II-4. ដោយចំនួនពិតបួន a, b, c, d ខុសពីគ្នា គេហៅថាប្រភាគ អាណាមូនីក (un rapport anharmonique) គឺ ចំនួន $r(a,b,c,d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ ។

a/ ចូររក ពែមុតាស្យុង (permutation) នៃសំនុំ (a,b,c,d) ដែលរក្សានូវចំនួន នៃ ប្រភាគ ។

b/ បង្ហាញថា ពែមុតាស្យុងទាំងនោះ តាក់តែងបាន ជា គ្រុបរងមួយ (sous-groupe) នៃគ្រុប (du groupe) នៃ ពែមុតាស្យុង នៃចំនួន a, b, c, d ។

c/ a', b', c', d' ការតម្រៀបមួយ (un rangement) នៃបួនចំនួន a, b, c, d ។ ចូរបង្ហាញថាមាន ពែមុតាស្យុង p ដែលរក្សានូវចំនួននៃប្រភាគ ហើយថែមទាំងផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង p(a') = a ។

<u>ចម្លើយ</u>

ចំណោទនេះ មានប្រយោជន៍ ត្រង់ធ្វើឲ្យយើង កាន់តែយល់ច្បាស់ អ្វីដែលហៅថា អនុគមន៍ អ្វីដែលជាលទ្ធផលបានមកពីអនុគមន៍ ។ តែនៅពេលខ្លះ បើសិនជាគេ សរសេរ លទ្ធផលនៃអនុគមន៍ ជំនួសអនុគមន៍ នោះយើងក៏អាចយល់បានថា នេះជាអនុគមន៍ នេះជាលទ្ធផលនៃអនុគមន៍ ។

ដូចនៅពេលនេះ ពែមុតាស្យុង ជាអនុគមន៍ មានអថេរ (a,b,c,d) ហើយ លទ្ធផល គឺ វត្ថុតម្រៀបដូចជា b, c, a, d បើគេតាងអនុគមន៍ដោយ p នោះគេសរសេរ

$p(a,b,c,d) = (b,c,a,d)$ ដែលមានន័យថា $p(a) = b,\ p(b) = c,\ p(c) = a,\ p(d) = d$

នេះជាការសរសេរត្រឹមត្រូវ ។ តែនៅពេលខ្លះ គេសរសេរកាត់ ជា $p(abcd) = bcad$ ឬ ក៏ថា <u>ពែមុតាស្យុង abcd, bcad,</u> …. ទោះជា a, b, c, d ជាលេខ ឬ ជាតួអក្សរក៏ដោយ ។

ចំពោះលោកអ្នកអានអត្ថបទនេះ សូមអធ្យាស្រ័យទៅតាមការទម្លាប់នេះផងចុះ ។

មុននឹងទៅដល់ចម្លើយ ខ្ញុំសូមធ្វើការសង្កេតដូចតទៅ ៖

-<u>អំពីប្រភាគ អាណាមូនីក (un rapport anharmonique)</u>

ប្រភាគអាណាមូនីក គឺកំនត់ឡើងដោយ ចំនួនពីជគណិត a, b, c, d ហើយ យកតម្លៃ

$r(a,b,c,d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ ។ ឧបមា $r(1,2,3,4) = \frac{3-1}{3-2} : \frac{4-1}{4-2} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ (1)

បើយើង គូអ័ក្ស $x'Ox$ ហើយតាងដោយ ៖

- A ចំណុច នៅលើគូអ័ក្ស $x'Ox$ ដែលមាន អាប់ស៊ីស a => $\overline{OA} = a$
- B ចំណុច នៅលើគូអ័ក្ស $x'Ox$ ដែលមាន អាប់ស៊ីស b => $\overline{OB} = b$
- C ចំណុច នៅលើគូអ័ក្ស $x'Ox$ ដែលមាន អាប់ស៊ីស c => $\overline{OC} = c$
- D ចំណុច នៅលើគូអ័ក្ស $x'Ox$ ដែលមាន អាប់ស៊ីស d => $\overline{OD} = d$

នៅពេលនោះយើងបាន : $c - a = \overline{OC} - \overline{OA} = \overline{AC}$; $c - b = \overline{OC} - \overline{OB} = \overline{BC}$;

$d - a = \overline{OD} - \overline{OA} = \overline{AD}$; $d - b = \overline{OD} - \overline{OB} = \overline{BD}$ ។ នៅពេលនោះប្រភាគ

$r(a,b,c,d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ (2) អាចសរសេរជា $r(A,B,C,D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (3)

ម្យ៉ាងទៀត ក្នុង (3) ដូចជា $\overline{CA}$ គឺ ប្រវែង ពីចំណុច C ទៅចំណុច A ដោយមានសញ្ញា ± ពីមុខ ។ យើងសួរថា បើគេដូរ គល់ O នៃអ័ក្ស $x'Ox$ នោះតើប្រវែងពីចំណុចមួយ ទៅចំណុចមួយ ដូរឬទេ ? យើងឆ្លើយថា ប្រវែងរវាងពីរចំណុចអត់ដូរទេ មានតែ អាប់ស៊ីសនៃចំណុចទេ ដែលដូរ ។ ដូច្នេះ យើងអាចយកចំណុច A ជាគល់ក៏បាន គឺថា ចំពោះគល់ថ្មីនេះ ចំណុច A មានអាប់ស៊ីសសូន្យ ហើយចំណុច B, C, D ក៏មាន អាប់ស៊ីស ដូរទៅតាមនោះដែរ គឺថា៖

អាប់ស៊ីស នៃចំណុច B គឺ $\overline{AB}$ (ក្នុងតម្រុយចាស់ ដែលមានគល់ O អាប់ស៊ីសនៃ B គឺ $\overline{OB}$)

អាប់ស៊ីស នៃចំណុច C គឺ $\overline{AC}$ (ក្នុងតម្រុយចាស់ ដែលមានគល់ O អាប់ស៊ីសនៃ C គឺ $\overline{OC}$)

អាប់ស៊ីស នៃចំណុច D គឺ $\overline{AD}$ (ក្នុងតម្រុយចាស់ ដែលមានគល់ O អាប់ស៊ីសនៃ D គឺ $\overline{OD}$)

អាប់ស៊ីស នៃចំណុច A គឺ $\overline{AA}$ (ក្នុងតម្រុយចាស់ ដែលមានគល់ O អាប់ស៊ីសនៃ A គឺ $\overline{OA}$)

ដោយ (1) ខាងលើ $r(a,b,c,d) = r(1,2,3,4) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{3}{4}$

-បើយើង គណនា ក្នុងតម្រុយ ចាស់ a = $\overline{OA}$ = 1 ; b = $\overline{OB}$ = 2 ; c = $\overline{OC}$ = 3 ; d = $\overline{OD}$ = 4

យើងឃើញ $r(a,b,c,d) = r(1,2,3,4) = \mathbf{\frac{4}{3}}$

-បើយើង គណនា ក្នុងតម្រុយថ្មី a = $\overline{AA}$ = 0 ; b = $\overline{AB}$ = $\overline{OB}$ - $\overline{OA}$ = 2 – 1 = 1

c = $\overline{AC}$ = $\overline{OC}$ - $\overline{OA}$ = 3 – 1 = 2 ; d = $\overline{AD}$ = $\overline{OD}$ - $\overline{OA}$ = 4 – 1 = 3 ដូច្នេះ

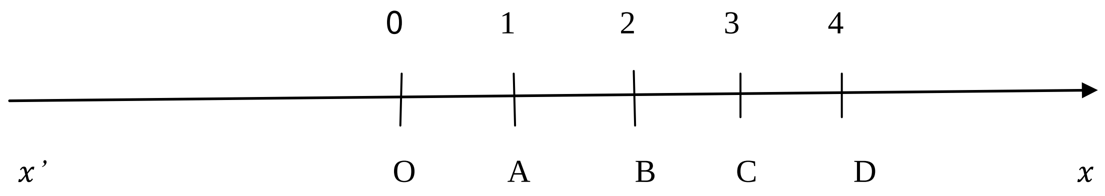
$r(a,b,c,d) = r(0,1,2,3) = \frac{2-0}{2-1} : \frac{3-0}{3-1} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}} \Rightarrow r(0,1,2,3) = r(1,2,3,4)$

<u>ដូច្នេះប្រភាគ មិនប្តូរតម្លៃទេ កាលណាយើងដូរគល់តម្រុយ</u> ។

ដោយ (3) $r(A,B,C,D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$

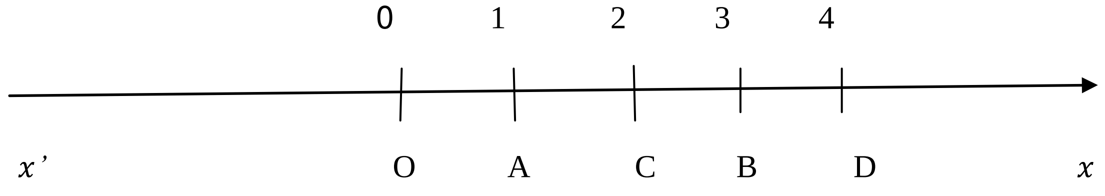
យើងឃើញថា ប្រភាគ អាណាមូនិកនេះ កំនត់ដោយ គូ (A,B) និង គូ(C,D) ។ ដោយលើ អ័ក្ស x′Ox ចំណុច A,B និង C,D ទៅតាម ពៃមុតាស្យុង នោះចំនួន នៃប្រភាគក៏ដូរទៅ តាមនោះដែរ ។ តែដើម្បីថាជា ចំនួនប្រភាគអាណាមូនិក គូ (A,B) និង គូ(C,D) ត្រូវនៅជាមួយគ្នាដដែល ។ ឧទាហរណ៍ ៖

ក / <u>ចំពោះ ពៃមុតាស្យុង ABCD</u> (ដោយយើងយកចម្ងាយពីចំណុចមួយ ទៅ ចំណុច បន្ទាប់ ១ ឯកតា)



ដោយ (3) $r(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{-2}{-1} : \frac{-3}{-2} = 2 \times \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$

ខ / <u>ចំពោះ ពៃមុតាស្យុង ACBD</u> (ដោយប្រើតម្រុយដដែល)



ដោយ (3) $r(ACBD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{-1}{1} : \frac{-3}{-1} = -\mathbf{\frac{1}{3}}$

-ចំពោះ ពែមុតាស្យុង តាមនិយមន័យ ៖

ពែមុតាស្យុង លើសំនុំ X គឺ ការអនុវត្តន៍ ប៊ីស៊ិចទីវ ពី X ទៅ X ។ បើនិយាយតាមពាក្យសាមញ្ញ ចំពោះ X មាន n ធាតុ ពែមុតាស្យុងលើសំនុំ X គឺ ការតម្រៀបជាជួរ n វត្ថុ ។ ដោយការតម្រៀបអាចខុសគ្នាពីមួយទៅមួយ ដោយប្តូរកន្លែងវត្ថុ នោះពែមុតាស្យុងក៏អាចមានច្រើន ។ នៅក្នុងចំណោទនេះ គឺពែមុតាស្យុងលើ បួនអក្សរ A, B, C, D ដូច្នេះមានពែមុតាស្យុង ទៅដល់ 4 ! = 24 ។ ដើម្បីងាយយល់ ខ្ញុំយកឧទាហរណ៍ ដែលមានតែត្រឹម បីអក្សរ គឺ A, B, C នៅពេលនោះ មានតែ 3 ! = 6 ពែមុតាស្យុង ។

ឧទាហរណ៍ ពែមុតាស្យុងអក្សរ A, B, C (permutation) ដាក់ក្នុងតារាង ដូចតទៅនេះ ៖

អថេរ	A	B	C	អនុគមន៍	
១	A	B	C	I	ឧបមាគេឲ្យសំនុំ X = {A,B,C} ហើយនិង ការអនុវត្តន៍ I, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 កំនត់ពី X ទៅ X ដោយតារាង នៅខាងឆ្វេង គឺ ៖
២	A	C	B	f_1	
៣	B	A	C	f_2	
៤	B	C	A	f_3	
៥	C	A	B	f_4	
៦	C	B	A	f_5	

$$(T2)\begin{cases} I(A)=A,\ I(B)=B,\ I(C)=C\ ; & f_1(A)=A,\ f_1(B)=C,\ f_1(C)=B \\ f_2(A)=B,\ f_2(B)=A,\ f_2(C)=C\ ; & f_3(A)=B,\ f_3(B)=C,\ f_3(C)=A \\ f_4(A)=C,\ f_4(B)=A,\ f_4(C)=B\ ; & f_5(A)=C,\ f_5(B)=B,\ f_5(C)=A \end{cases}$$

ដោយ របស់ដែលតម្រៀប មានតែ ៦ គឺ

1/ ABC បានន័យថា (ABC) -> (ABC) គឺ ពែមុតាស្យុង I ឲ្យរូបភាពដដែល

2/ ACB បានន័យថា (ABC) -> (ACB) គឺ ពែមុតាស្យុង f_1 ប្តូរកន្លែងរវាង B និង C

3/ BAC បានន័យថា (ABC) -> (BAC) គឺ ពែមុតាស្យុង f_2 មាន អក្សរ B ទី ១

4/ BCA បានន័យថា (ABC) -> (BCA) គឺ ពែមុតាស្យុង f_3 ប្តូរកន្លែងរវាង A និង C

5/ CAB បានន័យថា (ABC) -> (CAB) គឺ ពែមុតាស្យុង f_4 មាន អក្សរ C ទី ១

6/ CBA បានន័យថា (ABC) -> (CBA) គឺ ពែមុតាស្យុង f_5 ប្តូរកន្លែងរវាង A និង B

ដូច្នេះ កាលណាយើង ផ្សំពែមុតាស្យុងពីរ យើងនឹងបានពែមុតាស្យុងថ្មីមួយទៀត ដែលនៅតែ ការតម្រៀប បីអក្សរដដែល ដូច្នេះ ពែមុតាស្យុងថ្មីនេះ ត្រូវស្មើនឹងពែមុតាស្យុងណាមួយ ក្នុងចំណោម ពែមុតាស្យុងទាំង ៦ ។ យើងនឹងបញ្ជាក់ការអះអាងនេះ ដោយ ការគណនាខាងក្រោម (មើលតារាង និង (T2) ខាងលើ) ៖

$f_1 \circ f_1\ (ABC) = f_1[f_1(ABC)] = f_1[ACB] = ABC = I(ABC) \Rightarrow f_1 \circ f_1 = I$
$f_1 \circ f_2\ (ABC) = f_1[f_2(ABC)] = f_1[BAC] = CAB = f_4(ABC) \Rightarrow f_1 \circ f_2 = f_4$
$f_1 \circ f_3\ (ABC) = f_1[f_3(ABC)] = f_1[BCA] = CBA = f_5(ABC) \Rightarrow f_1 \circ f_3 = f_5$
$f_1 \circ f_4\ (ABC) = f_1[f_4(ABC)] = f_1[CAB] = BAC = f_2(ABC) \Rightarrow f_1 \circ f_4 = f_2$
$f_1 \circ f_5\ (ABC) = f_1[f_5(ABC)] = f_1[CBA] = BCA = f_3(ABC) \Rightarrow f_1 \circ f_5 = f_3$

$f_2 \circ f_1\ (ABC) = f_2[f_1(ABC)] = f_2[ACB] = BCA = f_3(ABC) \Rightarrow f_2 \circ f_1 = f_3$
$f_2 \circ f_2\ (ABC) = f_2[f_2(ABC)] = f_2[BAC] = ABC = I(ABC) \Rightarrow f_2 \circ f_2 = I$
$f_2 \circ f_3\ (ABC) = f_2[f_3(ABC)] = f_2[BCA] = ACB = f_1(ABC) \Rightarrow f_2 \circ f_3 = f_1$
$f_2 \circ f_4\ (ABC) = f_2[f_4(ABC)] = f_2[CAB] = BCA = f_3(ABC) \Rightarrow f_2 \circ f_4 = f_3$
$f_2 \circ f_5\ (ABC) = f_2[f_5(ABC)] = f_2[CBA] = CAB = f_4(ABC) \Rightarrow f_2 \circ f_5 = f_4$

$f_3 \circ f_1\ (ABC) = f_3[f_1(ABC)] = f_3[ACB] = BAC = f_2(ABC) \Rightarrow f_3 \circ f_1 = f_2$
$f_3 \circ f_2\ (ABC) = f_3[f_2(ABC)] = f_3[BAC] = CBA = f_5(ABC) \Rightarrow f_3 \circ f_2 = f_5$
$f_3 \circ f_3\ (ABC) = f_3[f_3(ABC)] = f_3[BCA] = CAB = f_4(ABC) \Rightarrow f_3 \circ f_3 = f_4$
$f_3 \circ f_4\ (ABC) = f_3[f_4(ABC)] = f_3[CAB] = ABC = I(ABC) \Rightarrow f_3 \circ f_4 = I$
$f_3 \circ f_5\ (ABC) = f_3[f_5(ABC)] = f_3[CBA] = ACB = f_1(ABC) \Rightarrow f_3 \circ f_5 = f_1$

$f_4 \circ f_1\ (ABC) = f_4[f_1(ABC)] = f_4[ACB] = CBA = f_5(ABC) \Rightarrow f_4 \circ f_1 = f_5$
$f_4 \circ f_2\ (ABC) = f_4[f_2(ABC)] = f_4[BAC] = ACB = f_1(ABC) \Rightarrow f_4 \circ f_2 = f_1$
$f_4 \circ f_3\ (ABC) = f_4[f_3(ABC)] = f_4[BCA] = ABC = I(ABC) \Rightarrow f_4 \circ f_3 = I$
$f_4 \circ f_4\ (ABC) = f_4[f_4(ABC)] = f_4[CAB] = BCA = f_3(ABC) \Rightarrow f_4 \circ f_4 = f_3$
$f_4 \circ f_5\ (ABC) = f_4[f_5(ABC)] = f_4[CBA] = BAC = f_2(ABC) \Rightarrow f_4 \circ f_5 = f_2$

$f_5 \circ f_1\ (ABC) = f_5[f_1(ABC)] = f_5[ACB] = CAB = f_4(ABC) \Rightarrow f_5 \circ f_1 = f_4$
$f_5 \circ f_2\ (ABC) = f_5[f_2(ABC)] = f_5[BAC] = BCA = f_3(ABC) \Rightarrow f_5 \circ f_2 = f_3$
$f_5 \circ f_3\ (ABC) = f_5[f_3(ABC)] = f_5[BCA] = BAC = f_2(ABC) \Rightarrow f_5 \circ f_3 = f_2$
$f_5 \circ f_4\ (ABC) = f_5[f_4(ABC)] = f_5[CAB] = ACB = f_1(ABC) \Rightarrow f_5 \circ f_4 = f_1$
$f_5 \circ f_5\ (ABC) = f_5[f_5(ABC)] = f_5[CBA] = ABC = I(ABC) \Rightarrow f_5 \circ f_5 = I$

ដោយដាក់លទ្ធផលខាងលើ ក្នុងតារាង រាងបួនជ្រុងស្មើ (ការេ) មាន I, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 នៅក្នុងជួរដេក និង ជួរឈរ យើងឃើញថា ការ បណ្តាក់ (°) ពែមុតាស្យុង ជាច្បាប់

តាក់តែងក្នុង (loi de composition interne) លើសំនុំ E = $\{ I, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \}$

TAB-P01

∘ ជួរឈរ / ជួរដេក	I	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
I	I	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	I	$f_1 \circ f_2 = f_4$	f_5	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	I	f_1	f_3	f_4
f_3	f_3	f_2	f_5	f_4	I	f_1
f_4	f_4	f_5	f_1	I	f_3	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	I

យើងនឹងខំបកស្រាយនូវលទ្ធផល ក្នុងតារាងនេះ ឲ្យបានច្រើន ពីព្រោះជាឱកាស សម្រាប់យល់នូវនិយមន័យផ្សេងៗដែលបានជួបរួចមកហើយ ដូចជា ច្បាប់តាក់តែង ផ្សំក្នុងលើ E (loi de composition interne sur E) សញ្ញាណគ្រុប(groupe) សញ្ញាណគ្រុបរង (sous-groupe) លក្ខណត្រលប់ (commutativité) លក្ខណផ្តុំ (associativité) ជាដើម ។

<u>សង្កេត</u>

1/ សំនុំ E = $\{I, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ ផ្សំជាមួយនឹងច្បាប់ (°) នោះបានជាគ្រុប ៖

a/ (°) ជាច្បាប់ក្នុង <=> $\forall f_i \in E, \forall f_j \in E,\ (f_i \circ f_j) \in E$

ដោយមើលតារាង TAB-P01 យើងឃើញថាធាតុទាំងអស់នៅក្នុងតារាងនោះ សុទ្ធតែ នៅក្នុង សំនុំ E

b/ (°) មានលក្ខណផ្តុំ <=> $\forall (f_i, f_j, f_k),\ (f_i \circ f_j)\circ f_k = f_i \circ (f_j \circ f_k)$ (1)

វិឡាស្យុង (1) ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ គ្រប់ធាតុទាំងអស់នៃ E នៅពេលនេះខ្ញុំបង្ហាញតែ មួយគ្រាន់ជាឧទាហរណ៍ គឺ $(f_1 \circ f_3)\circ f_4 = f_1 \circ (f_3 \circ f_4)$

ដោយប្រើតារាង យើងរក $(f_1 \circ f_3)\circ f_4$ ហើយបន្ទាប់មកយើងរក $f_1\circ(f_3\circ f_4)$ រួចហើយបាន យើងប្រៀបផ្ទឹម លទ្ធផលទាំងពីរ តើស្មើគ្នាឬទេ ?

$(f_1\circ f_3)\circ f_4 = f_5\circ f_4 = f_1$ និង $f_1\circ(f_3\circ f_4) = f_1\circ I = f_1$ => ឃើញថាស្មើគ្នា ។

c/ I ពៃមុតាស្យុងដែលឲ្យដដែល ជាធាតុនប៉ុសកលិង្គ (élément neutre) <=>

$\forall f_i,\ f_i\circ I = I\circ f_i = f_i$

d/ (°) មិនមានលក្ខណ ត្រលប់ ទេ (non commutatif) ពីព្រោះ

$f_1\circ f_2 = f_4$ និង $f_2\circ f_1 = f_3$

e/ គ្រប់ f_i ត្រូវមាន $(f_i)^{-1}$ <=> $\forall f_i,\ \exists f_j$ ដែលឲ្យ $f_i\circ f_j = f_j\circ f_i = I$

ចំពោះ f_1 ក្នុងតារាង យើងមាន $f_1\circ f_1 = I$

ចំពោះ f_2 ក្នុងតារាង យើងមាន $f_2\circ f_2 = I$

ចំពោះ f_3 ក្នុងតារាង យើងមាន $f_3\circ f_4 = I$

ចំពោះ f_4 ក្នុងតារាង យើងមាន $f_4\circ f_3 = I$

} $f_3\circ f_4 = f_4\circ f_3 = I$

ចំពោះ f_5 ក្នុងតារាង យើងមាន $f_5\circ f_5 = I$

ដូច្នេះ សំនុំ E និង ច្បាប់ (°) ផ្សំបានជា គ្រុបមួយ ។

2/ តើនៅក្នុង គ្រុប (E, °) នេះ មាន គ្រុបរង អ្វីខ្លះ ក្រៅពី (E, °)?

ដើម្បីថា សំនុំរង G ជា គ្រុបរង នៃគ្រុប (E, °) លុះត្រាតែ (G,°) បំពេញ ៖

a/ បើ $f_i \in G$ នោះត្រូវ $f_i^{-1} \in G$

b/ បើ $f_i \in G$ និង $f_j \in G$ នោះត្រូវ $(f_i\circ f_j) \in G$ និង $(f_j\circ f_i) \in G$ (ច្បាប់នៅក្នុង គ្រុបរង ត្រូវជាច្បាប់ផ្សំក្នុង) ។

ដោយមើលទៅតាមតារាង យើងមាន គ្រុបរង ដូចតទៅ ៖

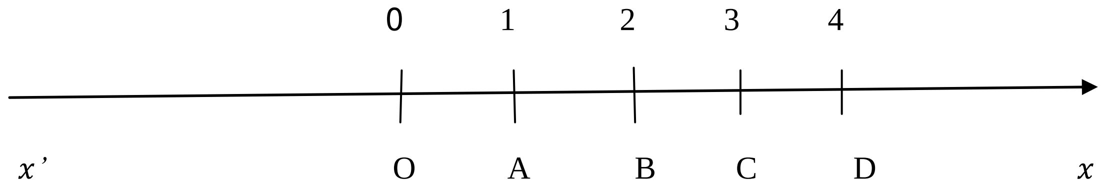
$G1 = \{I, f_1\}$; $G2 = \{I, f_2\}$; $G3 = \{I, f_5\}$; $G4 = \{I, f_3, f_4\}$ ។

នេះជាការពន្យល់ក្រៅទេ តនៅនេះយើងឆ្លើយតាមសំនួរ ៖

a/ ចូររក ពែមុតាស្យុង (permutation) នៃសំនុំ (a, b, c, d) ដែលរក្សានូវចំនួន នៃ ប្រភាគ $r(a,b,c,d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ ។

យើងបានបង្ហាញរួចមកហើយ យើងអាចដោះស្រាយនូវសំនួរនេះដោយ គូរនៅលើ អ័ក្ស x'Ox នូវចំណុច A, B, C, D ដែលមាន អាប់ស៊ីស a, b, c, d ហើយ ដើម្បីតាង ចំណុចទាំងបួន លើអ័ក្ស យើងយក a = 1, b = 2 ; c = 3 ; d = 4 ។ ហើយយើងបាន ចំនួនប្រភាគ $r(a,b,c,d) = r(1,2,3,4) = \frac{4}{3}$ ។ នៅពេលនេះ គេឲ្យយើងរក ពែមុតាស្យុង នៃបួនចំណុច A,B,C,D នៅលើអ័ក្ស x'Ox ដែល ធ្វើឲ្យ តម្លៃ នៃប្រភាគ $r(a,b,c,d)$ នៅតែស្មើនឹង $\frac{4}{3}$ ដដែល ។ ពីព្រោះនៅលើអ័ក្ស x'Ox អាប់ស៊ីស នៃចំណុចនីមួយៗ ប្តូរ កាលណា ចំណុចនោះប្តូរកន្លែង (ក្រៅពីគល់ O) ។

ចូរមើលរូបខាងក្រោម ៖



តម្រុយនេះ តំណាង ពែមុតាស្យុង ABCD ហើយចំពោះ ពែមុតាស្យុងនេះ ប្រភាគ r អាចសរសេរជា $r(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{-2}{-1} : \frac{-3}{-2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

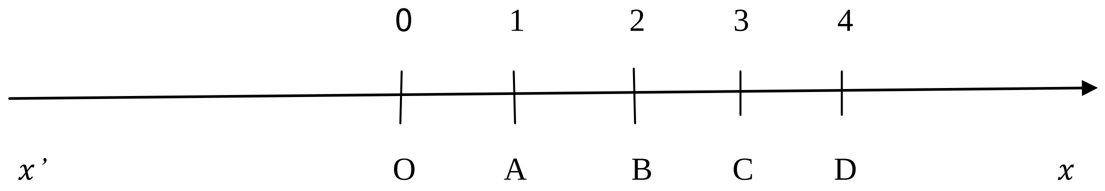
ចូរសង្កេតថា ពែមុតាស្យុង គឺការតម្រៀបអក្សរ ដូច្នេះ មាន អក្សរ កន្លែងទី១ អក្សរ កន្លែងទី២ អក្សរ កន្លែងទី៣ .... ។ ដោយយោងតាមនេះ ពែមុតាស្យុង ABCD ខុសពី ពែមុតាស្យុង BACD ហើយអាប់ស៊ីសនៃចំណុច B នៅពែមុតាស្យុង ABCD ស្មើនឹង 2 ចំណែក អាប់ស៊ីស នៃចំណុច B នៅពែមុតាស្យុង BACD ស្មើនឹង 1 ពីព្រោះ B ក្នុង BACD

នៅកន្លែងទី១ ។   ហេតុនេះហើយបានជាថា កាលណាពៃមុតាស្យុងដូរ ប្រភាគ r ក៏ដូរដែរ ។ យើងអាចថា r ជាអនុគមន៍ ដែលមានតម្លៃប្តូរទៅតាមពៃមុតាស្យុង[1] ។

ដោយ $\frac{4}{3}$ អាចសរសេរ ជា $\frac{4}{3} = \frac{2\times 2}{3} = \frac{2}{1}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2}$ ឬមួយ

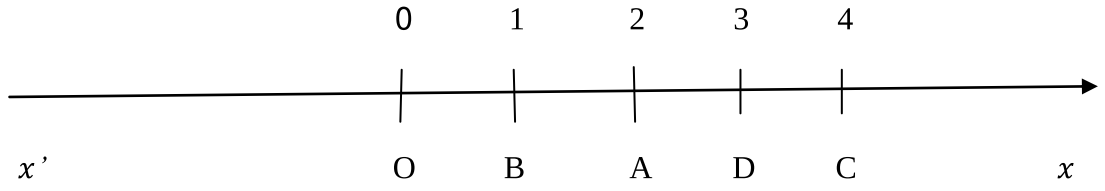
$\frac{4}{3} = \frac{2\times 2}{3} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{1} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$

1/ $\frac{4}{3} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ => ដោយផ្ទួផ្ទង់ $\overline{CA} = -2$; $\overline{CB} = -1$; $\overline{DA} = -3$; $\overline{DB} = -2$



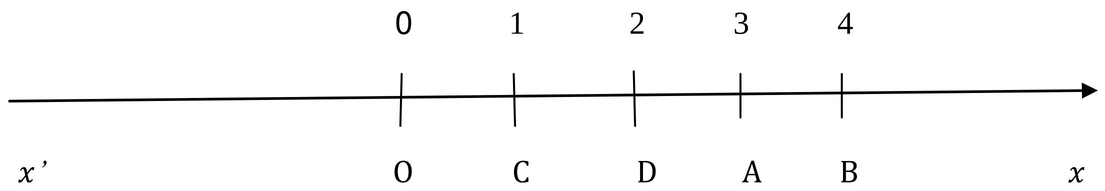
នៅពេលនេះ យើងបាន ពៃមុតាស្យុង ដើមដំបូងគឺ ABCD ។

ដោយប្រភាគ នេះ ដើរដោយគូៗ គឺ (A,B)មួយគូ និង (C,D) មួយគូ នៅក្នុងប្រភាគដើម $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ បើកាលណា យើង ជំនួស A ↔ B និង C ↔ D យើងឃើញថាតម្លៃប្រភាគ នៅដដែល ។ ដូច្នេះ យើងបាន ពៃមុតាស្យុងមួយទៀត គឺ BADC



យើងអាចបញ្ជាក់ដោយគណនា $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{-2}{-3} : \frac{-1}{-2} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{1} = \frac{4}{3}$ (ត្រូវ)

2/ $\frac{4}{3} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ => ដោយផ្ទួផ្ទង់ $\overline{CA} = 2$; $\overline{CB} = 3$; $\overline{DA} = 1$; $\overline{DB} = 2$

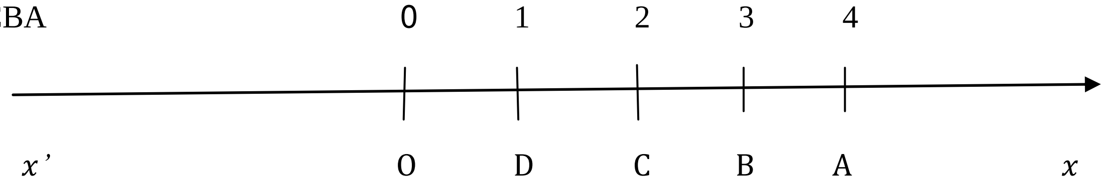


[1] ពៃមុតាស្យុង មានប្រយោជន៍ច្រើន ក្នុងការគណនាផ្សេងៗ ។

ដូច្នេះ យើងបាន ពែមុតាស្យុង CDAB

យើងអាចបញ្ជាក់ដោយគណនា $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$ (ត្រូវ)

ហើយដោយប្តូរ រវាង C↔ D និងរវាង A ↔ B ពែមុតាស្យុង CDAB ឲ្យ ពែមុតាស្យុង ថ្មី DCBA



យើងអាចបញ្ជាក់ដោយគណនា $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ (ត្រូវ) ។

ដូច្នេះ ពែមុតាស្យុង ដែលរក្សាប្រភាគមានបួនគឺ ៖ **TAB-P02**

អថេរ	*A*	*B*	*C*	*D*	
1	*A*	*B*	*C*	*D*	*I*
2	*B*	*A*	*D*	*C*	f_1
3	*C*	*D*	*A*	*B*	f_2
4	*D*	*C*	*B*	*A*	f_3

b/បង្ហាញថាពែមុតាស្យុងទាំងនោះ តាក់តែងបាន ជា គ្រុបរង (sous-groupe)

ដើម្បីបង្ហាញថាគ្រុបរង យើងគណនា ៖

$f_1 \circ f_1$, $f_1 \circ f_2$, $f_1 \circ f_3$; $f_2 \circ f_1$, $f_2 \circ f_2$, $f_2 \circ f_3$; $f_3 \circ f_1$, $f_3 \circ f_2$, $f_3 \circ f_3$ ។

ជាទូទៅ គេថាអនុគមន៍ ពីរ f និង g ស្មើគ្នា បើកាលណា : $\forall x,\ f(x) = g(x)$ ។

ដោយប្រើ TAB-P02 យើងបាន៖

$f_1 \circ f_1$ (ABCD) = $f_1[f_1$(ABCD)] = $f_1[BADC]$ = ABCD = I(ABCD) => $f_1 \circ f_1$ = I

$f_1 \circ f_2$ (ABCD) = $f_1[f_2$(ABCD)] = $f_1[CDAB]$ = DCBA= f_3(ABCD) => $f_1 \circ f_2 = f_3$

$f_1 \circ f_3$ (ABCD) = $f_1[f_3$(ABCD)] = $f_1[DCBA]$ = CDAB = f_2(ABCD) => $f_1 \circ f_3 = f_2$

$f_2 \circ f_1$ (ABCD) = $f_2[f_1$(ABCD)] = $f_2[BADC]$ = DCBA = f_3(ABCD) => $f_2 \circ f_1 = f_3$

$f_2 \circ f_2$ (ABCD) = $f_2[f_2$(ABCD)] = $f_2[CDAB]$ = ABCD= I(ABCD) => $f_2 \circ f_2$ = I

$f_2 \circ f_3$ (ABCD) = $f_2[f_3$(ABCD)] = $f_2[DCBA]$ = BADC = f_1(ABCD) => $f_2 \circ f_3 = f_1$

$f_3°f_1$ (ABCD) = $f_3[f_1$(ABCD)] = $f_3[BADC]$ = CDAB= f_2(ABCD) => $f_3°f_1 = f_2$

$f_3°f_2$ (ABCD) = $f_3[f_2$(ABCD)] = $f_3[CDAB]$ = BADC= f_1(ABCD) => $f_3°f_2 = f_1$

$f_3°f_3$ (ABCD) = $f_3[f_3$(ABCD)] = $f_3[DCBA]$ = ABCD = I(ABCD) => $f_3°f_3$ = I ។

យើងឃើញថា បើយើងតាងដោយ H = $\{I, f_1, f_2, f_3\}$ នោះច្បាប់ (°) ជាច្បាប់តាក់តែងក្នុង លើសំនុំ H ហើយដោយ $f_1°f_1 = f_2°f_2 = f_3°f_3$ = I នោះ (H , °) ជា ក្រុបរង នៃក្រុប ពែមុតាស្យុង ។ យើងអាចដាក់លទ្ធផលនេះជា តារាង

TAB-P03 ៖

∘	I	f_1	f_2	f_3
I	I	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	I	$f_1°f_2 = f_3$	f_2
f_2	f_2	f_3	I	f_1
f_3	f_3	f_2	f_1	I

សង្កេត

តាមធម្មតា $f_1°f_2 \neq f_2°f_1$ គឺលក្ខណមិនត្រលប់ នៃច្បាប់តាក់តែងក្នុង ។ តែនៅក្នុង តារាង បួនជ្រុងស្មើ **TAB-P03** យើងឃើញថា $f_1°f_2 = f_2°f_1$ ហើយចំពោះធាតុឯទៀតៗ ក៏ដូចគ្នា គឺ $\forall f_i, \forall f_j \in$ H, គេមាន $f_i°f_j = f_j°f_i$ ។ ភាពត្រលប់នេះ បកស្រាយដោយនៅក្នុង តារាង ធាតុនីមួយៗ សុទ្ធតែ ឆ្លុះគ្នា បើធៀបនឹងបន្ទាត់បញ្ឆៀង ក្រឡាពណ៌ បៃតង ។ ដូច្នេះ យើងអាចថា H ជាក្រុបរង អាបេលីយៀង (sous-groupe abélien) ។

c/ a',b',c',d' ការតម្រៀបមួយ (un rangement) នៃបួនចំនួន a,b,c,d ។ ចូរបង្ហាញថាមាន ពែមុតាស្យុង p **ដែលរក្សានូវចំនួននៃប្រភាគ** ហើយថែមទាំងផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង p(a') = a ។

យើងឃើញហើយថា ការនិយាយ ពីចំនួន a,b,c,d ក៏ដូចគ្នានឹងការនិយាយពីចំណុច

A, B, C, D ដែរ[2]។ ដូច្នេះ ការតម្រៀប ៤ ចំនួន a', b', c', d' ក៏ដូចជា ពែមុតាស្យុងណាមួយ ក្នុងចំណោម ពែមុតាស្យុង នៃ ៤ អក្សរ A, B, C, D ដែរ ។

នៅពេលនេះគេចង់ឲ្យយើងបង្ហាញថា បើគេឲ្យ ពែមុតាស្យុង A'B'C'D' ណាមួយនោះ គេអាចរក ពែមុតាស្យុង p នៅក្នុង តារាង TAB-P02 ដែលឲ្យ p(A') = A ។ គេឲ្យយើងយកពែមុតាស្យុង p <u>***ដែលរក្សាទូវចំនួននៃប្រភាគ***</u> ។ ដោយសំនួរ a/ យើងឃើញថា យកពែមុតាស្យុង p ដែលរក្សាទូវចំនួននៃប្រភាគ មានតែ ៤ ដែលយើងដាក់ក្នុងតារាង TAB-P02 ។ ចូរសង្កេតមើល TAB-P02 នេះ តើអាចឆ្លើយនឹងល័ក្ខខ័ណ្ឌ p(A') = A បានឬទេ ? យើងត្រូវយល់ថា A' ជាអ្វី ? A' ជាអក្សរទី ១ នៃពែមុតាស្យុង ហើយយើងចង់បាន p(A') = A ។ ដោយ ពែមុតាស្យុង មានតែ ៤ អក្សរ A, B, C, D ដូច្នេះ បើពែមុតាស្យុង

- មានអក្សរទី1 A នោះ A' = A (ដូចជា ABCD, ABDC, ACBD,ACDB, ADBC, ADCB)
- មានអក្សរទី1 B នោះ A' = B (ដូចជា BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA)
- មានអក្សរទី1 C នោះ A' = C (ដូចជា CABD, CADB,CBAD, CBDA,CDAB, CDBA)
- មានអក្សរទី1 D នោះ A' = D (ដូចជា DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA).

ដូច្នេះយើងឃើញថា A' អាចយកបាន អក្សរតែ បួនប៉ុណ្ណោះ គឺ A' =A, A' = B, A' = C និង A' = D ។ ដោយប្រើ TAB-P02 ដែលមាន បួនពែមុតាស្យុង I, f_1, f_2, f_3 តើយើងត្រូវយក p ស្មើនឹងពែមុតាស្យុងណា ដើម្បីឲ្យបាន p(A') = A ? ។ ដោយមើល TAB-P02 យើងឃើញ ៖

$$\boldsymbol{TAB-P04}\quad\begin{cases} I(A) = A \Rightarrow \text{ បើ } A' = A \text{ យើងយក } p = I \\ f_1(B) = A \Rightarrow \text{ បើ } A' = B \text{ យើងយក } p = f_1 \\ f_2(C) = A \Rightarrow \text{ បើ } A' = C \text{ យើងយក } p = f_2 \\ f_3(D) = A \Rightarrow \text{ បើ } A' = D \text{ យើងយក } p = f_3 \end{cases}$$ ។

[2] ពីព្រោះចំនួន a ជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុច A នៅលើអ័ក្ស $x'Ox$ ។

ដូច្នេះ ពែមុតាស្យុង p ដែលត្រូវរកមាន៤ គឺ p = I, p = f_1, p = f_2 និង p = f_3 ។

=======================ចប់========================

ចំពោះចំណោទនេះ ចប់តែប៉ុណ្ណេះហើយ តែខ្ញុំចង់ទាញយកផលប្រយោជន៍

អំពី **TAB-P04** ដោយធ្វើការសង្កេតដូចតទៅ ៖

ចំពោះពែមុតាស្យុង នៃ ៤ អក្សរ A, B, C, D ទាំងអស់ មាន 4 ! = 24 ពែមុតាស្យុង គឺ

ពែមុតាស្យុងផ្តើមដោយអក្សរ A មាន ៦ ៖

(P1) { ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB

ពែមុតាស្យុងផ្តើមដោយអក្សរ B មាន ៦ ៖

(P2) { BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA

ខ្ញុំយកតែពីរនេះមកនិយាយ ឯទៀតៗ គឺ ពែមុតាស្យុងផ្តើមដោយអក្សរ C ឬ ដោយ D ក៏ដូចតែគ្នា ។

យើងឃើញថា ក្នុង TAB-P04 ពែមុតាស្យុង f_1 ឲ្យ $f_1(B) = A$ ហើយបើយើង យក f_1 មក អនុវត្តលើ ធាតុមួយៗ នៃ (P2) តើយើងបាន ធាតុថ្មីយ៉ាងណា ? ដោយ *TAB-P02* យើងដឹងថា $f_1(ABCD) = BADC$ គឺថា $\boldsymbol{f_1(A) = B, f_1(B) = A, f_1(C) = D, f_1(D) = C}$ **(F1)** នេះ តាមការសន្មតក្នុងការសរសេរ ដែលខ្ញុំបានជំរាបរួចមកហើយ ។ ហើយដោយប្រើលទ្ធផល **(F1)** នេះ យើងបានចំពោះ ពែមុតាស្យុង ក្នុង (P2) ៖

f_1(BACD) = ABDC, f_1(BADC) = ABCD, f_1(BCAD) = ADBC , f_1(BCDA) = ADCB, f_1(BDAC) = ACBD, f_1(BDCA) = ACDB ។ យើងឃើញថា ពែមុតាស្យុងថ្មីនេះ មានអក្សរ

ដើមគឺ A ហើយ ដូចពៃមុតាស្យុង នៅ (P1) ទាំងអស់ ។ ហើយដោយ $f_2(C) = A$ និង $f_3(D) = A$ ដូច្នេះបើយើង យក f_2 មកអនុវត្តលើ ពៃមុតាស្យុងផ្តើមដោយអក្សរ C ឬ យក f_3 មកអនុវត្តលើ ពៃមុតាស្យុងផ្តើមដោយអក្សរ D នោះលទ្ធផលដែលបាន គឺជា ពៃមុតាស្យុងផ្តើមដោយអក្សរ A ដូចនៅក្នុង (P1) ទាំងអស់ ។

======================= ចប់ចំណោទ II-4 =======================