោយពង្រីក A[2] ។ ការបង្ហាញចែកជាបីដំណាក់។

I. យើងតាងដោយ P ពហុធាមានដឺក្រេយ៉ាងច្រើន n ហើយកំណត់ដោយមេគុណ $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ និង c ជាធាតុមួយនៃ A ។

យើងដាក់ ៖ $b_n = a_n$, $b_{n-1} = a_{n-1} + ca_n$ ហើយជាទូទៅចំពោះ $0 \le p \le n$

(1) $b_p = a_p + ca_{p+1} + c^2a_{p+2} + \ldots + c^r a_{p+r} + \ldots + c^{n-p}a_{p+n-p}$ (តួចុងគេនេះគឺ $c^{n-p}a_n$)

ហើយយើងតាងដោយ Q ពហុធាមានដឺក្រេយ៉ាងច្រើន $n-1$ ហើយកំណត់ដោយមេគុណ $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ ។ បើយើងតាងដោយ $(x - c)$ ពហុធាមានដឺក្រេ មួយ ហើយ

[2] បើ A ជាកងសុចរិត គេអាចប្រើរបៀបពង្រីកលើ A ដើម្បីឆ្លងពី $Z \to Q$ ដោយជាដំបូងគេ ធ្លុះ A (symétriser A) ចំពោះលេខគុណ ។ ហើយដល់បាន សំនុំថ្មី K ហើយ គេក៏ពង្រីក K ដោយលេខ បូកដែលមាននៅលើ A ។ ហើយគេក៏ប្រើរបៀបនេះចំពោះ A ដែលគ្មានធាតុឯកតា៖ គឺថាគេអាចពង្រីក កង A សុចរិត ដែលគ្មានធាតុឯកតា ឲ្យបានជា កងសុចរិតមួយថ្មីដែលមានធាតុឯកតា ។

មេគុណ $(-c, 1)$ និង b_0 [3] ពហុធា (សូន្យ ឬ ដឺក្រេសូន្យ) កំណត់ដោយ មេគុណតែមួយគត់ b_0 នោះដោយធ្វើលេខជម្ពូតាយើងអាចពិនិត្យបញ្ជាក់ សមភាព ៖

(2) $P = (x-c)Q + (b_0)$ [4]

II. យើងបាន : $b_0 = a_0 + a_1c + \dots\dots + a_pc^p + \dots\dots + a_nc^n = \bar{P}(c)$[5]

ដោយ ទំនាក់ទំនង (2) យើងអាចថ្លែង ការស្មើដូចតទៅនេះ៖

ទ្រឹម $(V, 11, 4)$

ដើម្បី ពហុធា P ចែកដាច់ដោយពហុធា $(x-c)$ នោះគ្រាន់តែ c ជា « សូន្យ [6] » នៃ P ហើយ ដូច្នោះ ផលចែកនៃ P ដោយ $(x-c)$ គឺ ពហុធា Q ដែលមានដឺក្រេ តូចជាងមួយ ឯកតា បើធៀបទៅនឹងដឺក្រេនៃ P ។

III. បើ ពហុធា P មានចំនួន n « សូន្យ » ខុសៗគ្នា $c_1, c_2, \dots\dots, c_n$ នោះទ្រឹម $(V, 11, 4)$ យកមកអនុវត្តទៅលើ P និង c_1 អាចឲ្យយើងអាស់អាងថាមាន ពហុធា Q_1ដែលមាន ដែលមានដឺក្រេ $(n-1)$ យ៉ាងច្រើន ដែលឲ្យ $P = (x - c_1)Q_1$ ហើយបើ A មិនមានតួចែកនៃសូន្យទេនោះ ទំនាក់ទំនង៖

$\bar{P}(c_k) = (c_k - c_1)\,\overline{Q_1}(c_k) = 0 \Rightarrow \overline{Q_1}(c_k) = 0$ ចំពោះ $k \geq 2$

ដោយ ប្រើជាថ្មី ទ្រឹម $(V, 11, 4)$ យកមកអនុវត្តទៅលើ Q_1 និង c_2 យើងឃើញថា Q_1 ចែកដាច់នឹង $(x - c_2)$ ហើយផលចែកគឺ ពហុធា Q_2 មានដឺក្រេ $n-2$ យ៉ាងច្រើន ដែលមាន $c_3, \dots\dots, c_n$ ជា « សូន្យ » ។ ហើយដោយជិតបន្តិចម្តងៗ (ដោយរ៉េគារ៉ង់មិនអនន្ត) គេក៏បង្ហាញថា P ចែកដាច់ដោយ ការគុណនៃកត្តា $(x - c_1)(x - c_2)\dots.(x - c_n)$ ហើយផលចែកចុងក្រោយ Q_n គឺពហុធា សូន្យឬ មានដឺក្រេសូន្យ កំណត់ដោយមេគុណតែមួយ

---

[3] បានដោយ ឲ្យ $p = 0$ នៅក្នុង (1)

[4] ដើម្បីបាន ទំនាក់ទំនងនេះ យើងគ្រាន់តែ ធ្វើលេខគុណ រវាង ពីរពហុធា ដោយ $Q = (b_1, b_2, \dots\dots, b_{n-1})$

[5] មើលនិយមន័យ អនុគមន៍ពហុធា $\bar{P}(x)$ ហើយ (2) ទៅជា $P = (x-c)Q + \bar{P}(c)$

[6] « សូន្យ »តាមការសន្មតខាងលើ គឺថា $\bar{P}(c) = 0$

គត់ a_n ។ ដូច្នេះយើងឃើញថា ពហុធា P ពុំអាចមាន «សូន្យ» c_{n+1} ខុសពី $c_1, \ldots, c_n$ ហើយមិនស្មើនឹងសូន្យនោះទេ (គឺថា បើមាន c_{n+1} នោះ $c_{n+1} = 0$)។

បើ A ជាកង់សុចរិត មានធាតុដល់អនន្ត យើងអាច សម្គាល់ ពហុធាដែលយកមេគុណក្នុង A ថាដូចគ្នានឹង អនុគមន៍-ពហុធា ដែលធ្វើឲ្យការសិក្សាទៅជាងាយបំផុត។

នៅគ្រប់ករណី យើងអាចសម្គាល់ ពហុធាដឺក្រេសូន្យ ដោយមេគុណតែមួយគត់ ៖ ពីព្រោះថា បើយើងតាងដោយ (a) ពហុធាដឺក្រេសូន្យមានមេគុណ a យើងឃើញថា ការអនុវត្តន៍ $a \to (a)$ កំណត់ អ៊ីសូមោហ្វីស ពី A ទៅ សំនុំនៃពហុធាទាំងនោះ ។ គេក៏អាចសម្គាល់ ពហុធា (a) ទៅនឹងចំនួនមិនប្រែប្រួល a (អនុគមន៍ យកចំនួន a ជានិច្ច) ។ ដូច្នេះ « កង់ពហុធា យកមេគុណក្នុង A » ជា « កង់ A ដែលពង្រីកតាមពីជគណិត » ។

<u>សមីការពីជគណិត (*Equations algèbriques*)</u>

គេហៅថា សមីការពីជគណិត លើកង់ A គឺទំនាក់ទំនងមានរាង $\bar{P}(x) = 0$ ដោយ P ជាពហុធាយកមេគុណក្នុង A ។ ចំនួន សូន្យនៃ P ហៅថាសូន្យ ឬ រឹស នៃសមីការ ៖ គឺជាតុនៃ A ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។

ត្រូវប្រយ័ត្នថា សំនុំនៃសូន្យ ជាប់ទាក់ទងនឹង កង់ ដែលគេដាក់ ៖ ដូចជា សមីការ $x^2 = 2$ មិនមានរឹសនៅក្នុងអង្គ Q នៃចំនួនសនិទាន តែមានរឹសនៅក្នុងអង្គ R នៃចំនួនពិត។ សមីការ $x^2 + 1 = 0$ មិនមានរឹសនៅក្នុង R តែមានរឹស នៅក្នុងអង្គ C នៃចំនួនកុំផ្លិច។

ទ្រឹស្តី នៃអនុគមន៍ មានអថេរកុំផ្លិច (*fonctions de variable complexe*) អាចឲ្យទ្រឹស្តីបទជាគ្រឹះមួយហៅថា ទ្រឹស្តីបទអាឡំបែរ (*théorème d'Alembert*) ដូចតទៅនេះ៖

ពហុធាមានដឺក្រេ $n \geq 1$ យកមេគុណក្នុង C មាន សូន្យ យ៉ាងហោចណាស់មួយនៅក្នុង C។

ដោយប្រើឡឹមដែលបានបង្ហាញរួចមកហើយ គេអាចទាញយកដោយថ្ងៃថា ៖ គ្រប់ ពហុធា មានដឺក្រេ n អាចបំបែកជា n កត្តាគុណ ដោយកត្តានីមួយៗមានតែ មួយដឺក្រេ (*Tout polynôme de degré n se décompose en un produit de n facteurs*

$du\ premier\ degré)$ ។

======================== **ចប់ ជំពូក** V =======================