

2. លំបំណោទនៃការពង្រីក (Problèmes d'extension).

យើងមើលឲ្យបានទូលំទូលាយ ហើយឧបមាថាមានសំនុំ D មួយ (សំនុំដែលយើងចេញដំណើរ) មានវិធីគណនា មួយឬច្រើន (ជាច្បាប់ក្នុង) ។ យើងអាចធ្វើ D ឲ្យកាន់តែធំ ដើម្បីឲ្យ « វិធីគណនាប្រាស » (opérations inverses) ដូចជា ការដកអំពីចំនួនមួយ ដែលគេឲ្យ ការចែកដោយចំនួនមួយដែលគេឲ្យ ការរករឹសការេនៃចំនួនមួយ អាចធ្វើ ទៅបាននៅក្នុងសំនុំពង្រីក E ៖ ការពង្រីកបែបនេះហៅថា « ការពង្រីកពីជគណិតនៃ D »

(une extension algébrique de D) ។

ដើម្បី កំណត់តាមគណិតសាស្ត្រនូវការពង្រីកនៃ D យើងចាប់ផ្តើមឡើងដោយសាងសង់នូវសំនុំ E មួយ មានវិធីគណនាស្រដៀងគ្នានឹងវិធីគណនានៃ D ។ ហើយយើងយក វិធីគណនា ផ្ទៃផ្ទង់នឹងគ្នា ក្នុង D និងក្នុង E ដោយមាន សញ្ញា (signe) ដូចគ្នា។ បន្ទាប់មកយើងកំណត់ ការអនុវត្តន៍ អាំងស៊ិចទីវ f មួយពី D ទៅ E ដែលអាចឲ្យយើងស្គាល់ធាតុ x មួយនៃ D ផ្ទុំទៅនឹងធាតុ $f(x)$ នៃ E ។ ដើម្បី ឲ្យការសំគាល់នោះមិនជួបប្រទះការផ្ទុយគ្នា នោះត្រូវតែ f រក្សានូវកម្មសិទ្ធិទាំងអស់ ឬនិយាយម្យ៉ាងទៀត ត្រូវ f កំណត់នូវ អ៊ីសូម៉ូហ្វីស្ម (isomorphisme) ពី D ទៅមួយផ្នែក នៃ E ។ អ៊ីសូម៉ូហ្វីស្ម គឺជា ការអនុវត្តន៍ បីសេចក្តី រវាង ពីរសំនុំមានរចនាសម្ព័ន្ធ (deux ensembles structurés) ហើយការអនុវត្តន៍នោះ និងការអនុវត្តន៍ប្រាសរបស់វា ត្រូវរក្សានូវរចនាសម្ព័ន្ធទាំងអស់ នោះទៀត។ ដើម្បីការពង្រីកនេះ យើងឧបមាថា D^* កន្លះគ្រូប អាបេលីអៀង គឺជាសំនុំ ដែល វិធីគណនាមានលក្ខណៈផ្គុំ និង លក្ខណៈត្រលប់ ដែលកត់ដោយ $*$ ។ នៅពេល នោះ ការពង្រីក (E, f) មួយនៃ D^* នឹងកំណត់ដោយ ៖

1/ កន្លះគ្រូប អាបេលីអៀង E ដែលវិធីគណនាកត់ដោយសញ្ញា $*$ ដូចគ្នា

2/ អាំងស៊ិចស្យុង f ពី D ទៅក្នុង E បំពេញ $f(x * y) = f(x) * f(y)$, $\forall x \in D, \forall y \in D$ ។

បើ D មានធាតុ នប៉ុសកលិដ្ឋ e នៅពេលនោះ $f(e)$ ត្រូវតែជាធាតុ នប៉ុសកលិដ្ឋ ចំពោះ E ។
 តែយើងទើបនឹងឃើញថា សំនុំ N នៃចំនួនគត់ ជា កន្លះគ្រុបអាបេលីអៀង ចំពោះលេខ
 គុណ ក៏ដូចចំពោះលេខ បូក។ ចំណោទ ដក(សង)ដោយចំនួន a និង ចំណោទចែក
 ដោយចំនួន a គឺជាទិដ្ឋភាពពីរ នៃចំណោទតែមួយគឺ ៖ a និង b ជាពីរចំនួន នៃ កន្លះ
 គ្រុប D ចូររក ធាតុ x មួយក្នុង D ដែលឲ្យ $x * a = b$ ។
 ចំណោទនេះ ងាយនឹងដោះស្រាយទេ បើ D មានធាតុ នប៉ុសកលិដ្ឋ e ហើយបើមានធាតុ
 a' នៃ D ហៅថា « ឆ្លុះនៃ a » (a' symétrique de a) ដែលបំពេញ $a * a' = e$ ។ ពីព្រោះ
 ថា ទំនាក់ទំនង $x * a = b \Rightarrow x * a * a' = b * a' \Rightarrow x * (a * a') = b * a' \Rightarrow$
 $x * e = b * a' \Rightarrow x = b * a'$ ។ ដូច្នេះ ចំណោទនេះមានចម្លើយតែមួយគត់គឺ $x = b * a'$ ។

បើយើងសន្មតថាធាតុ « a អាចឆ្លុះ » (a est symétrisable) កាលណា a
 មានធាតុឆ្លុះ (ដូចជា a')។ គឺថា $a * a' = e$

នៅពេលនោះ យើងអាច ដាក់ចំណោទជាទូទៅមួយ ដោយថ្លែងថា៖

ចំណោទ

តើមានធាតុណាខ្លះក្នុង កន្លះគ្រុបអាបេលីអៀង ដែលយើងអាចធ្វើឲ្យទៅជា « អាចឆ្លុះ »
 ដោយយើងពង្រីក D ដោយសមរម្យ ?
 ជាដំបូងយើង បង្កើតលក្ខខណ្ឌ ជាចាំបាច់ (condition nécessaire) [យើងនឹងឃើញថា
 លក្ខខណ្ឌនេះក៏គ្រប់គ្រាន់ដែរ] ដើម្បីឲ្យ ធាតុមួយដែលគេឲ្យនៃ D អាចឆ្លុះ ដោយការ
 ពង្រីកនៃ D ។

លក្ខខណ្ឌ ជាចាំបាច់ (condition nécessaire)

(E, f) តាងការពង្រីកនៃ D ។ ដើម្បីសម្រួលក្នុងការសរសេរ យើងសន្មតសរសេរចំពោះ

ធាតុ x មួយនៃ D ចំណាំដោយ $f(x)$ នៃ E ។ យើងសន្មតថា E មានធាតុ e ឬសកលីដ្ឋ e ហើយតាងដោយ a ធាតុមួយនៃ D ដែល មាន ធាតុចំនួន នៅក្នុង E ។ ដូច្នេះធាតុចំនួន a' នោះ ត្រូវបំពេញ $a' * a = e$ ។ ដូច្នេះ យើងឃើញថា ទំនាក់ទំនង $a * x = a * y \Rightarrow a' * a * x = a' * a * y \Rightarrow e * x = e * y \Rightarrow x = y$ ។ ដូច្នេះ បើយើងយកតែ ធាតុនៅក្នុង D យើងអាចថា ៖ ទំនាក់ទំនង $[x \in D, y \in D \text{ ហើយ } a * x = a * y] \Rightarrow x = y$ ។

និយមន័យ

នៅក្នុង កន្លះគ្រុបអាបេលីអៀង D ធាតុ a មួយស្មើជ្រុង កាលណាទំនាក់ទំនង

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y \quad \forall$$

ដោយ និយមន័យនេះ យើងអាចថា ៖

ការស្មើ (V,2,1)

ដើម្បីឲ្យធាតុ a មួយ នៃកន្លះគ្រុបអាបេលីអៀង D ទៅជាធាតុ « អាចចំនុះ »

(est symétrisable) បន្ទាប់ពីបានពង្រីក D នោះ a ត្រូវតែស្មើជ្រុង (a doit être régulier) ។

សង្កេត

I. គេអាច បង្ហាញកម្មសិទ្ធិនេះ ដោយសង្កេតឃើញថា ចម្លើយនៃសមីការ $a * x = b$ នឹងមានកាន់តែច្រើន កាលណា យើងពង្រីក D ។ ដោយសមីការនេះ ឲ្យចម្លើយតែមួយ គត់ កាលណា ធាតុ a អាចចំនុះ។ ដូច្នេះ សមីការនេះ មានយ៉ាងច្រើន មួយចម្លើយ កាលណា មានការពង្រីក D ដែលធ្វើឲ្យ a អាចចំនុះ ។ បានន័យថា

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y \quad \text{គឺថា } a \text{ ស្មើជ្រុង។}$$

II. ចំពោះការប្រតិបត្តិ គេអាចនិយាយថា ធាតុ a ស្មើជ្រុង កាលណាគេអាច លប់ a ទាំងសង្វាង (on peut simplifier par a) នៃ ទំនាក់ទំនង។ ដូចជាក្នុង $a * x = a * y$

បើ a ស្មើជ្រុង គេលប់ a ទាំងសង្វាង ហើយគេបាន $x = y$ ។ ហេតុនេះហើយ បានជា គេថា បើគ្រប់ធាតុនៃកងក្រុម ស្មើជ្រុង នោះគេថាកងក្រុមនោះបំពេញក្បួនសម្រួល (demi – groupe satisfait la règle de simplification) ដូចជាកងក្រុមបូក នៃចំនួន គត់។ តែ ធាតុ សូន្យ (0) មិនស្មើជ្រុងទេ នៅក្នុង កងក្រុមគុណ នៃចំនួនគត់។ ពីព្រោះ $0 \times 5 = 0 \times 6$ មិនឲ្យ $5 = 6$ ទេ ។