សៀវភៅ ស្តីពីសញ្ញាណដើមជាមូលដ្ឋាន នៃគណិតសាស្ត្រ នៅមធ្យមសិក្សា មុននឹងឆ្លងទៅ ឧត្តមសិក្សា ។

បុព្វកថា

សៀវភៅនេះ ខ្ញុំសរសេរឡើង ដើម្បី រំលឹកឡើងវិញ នូវទ្រឹស្តី ឬ វត្ថុ ដែលយើងធ្លាប់បានឃើញ បានប្រើរួចមកហើយ តែពុំទាន់បានឃើញការបង្ហាញ ឬ បានស្គាល់នូវដើមកំណើតនៃទ្រឹស្តីទាំងនោះ ។ ឧបមាដូចជាចំនួនគត់ ដែលយើងប្រើសព្វថ្ងៃនេះ តើកើតឡើងដោយរបៀបណា?។ ម្យ៉ាងទៀតទោះបើមានទ្រឹស្តី ដែលយើងធ្លាប់ស្គាល់ហើយក៏ដោយ របៀបបង្ហាញទ្រឹស្តីនោះ អាចជាទុកជាចម្លើយគំរូ សម្រាប់យើងទៅថ្ងៃក្រោយ ។ ហើយសញ្ញាញខ្លះ ក៏អាចទុកជាស្ពានសម្រាប់ឆ្លងទៅរកសញ្ញាណថ្មីទៀតនៅមហាវិទ្យាល័យ ចំពោះនិស្សិតដែលចង់បន្តសាខាគណិតសាស្ត្រនេះ ។
អត្ថបទទាំងឡាយដែលខ្ញុំយកមកជូននៅពេលនេះ ខ្ញុំបានដកស្រង់ពីឯកសារផ្សេងៗ សសេរដោយ លោកសាស្ត្រាចារ្យបរទេសដ៏ល្បីៗ ខ្ញុំគ្រាន់តែយកមកសសេរពន្យល់តាមរបៀបខ្ញុំ ដែលមានបំណងចង់ឲ្យលោកអ្នកអានងាយយល់ ហើយជាភាសាខ្មែរទៀត ។ ពោលគឺទ្រឹស្តីនៅតែដដែលដូចដើម តែរបៀបពន្យល់អាចថែមថយខុសពីលំនាំដើម ។ ខ្ញុំមិនមែនជាអ្នកគណិតសាស្ត្រទេ ខ្ញុំគ្រាន់តែមានការពិសោធន៍ខ្លះក្នុងមុខវិជ្ជានេះ។ ដោយឯកសារ ទាំងនោះជាភាសាបារាំង ដូច្នេះចំពោះពាក្យបច្ចេកទេស ខ្លះដែលខ្ញុំពុំហានបកប្រែ នោះខ្ញុំសូមទុកជាភាសាបារាំង សម្រាប់ក្រសួងសិក្សាធិការជាតិ បកទៅពេលក្រោយ ។

Champs-sur-Marne, le 02/05/2015.

ជំពូកទី-១

មូលដ្ឋានផ្នែកសមហេតុសមផល នៃគណិតសាស្ត្រ

(Bases logiques des mathématiques)

I. *ការសមហេតុសមផលជាដំបូង*

ទ្រឹស្តីនីមួយៗនៃគណិតសាស្ត្រ សិក្សាអំពីវត្ថុ ដែលគេបំបែកជាក្រុមៗ ដូចជា « សំនុំ » ជាក្រុម ក្នុងការសិក្សាអំពីទ្រឹស្តីតូប៉ូឡូស៊ី (topologie) *« ចំនួនគត់ » ជាក្រុមក្នុងការសិក្សាលេខគណិត* (arithmétique) *« ចំណុច បន្ទាត់ ឬ ប្លង់ » ជាក្រុម ក្នុងការសិក្សាធរណីមាត្រ* (géométrie) *ជាដើម ។*

វត្ថុទាំងនោះ អាចកំនត់ដោយទ្រឹស្តីចាស់ដែលមានរួចមកហើយក៏មាន តែក៏អាចពុំទាន់កំនត់ក៏មាន ហើយនៅពេលនោះ គេគ្រាន់តែថ្លែងនូវ កម្មសិទ្ធ (propriétés) *ខ្លះនៃវត្ថុនោះៗ កម្មសិទ្ធដើម គេហៅថា ស្វ័យស័ត្យ* (axiomes) *ដែលទុកដូចជាក្បួនច្បាប់ត្រូវប្រកាន់យកក្នុងទ្រឹស្តី ។ ការថ្លែងទាំងនោះ ច្រើនតែបានមកពីការនិកភ្នក ដោយមិនមានការពិចារណា។ កាលពីជំនាន់ដើម គេហៅស្វ័យសត្យ អ្វីដែលមើលទៅឃើញច្បាស់ថាត្រូវតែយ៉ាងហ្នឹង ហើយសល់ពីនោះគេហៅថា ឧបធារណ៍* (postulat) *។*

តែចំពោះការសមហេតុសមផលវិញនោះ ស្វ័យស័ត្យ និងឧបធារណ៍ មិនខុសគ្នាទេ ។

យើងនឹងឃើញ ដូចជា សញ្ញាណនៃចំនួនគត់ អាចកំនត់ដោយទ្រឹស្តីសំនុំ តែគេក៏អាចរាប់ជាសញ្ញាណដើមបំផុតពុំទាន់កំនត់ ដោយយកស្វ័យស័ត្យប៉េអានូ (axiome de Péano) *។ ក៏ដូចគ្នាដែរ សញ្ញាណនៃបន្ទាត់ធរណីមាត្រ* (la droite géométrique) *អាចកំនត់ដោយ សញ្ញាណនៃចំនួនគត់ តែក៏អាចថាជា សញ្ញាណដើមបំផុត ដោយយកស្វ័យស័ត្យនៃចំនួនពិត (មើល* §VI,10) *ជាលក្ខខណ្ឌ។*

ជាទូទៅ សញ្ញាណគណិតសាស្ត្រជំនាន់បូរាណទាំងអស់ អាចកំនត់ដោយសញ្ញាណសំនុំ (la notion d’ensemble) *៖ ហេតុនេះហើយបានជាថា ទ្រឹស្តីសំនុំ ដែលកើត*

នៅចុងសតវត្សទី១៩ ជាទ្រឹស្តីសំខាន់ ។ តែសម័យនេះក៏មានទ្រឹស្តីថ្មីដែលបណ្តាលឲ្យមានកំណើតសត្វលោកផ្សេងទៀត ក្រៅពីសំនុំ ។

នៅក្នុងទ្រឹស្តី វត្ថុទាំងឡាយ អាចមានទំនាក់ទំនងនឹងគ្នា ដែលហៅថា **រឺឡាស្យុង** (relations) ។ ពាក្យ « រឺឡាស្យុង » នេះ ពិបាកនឹងឲ្យនិយមន័យ ៖ ជាពិសេស ស្វ័យស័ត្យ ក៏ជា រឺឡាស្យុងដែរ ។

បើ (A)ជា រឺឡាស្យុង ការបដិសេធនៃ (A) ក៏ជា រឺឡាស្យុង ដែលតាងដោយ (non A) ។

បើ (A) និង (B)ជារឺឡាស្យុង នោះ (A និង B) ហើយនិង (A ឬ B) ក៏ជារឺឡាស្យុង ។

ក្នុងគណិតសាស្រ្ត គេនឹងសង្កេតឃើញថា ពាក្យ « ឬ » មិនមានន័យថា ឃ្លាតចេញពីគ្នានោះទេ ៖ ដោយថ្លែងថា (A ឬ B) នោះគេមិន បដិសេធ (A និង B) ទេ បានន័យថា នៅក្នុង (A ឬ B) ក៏មាន (A និង B) ដែរ ។ តែការសន្មតនេះ ផ្ទុយនឹងលក្ខណៈខាងក្រៅនៃការសមហេតុសមផល (la logique formelle) ។

គេថា (A) ឲ្យ (B) បើ (B)ជាវិបាកនៃ(A) ហើយគេសរសេរ A => B ; ឧទាហរណ៍ (A និង B) => (A ឬ B) ។ បើកាលណា គេមាន [A => B ផង] និង [B => A ផង] នោះ គេថា (A) និង (B) សមមូលនឹងគ្នា (les relations (A) et (B) sont équivalentes) ហើយគេសរសេរ A ⇔ B ។

វិបាកនៃស្វ័យស័ត្យ ហៅថា ទ្រឹស្តីបទ (théorème) ឬ ការស្នើ (proposition) ។ ការស្នើ នៅក្នុងទ្រឹស្តីណាមួយ ជារឺឡាស្យុងត្រូវ តែក្នុងទ្រឹស្តីនោះទេ ។ ឧទាហរណ៍ « ផលបូក នៃមុំក្នុងត្រីកោណ ស្មើនឹង180 ដឺក្រេ » ជា រឺឡាស្យុងមួយត្រូវ ចំពោះធរណីមាត្រអឺខ្លីតឌីយែន (la géométrie euclidienne) ហើយខុសចំពោះធរណីមាត្រ (géométrie) អេលីបទីក (elliptique) ឬ អ៊ីពែបូលីក (hyperbolique) ។

ការបង្ហាញនូវទ្រឹស្តីបទ គឺ ជាស្វ៊ីតនៃ រឺឡាស្យុងដែលស្របគ្នា មានរាងជា A => B

ហើយដើម្បីទៅដល់ រឹឡាស្យុង ដែលចង់បាន គេចាប់ផ្ដើមឡើងដោយប្រើស្វ័យស័ត្យ ឬ ទ្រឹស្ដីបទដែលមានរួចមកហើយ ។

រឹឡាស្យុងដែលថ្លែង ក្នុងទ្រឹស្ដីបទ ក៏ជារឹឡាស្យុងស្របមួយដែរ ដែលមានរាងជា H => C រឹឡាស្យុង H ហៅថា សម្មតិកម្ម (hypothèse) ហើយ រឹឡាស្យុង C ហៅថា សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន (conclusion) ។ ទ្រឹស្ដីបទច្រាស គឺ C => H ។ បើ H ⇔ C គេថា (H) ជាលក្ខខណ្ឌ ចាំបាច់ (nécessaire) និង គ្រប់គ្រាន់ (suffisante) ដើម្បី (C) ត្រូវ ។

ពាក្យថា ***លែម*** (lemme) គឺជា ការស្នើមួយ (proposition) ដែលគេប្រើ ក្នុងការបង្ហាញ ទ្រឹស្ដីបទ ដែលសំខាន់ៗ ។ កូរ៉ូលែ(corollaire) របស់ទ្រឹស្ដីបទ គឺវិបាក (conséquence) ដែលគេទាញភ្លាមពីទ្រឹស្ដីបទនោះ ។ នៅក្នុងការសមហេតុសមផល ការស្នើ ទ្រឹស្ដីបទ លែម និង កូរ៉ូលែ ពុំខុសគ្នាទេ ។

គេសន្មតថា ការស្នើណាក៏ដោយ សុទ្ធតែ ឬ**ត្រូវ** ឬ**ខុស** គឺថា ការស្នើនោះ មិនអាចត្រូវផង និងខុសផងនោះទេ បើមិនដូច្នេះទេ គេពុំអាចធ្វើការពិចារណាតាម ហេតុផលបានឡើយ ។

ក្នុងការសន្មតនេះទៀត គេដកចេញនូវទ្រឹស្ដីដែល ផ្ទុយគ្នា ទំនាស់គ្នា គឺថាជាទ្រឹស្ដីដែល នៅក្នុងនោះ រឹឡាស្យុងដូចជា (A) និង (non A) ត្រូវទាំងពីរ ឬ ខុសទាំងពីរ ។ មានទ្រឹស្ដីខ្លះ គេពុំអាចបង្ហាញថាទ្រឹស្ដីនោះ មិនផ្ទុយគ្នានោះទេ នេះជាចំណោទ មួយដ៏ធំក្នុងការសមហេតុសមផល ។ ដោយចំណោទនេះធ្លាប់មានរួចមកហើយ បើសិនជាថ្ងៃណាមួយចំណោទរបៀបនោះ នៅមានទៀត អ្នកគណិតសាស្ត្រ នឹងលប់ការផ្ទុយនោះ ដោយកែប្រែស្វ័យស័ត្យ តែក៏មិនឲ្យប៉ះពាល់ដល់គ្រឿងចាំបាច់ នៃសំណង់នោះ [1] ដែរ។

[1] គេអាចនឹកស្មានថា គ្រាន់តែបន្ថែម ស្វ័យស័ត្យថ្មី ដែលបន្ថយវត្ថុក្នុងក្រុម នៃទ្រឹស្ដីនោះ ៖ គេបានធ្វើ បែបនេះរួចមកហើយ ចំពោះទ្រឹស្ដីសំនុំ ។

យើងធ្លាប់បានប្រើរួចមកហើយ ដើម្បីបង្ហាញការស្នើ H => C គេប្រើ « របៀបបង្ហាញដោយមិនទំនង (la démonstration par absurde) » ដោយ បង្ហាញថា ទ្រឹស្តីបានមកដោយបន្ថែមក្នុង ស្វ័យស័្យត (axiomes) នូវវិឡាស្យុង (H) និង (non C) ជាទ្រឹស្តីផ្ទុយ[2] ។

II. ភាសា និង សញ្ញា

ដូចលោកអ្នកបានសង្កេតឃើញស្រាប់ហើយ ជាដំបូង គណិតសាស្ត្រប្រើពាក្យសាមញ្ញធម្មតា ដោយពុំទាន់កំនត់ ដូចជា វត្ថុ ទ្រឹស្តី ក្រុម វីឡាស្យុង វិបាក មួយ ពីរ ខុស ត្រូវ … ។ល។ បន្ទាប់មកទៀត យើងនៅតែប្រើពាក្យធម្មតានេះទៀត ដើម្បីថ្លែងពី វីឡាស្យុង (ជារបស់ (appartenance) ស្មើ(égalité) ភាពដូចគ្នា(identité) ប្រសព្វ(intersection) ប្រជុំ(union) ។ល។) ។ យើងឃើញហើយថា គ្មានអ្វីកើតពីទទេនោះទេ ដូចជានៅក្នុងវចនានុក្រម ពាក្យនីមួយៗ ក៏ពន្យល់ដោយប្រើពាក្យទៅវិញទៅមក ។ មុកងារនៃការសមហេតុសមផល (la logique) គឺ បន្ថយជាអតិបរមា នូវពាក្យធម្មតាទាំងនោះ ហើយនិងថ្លែងនូវ វីឡាស្យុងទាំងឡាយ ដោយប្រើសញ្ញាដ៏តិច ដែលជាដំណាងនៃ វីឡាស្យុងដើមដំបូង ។ តែគេក៏ឃើញថា ការថ្លែងនូវ វីឡាស្យុងដ៏ឆ្ងាយខ្លះ តម្រូវឲ្យប្រើសញ្ញាដ៏ច្រើន ៖ ការប្រើតែសញ្ញាមួយមុខ អាចនាំឲ្យគាំង ការពិចារណា ។ ដើម្បីទាញអារម្មណ៍ អ្នកគណិតសាស្ត្រ ប្រើពាក្យធម្មតាដូចជា អនុគមន៍ជណ្ដើរ (fonction en escalier) តែត្រូវប្រយ័ត្នថា ពាក្យទាំងនោះមានន័យច្បាស់លាស់ណាស់ ហើយថែមទាំងមានលក្ខខណ្ឌទៀត ។ គណិតសាស្ត្រ មានភាសារបស់គេ មិនមែនជាភាសានៃការសមហេតុសមផលទេ តែយើងប្រើភាសាធម្មតា ដោយបញ្ជាក់ ឬ លប់ ពាក្យដែលនាំឲ្យ

[2] ដើម្បី បង្ហាញថា A => B គេអាច យក (non B) ជាសម្មតិកម្ម ហើយដោយប្រើសម្មតិកម្មនេះ គេទៅដល់សេចក្តីសន្និដ្ឋានមួយ ដែលផ្ទុយពី A (សម្មតិកម្មដែលគេឲ្យជាដំបូង) ។ ដូច្នេះ (non B) មិនត្រូវទេ គឺបានន័យថា B ត្រូវ បើយោងទៅតាម ការសន្មត (B) និង (non B) មិនអាចខុសទាំងពីរ ឬក៏ ត្រូវទាំងពីរ ។

កាន់ប្រទ្បំ ឧបមាដូចជាពាក្យថា « មួយ » បើសិនជាត្រូវបញ្ជាក់ នោះគេថា « មួយយ៉ាងតិច » « មួយយ៉ាងច្រើន » ឬ « តែមួយគត់ » ។

កាលណា យើងថ្លែងពី ការស្មើណាមួយ យើងត្រូវបញ្ជាក់ថា ការស្មើនោះ ត្រូវចំពោះគ្រប់វត្ថុទាំងអស់ នៃក្រុមណាមួយ ឬក៏ ត្រូវតែចំពោះវត្ថុខ្លះប៉ុណ្ណោះ ។ ដោយហេតុនេះហើយបានជា មានប្រើសញ្ញា ហៅថា កង់ទីហ្វីកាទ័រ (quantificateur) ដូចជា ∃ (គេមាន) និង ∀ (ណាក៏ដោយ) ។ សញ្ញានេះ មានប្រយោជន៍ កាលណាគេចង់សម្តែងការ « មិនស្រប » នឹងការស្មើ ពីព្រោះថា៖

<u>ការផ្ទុយនឹង</u> « ចំពោះ x ណាក៏ដោយ គេមាន y ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងរឺឡាស្យុង $R(x,y)$ » <u>គឺ</u> « មាន x ដែល ចំពោះ y ណាក៏ដោយ <u>ក៏មិន</u>ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងរឺឡាស្យុង $R(x,y)$ » ។

ហើយជាទូទៅ នៅក្នុងការស្មើផ្ទុយ សញ្ញា ∃ និង ∀ ឆ្លាស់គ្នា ។ តែត្រូវប្រយ័ត្នកុំប្រើ សញ្ញានេះ ទុកដូចជាសរសេរអក្សរកាត់ បើគេគោរពដោយតឹងរឹងនូវ ក្បួនសមហេតុសមផលនោះ ពេលខ្លះ ការសរសេរជាពាក្យធម្មតា មិនជាពិបាកហើយងាយយល់ទៀត ។ ការសង្កេតនេះ ក៏ត្រូវចំពោះសញ្ញា => និង ⇔ ដែលជួយឲ្យសិស្សចេះធ្វើ ការវែកញែករវាងសញ្ញាណ « លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ (condition nécessaire) » និង « លក្ខខណ្ឌគ្រាន់តែ (condition suffisante) » ពី « លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និង គ្រាន់តែ (condition nécessaire et suffisante) » ។ តែចំពោះសញ្ញាទាំងពីរចុងក្រោយនេះ ការប្រើខុសរបៀបមានមិនច្រើនទេ ហើយការប្រើអាចជួយមិនឲ្យច្រឡំ ដូចជាថា « (A)ត្រូវ បើ (B)ត្រូវ » ។

III. <u>ការលំបាក ក្នុងការអនុវត្តន៍</u>

សញ្ញាសមហេតុសមផល(les signes logiques) ពុំអាចជួយយើងឲ្យបំបាត់ភាពមិនច្បាស់ខ្លះដែលមានតាំងពីដើមមកនៃគណិតសាស្ត្រ ៖ ព្រោះថាកាលដើមឡើយ

មានមានពាក្យខ្លះ មានសញ្ញាណច្រើនដែលខុសពីគ្នា ដូចជាពាក្យថា « ស្មើ » ពេលខ្លះសំដៅថា « វត្ថុពីរដូចគ្នា (identité) » ជួនកាលជា « វិទ្យាស្ម័ងសមមូល (relation d'équivalence) » ដែលវត្ថុទាំងពីរនោះផ្ទៀងផ្ទាត់ ដូចថា ត្រីកោណពីរស្មើគ្នា វិចទ័រពីរស្មើគ្នា ប្រភាគពីរស្មើគ្នា ជាដើម។ ពាក្យថា « មុំ » ពេលខ្លះសំដៅទៅ សំនុំនៃកន្ទះបន្ទាត់ពីរមានគល់តែមួយ ពេលខ្លះតំបន់ណាមួយដែលខណ្ឌដោយកន្ទះបន្ទាត់នោះ ពេលខ្លះទៀតជា ក្រុមសមមូល ដែលយកធាតុណាមួយក្នុងក្រុមនោះជាតំណាង ឬក៏ជារង្វាស់នៃធាតុនោះ ។ ហើយជាទូទៅ ពាក្យជាច្រើននៅក្នុងធរណីមាត្រជំនាន់ដើម ច្រើនមិនច្បាស់ ៖ តើ ត្រីកោណសំដៅត្រង់ បីចំនុច មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ឬ ក៏ សំនុំនៃបីអង្កត់ ដែលកំនត់ដោយបីចំនុចនោះ ឬមួយក៏តំបន់ដែលខណ្ឌដោយបីអង្កត់នោះ ? ។

ពាក្យថា « ក្រឡាផ្ទៃ » ឬ « ចំណុះ » សំដៅយក សំនុំនៃចំនុច (ensembles des points) ឬ រង្វាស់ (mesure) ។

ចំពោះអ្នកគណិតសាស្ត្រដែលប្រើពាក្យទាំងនោះ គេស្គាល់នូវសញ្ញាណណាដែលគេចង់និយាយ តែការខំប្រើសតិស្មារតីនេះមិនជាស្រួលទេចំពោះអ្នករៀនដំបូង ។ ដូច្នេះគួរតែអ្នកគណិតសាស្ត្រទាំងអស់ស្រុះស្រួលគ្នាកំនត់ឲ្យច្បាស់នូវនិយមន័យ ដូចជា មុំ នេះជាដើម ។ ក្នុងការស្រុះស្រួលនេះមានខ្លះរួចមកហើយ ឧទាហរណ៍តូចតាច ដូចជា «ថាសបើក (disque ouvert) [ដុំមូលបើក (boule ouverte)] មានផ្ចិត O និង កាំ R គឺសំនុំនៃចំនុច M ក្នុងប្លង់ [ក្នុងលំហ-espace] ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង OM < R » ហើយ «ថាសបិទ (disque fermé) [ដុំមូលបិទ (boule fermée)] គឺសំនុំ នៃចំនុច M ក្នុងប្លង់ [ក្នុងលំហ - espace] ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង OM ≤ R » ។ សំនុំ នៃចំនុច M ក្នុងប្លង់ [ក្នុងលំហ] ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង OM = R នោះហៅថា « រង្វង់ (cercle) » [ស្វ៊ែ (sphère)] ។

IV. រឺឡាស្យុងទ្វិភាគ (relation binaire) ; សមមូលភាព (équivalences).

ក្នុងចំណោម រីឡាស្យុង ដែលជាទំនាក់ទំនងរវាងវត្ថុទាំងឡាយនៃទ្រឹស្តី ក្នុងគណិតសាស្ត្រ រីឡាស្យុងដែលសំខាន់ជាងគេ គឺ រីឡាស្យុងទ្វិភាគ ដែលជារីឡាស្យុងរវាងពីរវត្ថុ x និង y ។ x និង y ហៅថា តួ នៃរីឡាស្យុង ។ ក្នុងអរូបី (dans l'abstrait) រីឡាស្យុងបែបនេះ គេសរសេរ $R(x, y)$ រឺ xRy ហើយ ការប្រកែកដោយ $x\not{R}y$ អក្សរ R អាចជុំនួសដោយសញ្ញាអ្វីទៀតក៏បាន ។ តែក្នុងការប្រតិបត្តិ រីឡាស្យុងទ្វិភាគមាន ប្រភេទផ្សេងៗគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ដូចជា ៖ រីឡាស្យុងរវាងចំនួនគត់កំនត់ដោយ « x ជា ពហុគុណ នៃ y» (x est multiple de y) ឬ រីឡាស្យុងរវាងបន្ទាត់ កំនត់ដោយ « x កែង នឹង y» (x est perpendiculaire à y) ដែលកត់ដោយ $x \perp y$ ហើយបើចេញពីតំបន់ គណិតសាស្ត្រ រីឡាស្យុង « x ជាកូនសិស្ស របស់ y » និង « x មានជាតិដូច y » ជារីឡាស្យុងទ្វិភាគរវាងមនុស្សលោក ឬ « x ជារបស់ y » ជារីឡាស្យុង រវាងក្រុមខ្លះនៃវត្ថុ ឬ នៃមនុស្ស ក្នុងផ្នែកគណិតសាស្ត្រ ក៏ដូច ក្នុងជីវិតរស់នៅសព្វថ្ងៃ ។

សមភាព - ភាពស្មើ (égalité)

រីឡាស្យុងទ្វិភាគមួយដែលងាយហើយសំខាន់ គឺ រីឡាស្យុងសមភាព ដែលថ្លែង ថា « x ស្មើនឹង y » ហើយដែលគេសរសេរ $x = y$ ។ ចំពោះការយល់ជាធម្មតា រីឡាស្យុងនេះ មានន័យថា x និង y ជាវត្ថុតែមួយ ។ តែចំពោះ អ្នកតក្កវិញ្ញូ (logicien) វិញ ចំពោះរីឡាស្យុង P ដែលមានតួតែមួយ គឺ $P(x)$ សមមូលនឹង $P(y)$ ឬក៏ថាដោយប្រើសញ្ញាដែលយើងធ្លាប់បានឃើញ ៖ $(x = y) \Leftrightarrow [\ (\forall P),\ P(x) \Leftrightarrow P(y)\ ]$

យើងអាចបកប្រែ និយមន័យតាមតក្កវិជ្ជា(la logique)នេះ មកជាភាសាសាមញ្ញដោយនិយាយថា ៖ វត្ថុពីរ ស្មើគ្នា កាលណា វត្ថុទាំងពីរនោះមាន កម្មសិទ្ធិ (propriétés)ដូចគ្នា

គ្រប់កម្មសិទ្ធិទាំងអស់ ។

និយមន័យបែបនេះ ស្របនឹងទម្លាប់ដែលថា ស្មើគ្នា គឺវត្ថុផ្សេងគ្នាតែមើលមិនឃើញខុសគ្នា ដូចយើងថា ៖ ឡូ « ក » មានរថយន្ត ដូច រថយន្ត ឡូ « ខ » ៖ យើងដឹងថាជារថយន្ត ពីរផ្សេងពីគ្នា តែ ម៉ាកនិងសេរី ដូចគ្នា ហើយមានកម្មសិទ្ធិទាំងអស់ដូចគ្នា ។ នៅក្នុងភាសានិយាយ ឃ្លាថា « x ស្មើនឹង y », « x ដូចសុទ្ធសាធនឹង y », « x គឺ y » បង្ហាញឲ្យឃើញថា មានការមិនច្បាស់ ។ តែនៅក្នុងគណិតសាស្ត្រ ឬ តក្កវិជ្ជា ការមិនច្បាស់នេះ គ្មានទេ ។

រឺឡាស្យុងវិសមភាព ដែលសរសេរ $x \neq y$ អាចថ្លែង ដោយឃ្លាណាមួយខាងក្រោមនេះ ៖ « x មិនស្មើនឹង y » « x ខុសពី y » « x ផ្សេងពី y» ។

<u>កម្មសិទ្ធិនៃរឺឡាស្យុងទ្វិភាគ (Propriétés des relations binaires)</u>

ឧទាហរណ៍ ខាងលើ បង្ហាញថា តួទាំងពីរ នៃរឺឡាស្យុងទ្វិភាគ មិនមានមុខងារដូចគ្នាទាំងអស់ទេ ៖

1/ គេថា រឺឡាស្យុង R ឆ្លុះ (R symétrique) កាលណា $R(x,y) \Rightarrow R(y,x)$ ។ឧទាហរណ៍ ដូចជា « រឺឡាស្យុងបន្ទាត់កែង » $x \perp y \Rightarrow y \perp x$ ឬក៏រឺឡាស្យុង « ជាជនរួមជាតិតែមួយនឹង » ។

2/ ម្យ៉ាងទៀត រឺឡាស្យុង R រេប្លិចស៊ីវ (R réflexive) បើកាលណាចំពោះវត្ថុទាំងអស់នៃដែនកំនត់របស់រឺឡាស្យុង នោះ $R(x,x)$ ត្រូវ ។ ដូចជា « x ជាពហុគុណរបស់ y » ជារឺឡាស្យុងរេប្លិចស៊ីវ ពីព្រោះថា « x ជាពហុគុណរបស់ x » នោះត្រូវ ។ តែ ចំពោះបន្ទាត់វិញរឺឡាស្យុង « x កែងនឹង y » មិនរេប្លិចស៊ីវទេ ពីព្រោះថា « x កែងនឹង x » បានន័យថា « បន្ទាត់ x កែងនឹងបន្ទាត់ x » នោះពុំត្រូវទេ តែបើថា « បន្ទាត់ x ស្របនឹងបន្ទាត់ x » នោះត្រូវ ។

3/ ជាចុងក្រោយ គេថា រឺឡាស្យុង R ត្រង់ស៊ីទីវ (R transitive) បើ ៖

R(x,y) និង R(y,z) => R(x,z) ត្រូវ ។

ឧទាហរណ៍ រីឡាស្យុង « x ជាពហុគុណរបស់ y » និង « x ជាជនរួមជាតិតែមួយនឹងជន y » ជា រីឡាស្យុងត្រង់ស៊ីទីវ ។ តែ រីឡាស្យុងបន្ទាត់ « x កែងនឹង y » មិនត្រង់ស៊ីទីវទេ ។ ចំពោះ រីឡាស្យុង « ជាពហុគុណរបស់ » ៖

xRy => « x ជាពហុគុណរបស់ y » => ∃ k , ដែលឲ្យ x = ky
yRz => « y ជាពហុគុណរបស់ z » => ∃ h , ដែលឲ្យ y = hz

=> x = k(hz) = (kh)z រឺ $x = mz \Leftrightarrow xRz$

<u>សមមូលភាព (Equivalences)</u>

គេហៅថា រីឡាស្យុងសមមូល (relation d'équivalence) គឺជា រីឡាស្យុងទ្វិភាគដែលមានកម្មសិទ្ធិ ទាំងបីតែម្តង គឺ ៖

ឆ្លុះ (symétrique)[3] រ៉េផ្លិចស៊ីវ (réflexive)[4] និង ត្រង់ស៊ីទីវ (transitive)[5] ។

ឧទាហរណ៍ រីឡាស្យុង « x ជនរួមជាតិតែមួយនឹងជន y » ជារីឡាស្យុងសមមូល បើគេសន្មតថា ពលរដ្ឋម្នាក់ ជាជនរួមជាតិតែមួយនឹងខ្លួនឯង ។ ក្នុង លេខគណិត (en arithmétique) រីឡាស្យុង « x – y ជាចំនួនគត់គូ » ជារីឡាស្យុងសមមូល[6] ។ ហើយ តក្កសមមូល(équivalence logique) A ⇔ B ជា សមមូលរវាង កម្មសិទ្ធិ និងកម្មសិទ្ធិ[7] ។ តែរីឡាស្យុង « x ជាពហុគុណរបស់ y » មិនមែនជារីឡាស្យុងសមមូលទេ ពីព្រោះ

---

[3] ឆ្លុះ ដូចយើងឆ្លុះកញ្ចក់ ខ្លួនយើង ហើយនិងរូបយើងក្នុងកញ្ចក់ ដូចគ្នា អាចរត់ទៅ-រត់មកបាន

[4] រ៉េផ្លិចស៊ីវ ដូចត្រឡប់ (មកម្ចាស់ដើមវិញ)

[5] ត្រង់ស៊ីទីវ ដូច ឆ្លង (ចំឡង) ពីមួយ ទៅមួយ

[6] $xRy \Leftrightarrow \exists k,\ x - y = 2k$

[7] A ⇔ B គឺ [A => B និង B => A] (1)

ដូច្នេះ 1/ A ⇔ A ត្រូវ ដោយ (1)

2/ A ⇔ B => B ⇔ A ត្រូវ ដោយ (1)

3/ A ⇔ B និង B ⇔ C => ដោយ (1) យើងបាន៖

រីឡាស្យុងនោះ មិនឆ្លុះ (xRy ≠> yRx) ។
រីឡាស្យុងសមមូល ច្រើនតាងដោយ សញ្ញាណាមួយ ក្នុងសញ្ញាទាំងពីរ ៖ ≡ និង ~ ។
បើ រីឡាស្យុង R(x,y) ត្រូវ គេថា៖ « x កុងគ្រុយ (congru)នឹង y ម៉ូឌុយឡូ (modulo) R »
ហើយគេសរសេរ « $x \equiv y$ [R] » រឺ « $x \sim y$ [R] » ។

គេថា សមភាព (égalité) ជារីឡាស្យុងសមមូល ពិសេស គេអាចតាងការកំនត់រីឡាស្យុង**សមភាព**ដោយ « x = y បើកាលណា x កុងគ្រុយ (congru) នឹង y ម៉ូឌុយឡូ(modulo) **គ្រប់រីឡាស្យុង<u>សមមូល R</u>** ទាំងអស់» គឺ ៖

$$(x = y) \Leftrightarrow ((\forall R), x \equiv y [R])$$

យើងនឹងឃើញនៅ §6 ប្រព័ន្ធវាង សញ្ញាណ សមភាព (égalité) និង សមមូល (équivalence) តែនៅពេលនេះ យើងក៏អាចចាប់និយាយថា វត្ថុពីរ សមមូល គឺកាលណា មានកម្មសិទ្ធិ <u>**មួយ**</u> រួមគ្នា ហើយ វត្ថុពីរ ស្មើគ្នា គឺកាលណា មាន<u>គ្រប់</u>កម្មសិទ្ធិទាំងអស់រួមគ្នា[8]។

V. <u>មុខងារនៃ សមមូល (le rôle des équivalences).</u>

រីឡាស្យុង សមមូល មានមុខងារមួយដ៏ធំ ក្នុងគណិតសាស្ត្រ គ្រប់កំរឹត ចាប់តាំងពី សញ្ញាណដែលមើលទៅដូចជាងាយស្រួល ដូចធរណីមាត្រ លេខគណិត រហូតដល់ គណិតសាស្ត្រកំរឹតខ្ពស់ ។ តែគេក៏ជួប រីឡាស្យុងសមមូលនេះនៅតំបន់ឯទៀតៗ ហើយ ក៏មិនជាពិបាកនឹងរកឧទាហរណ៍ដែរ « x មានពណ៌ដូច y » ជា ឃ្លាកំនត់រីឡាស្យុង សមមូលមួយ លើសំនុំនៃវត្ថុសម្ភារៈ (objets matériels) ហើយយើងក៏អាចជំនួសពាក្យ

[A => B និង B => A] និង [B => C និង C => B] => [A => B និង B => C] និង [C => B និង B => A]
រឺ [A => C] និង [C => A] ⇔ A ⇔ C ។
ដូច្នេះ [A ⇔ B និង B ⇔ C] => A ⇔ C ។

[8] បើវត្ថុទី១ មានកម្មសិទ្ធិអ្វី វត្ថុទី២ក៏មានកម្មសិទ្ធិនោះដែរ ។

ក្នុងឃ្លានេះដូចជា « ពណ៌ » ដោយ ពាក្យផ្សេងឯទៀត ដែលសំដៅ គុណភាព នៃវត្ថុសម្ភារៈនោះ ដូចជា រាង ប្រវែង ក្លិន រស់ជាតិ ។ល។ ។

យើងឃើញថាដោយ ឲ្យរីឡាស្យុងសមមូល R គេអាចចែក វត្ថុទាំងនោះ ជាក្រុមៗ ៖ វត្ថុទាំងឡាយដែល សមមូលនឹងវត្ថុ x នោះនៅក្នុងក្រុមជាមួយនឹង x ហើយហៅថា ថ្នាក់សមមូល S_x (une classe d'équivalence S_x) ។ តាមលក្ខខណ្ឌនៃរីឡាស្យុងសមមូល បើ ថ្នាក់សមមូល ពីរ S_x និង S_y មានធាតុ z រួមជាមួយគ្នា នោះ ថ្នាក់ទាំងពីរនោះ ត្រូវតែដូចគ្នា[9]។

សង្កេត

ថ្នាក់សមមូល ជាសំនុំ ដែលធាតុទាំងឡាយនៅក្នុងសំនុំនោះ សុទ្ធតែសមមូលនឹងគ្នា។ ថ្នាក់សមមូលនេះ ជា **អរូបី** គឺគ្មានរូប យើងមើលមិនឃើញទេ យើងឃើញតែរបស់ ដែលនៅក្នុងនោះ ដូចជាពាក្យថា ផ្ទះ យើងមិនដឹងថាកន្លែងណាជាផ្ទះទេ យើងឃើញ តែ បង្អួច នៃផ្ទះ ដំបូល ឬ ជញ្ជាំងនៃផ្ទះ ហើយធាតុទាំងនោះផ្សំឡើងបានជា សំនុំមួយ ឲ្យឈ្មោះថាផ្ទះ[10] ។ ក្នុង រីឡាស្យុងសមមូល យើងប្រើពាក្យ អរូបី C (ពណ៌ រាង ប្រវែង ។ល។) ហើយយើងថា « x សមមូលនឹង y កាលណា x មាន (C) ដូចគ្នានឹង y » បើ (C) ជាពណ៌ ហើយ x សំដៅរថយន្តម៉ាកតូយូតា (Toyota) នោះថ្នាក់សមមូលមាន៖ C_{b} : សំនុំរថយន្តពណ៌ស ; C_r : សំនុំរថយន្តពណ៌ក្រហម ; C_v : សំនុំរថយន្តពណ៌ បៃតង ; ...។ល។ ដូច្នេះ ការបញ្ចូល ថ្នាក់សមមូល អាចឲ្យយើង ឆ្លងពី រូបី (មានរូប) ទៅ អរូបី (គ្មានរូប) គឺថា ពីធាតុ ទៅ សំនុំ ។ ហើយរបស់នៅក្នុងសំនុំជាមួយគ្នា មាន កម្មសិទ្ធិ ដូចគ្នា ហើយយើងគ្រាន់តែដឹង កម្មសិទ្ធិ នៃធាតុដំណាងណាមួយ ក៏យើង

[9] $z \in S_x \cap S_y$ => zRx និង zRy ⇔ $x \equiv z$ (ដោយឆ្លុះ) និង $z \equiv y$ => $x \equiv y$ (ដោយ ត្រង់ស៊ីទីវ) $x \equiv y$ => $S_x = S_y$ (តាមនិយមន័យ ថ្នាក់សមមូល)។

[10] បើនិយាយតាមធម៌ ផ្ទះ នេះជាសង្ខារធម៌ គឺធម៌ដែលកើតឡើងដោយគ្រឿងផ្សំ ដែលជារបស់មិនទៀង ផ្ទះនេះនឹងរលត់ទៅវិញ កាលណាគ្រឿងផ្សំទាំងនោះរលត់។

ដឹងនូវកម្មសិទ្ធិ នៃជាតុឯទៀតៗដែរ ។ នៅធរណីមាត្រ គេថាអង្កត់ពីរ ស្មើគ្នា កាលណាវាមានប្រវែង ស្មើគ្នា ។ តែគំនិតដើមឡើយ គឺមិនមែន ប្រវែងទេ គឺគេ ចង់ដឹងថា អង្កត់ពីរនោះ ស្មើគ្នាទេ ដោយគ្រាន់តែ យកអង្កត់ទាំងពីរមកតម្រឹម គ្នាពីចុងម្ខាងទៅចុងម្ខាង ហើយបើវាស៊ីគ្នា គេថាវាស្មើគ្នា នៅពេលនោះ គឺ ប្រវែង អង្កត់ (la longueur d’un segment est) ជា ថ្នាក់សមមូល (la classe d’équivalence) ហើយ អង្កត់នោះជាជាតុ (à laquelle il appartient)។ យើងនឹងធ្វើការសង្កេតនេះ ចំពោះ មុំពីរ ស្មើគ្នា ។

VI. <u>សមភាព ក្លែងក្លាយ (Les fausses égalités).</u>

ដោយ មុខងារនៃ សមមូល ទើបតែនឹងទទួលស្គាល់ក្នុងគណិតសាស្រ្ត នោះសញ្ញាណ ធម្មតាមួយចំនួន ដែលមានកំនត់តាំងតែពីបូរាណកាលមកហើយ ដូចជា យើងទម្លាប់ ថា **ស្មើ** (សមភាព)នោះ ភាគច្រើន ត្រូវនិយាយថា សមមូល ទើបត្រឹមត្រូវជាង ។ យើងបានឃើញមកហើយថា គេទុកពាក្យ « ស្មើ » តែវត្ថុដែលដូចគ្នាបិះបិត ឬយ៉ាង ហោចណាស់ដែលរកមើលមិនឃើញកន្លែងដែលខុសគ្នា ។ តែចំពោះភាសាគណិត សាស្រ្តជំនាន់ដើម គេប្រើពាក្យនេះ ចំពោះវត្ថុដែលគ្រាន់តែសមមូល ម៉ូឌុយឡូ រឺឡា ស្យុង R ណាមួយតែប៉ុណ្ណោះ ហើយគេក៏សរសេរ $x = y$ ជំនួស $x \equiv y$ (ម៉ូឌុយឡូ R) ។ ដោយធ្វើរបៀបនេះ គេច្រឡំ វត្ថុ (ជាជាតុ) x , y ជាមួយនិង ថ្នាក់សមមូល S_x , S_y (ជាសំនុំ)។ ហេតុនេះហើយ បានជាគេច្រឡំ ប្រភាគ (les fractions) ទៅនឹង ចំនួន សនិទាន (les nombres rationnels) ដែលជា ថ្នាក់សមមូល នៃ ប្រភាគទាំងនោះ ។ ដែលថា <u>សមភាព</u> នៅធរណីមាត្រ ដូចជា ការស្មើនៃ អង្កត់ មុំ ត្រីកោណ ។ល។ នោះក៏ជា <u>សមមូល</u> ដែរ ។ គេអាចសង្កេតថា សញ្ញាណ សមមូល ធ្វើឲ្យកាន់តែទូលំ ទូលាយនូវសញ្ញាណសមភាព ហើយ វត្ថុពីរ <u>សមមូលគ្នា</u> ក៏ដូចជា ថ្នាក់សមមូលពីរ

ស្មើគ្នា (ថ្នាក់សមមូលដែលមានវត្ថុនោះ ជាធាតុ) [11]។

VII. ទំនាក់ទំនងលំដាប់ (Relations d'ordre).

បើនិយាយតាមវេយ្យាករណ៍ គេឃើញថា ការប្រៀបធៀបរវាងវត្ថុពីរស្មើគ្នា « x ក៏ធំដូច y » (x est aussi grand que y) កំនត់នូវ ទំនាក់ទំនងសមមូលមួយ (គេអាចជំនួស គុណនាម « ធំ » ដោយ គុណនាមផ្សេងទៀត) ។ ការប្រៀបធៀប ធំជាង « x ធំជាង y » (x est plus grand que y) ផ្តល់មកនូវ ទំនាក់ទំនងលំដាប់ ។ បើនិយាយឲ្យចំទៅ នៅក្នុង គណិតសាស្ត្រ សញ្ញាណ ទំនាក់ទំនងលំដាប់ ធ្វើឲ្យកាន់តែទូលំទូលាយនូវ សញ្ញាណនៃ ការនៅក្រោមបង្គាប់ ដែលបញ្ចេញដោយឃ្លា ដូចជា « x យ៉ាងច្រើនស្មើនឹង y » (x est au plus égal à y) ឬ « x មិនខ្ពស់ជាង y » (x est non supérieur à y)។

បើនិយាយតាមតក្កវិជ្ជា គឺជា ទំនាក់ទំនងទ្វិភាគ លើវត្ថុខ្លះ ជាគូៗ (certains couples d'objets) កំនត់ដោយលក្ខខណ្ឌ ដូចតទៅ ៖

1° $R(x,y)$ និង $R(y,z)$ ផ្តល់ឲ្យ $R(x,z)$

2° គេបានជានិច្ច $R(x,x)$ បើសិនជា ទំនាក់ទំនងនោះមានន័យ

3° R(x,y) និង R(y,x) ផ្តល់ឲ្យ $x = y$

លក្ខខណ្ឌ (1°) និង (2°) សម្តែងតែរៀងៗខ្លួនថា ទំនាក់ទំនង R ត្រង់ស៊ីទីវ និង រ៉េផ្លិចស៊ីវ ។ លក្ខខណ្ឌ (3°) សម្តែងថា ទំនាក់ទំនង R ប្រឆាំងធ្លុះ (antisymétrique) ។

ដូច្នេះគេអាចឲ្យនិយមន័យ ថា ៖

ទំនាក់ទំនងលំដាប់ គឺ ជាទំនាក់ទំនងទ្វិភាគ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ត្រង់ស៊ីទីវ និង ប្រឆាំងធ្លុះ ។

[11] $S_x = S_y$ ក៏ដូច $x \equiv y$ [R]

សង្កេត

បើ R ជារីឡាស្យុងលំដាប់ នោះរីឡាស្យុងច្រាស S កំនត់ដោយ $S(x,y) \Leftrightarrow R(y,x)$ ក៏ជា រីឡាស្យុងលំដាប់មួយទៀត ដែលហៅថា **រីឡាស្យុងច្រាស** នៃ រីឡាស្យុងទីមួយ ៖ នៅក្នុងគណិតសាស្រ្ត រីឡាស្យុងលំដាប់ ពុំមានគំនិតផ្តាច់ការខាងការចំណុះនោះទេ ។

ឧទាហរណ៍

ក្នុងចំនួនគត់ រីឡាស្យុងកំនត់ដោយ « x ជាតួចែកនៃ y » (x est un diviseur de y) ជា រីឡាស្យុងលំដាប់ ហើយរីឡាស្យុងច្រាស គឺ « x ជាពហុគុណនៃ y » (x est un multiple de y) ។

រីឡាស្យុងលំដាប់ ដែលគេស្គាល់ច្រើន ហើយងាយ គឺ រីឡាស្យុងរវាងចំនួនពិត ដែលកំនត់ដោយ $x \leq y$ ហើយដែលគេនិយាយថា « x យ៉ាងច្រើនស្មើនឹង y » រឺ « x មិនធំជាង y » ហើយ រីឡាស្យុងលំដាប់ច្រាស សរសេរ $x \geq y$ នោះគេថ្លែងថា « x យ៉ាងតិចស្មើនឹង y » (x est au moins égal à y) រឺ « x មិនទាបជាង y » (x est non inférieur à y) ។

ជាទូទៅ ត្រូវសង្កេតថា រីឡាស្យុងលំដាប់រវាងពីរវត្ថុ មិនបដិសេធការស្មើគ្នានៃវត្ថុនោះទេ បានន័យថា រីឡាស្យុងលំដាប់ ក្នុងគណិតសាស្រ្ត បកប្រែ ការប្រៀបធៀប « មិនធំដាច់គេ »[12] (traduisent des comparatifs de « non supériorité ») ។

រីឡាស្យុង $x < y \iff [x \leq y$ និង $x \neq y]$ ៕

========= ចប់ អត្ថបទនេះ តែប៉ុណ្ណេះ ឥឡូវ ធ្វើលំហាត់ខ្លះ =======

[12] បើគេថា « x ធំជាង y » នោះគេមិនបដិសេធ $x = y$ ទេ ។

លំហាត់មានពីរផ្នែក ដែលជាប់ ទាក់ទងនឹងគ្នា គឺ ផ្នែក រីឡាស្យុងសមមូល (relations d'équivalence) និង រីឡាស្យុងលំដាប់ (relations d'ordre) ។ សញ្ញាណ ទាំងពីរនេះ នៅក្នុងគណិតសាស្ត្រ គេប្រើជានិច្ច ដូច្នេះគប្បី ទម្លាប់ស្គាល់ឲ្យហើយទៅ ពីព្រោះ យើងនឹងត្រូវការនៅថ្ងៃខាងមុខ។ លំហាត់ មានចម្លើយ គ្រាន់ជាការណែនាំប៉ុណ្ណោះ ចូរខំរកដោយខ្លួនឯងជាមុនសិន ដើម្បីជាប្រយោជន៍ក្នុងការយល់មេរៀន។

លំហាត់

I-1. សិក្សា អំពី រីឡាស្យុង ដែលបកស្រាយភាសាអ្នកស្រុកដោយ គុណនាម ឬ ពាក្យខ្លះ ដូចជា ៖

មានន័យប្រហែលគ្នា(synonyme) ដូចគ្នា(semblable) ពាក្យមានសំឡេងដូចគ្នា (homonyme) អ្នកធ្វើការជាមួយគ្នា (collègue) អ្នកមានគ្រូជាមួយគ្នា(condisciple) សហពលរដ្ឋ (ពលរដ្ឋនៃប្រទេសជាមួយគ្នា-concitoyen) ជនរួមជាតិ(compatriote) អ្នកមានកម្មសិទ្ធិរួមគ្នា (copropriétaire) ។

ចូរបង្ហាញថា គេអាចទុក រីឡាស្យុងខាងលើ ជា សមមូល លើ ថ្នាក់នៃវត្ថុ ដែលគេនឹងកំនត់។ បើអាចធ្វើបាន ចូរបកស្រាយរីឡាស្យុងទាំងនោះ ដោយឃ្លាដូចជា ៖

« វត្ថុពីរ ដូចគ្នា កាលណាវាមានរាងដូចគ្នា »

ចម្លើយ-I-1

A/ ដោយតាង xRy រឺឡាស្យុង « x មានពងដូចគ្នានឹង y »

1/ xRx ⇔ « x មានពងដូចគ្នានឹង x » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R រេផ្លិចស៊ីវ

2/ xRy ⇔ « x មានពងដូចគ្នានឹង y » => « y មានពងដូចគ្នានឹង x » ត្រូវ ៖

ដូច្នេះ R ធ្មុះ

3/ (xRy និង yRz) ⇔ [« x មានពងដូចគ្នានឹង y » និង « y មានពងដូចគ្នានឹង z »]

⇨ « x មានពងដូចគ្នានឹង z » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R ត្រង់ស៊ីទីវ

ដោយ រឺឡាស្យុង R រេផ្លិចស៊ីវ ធ្មុះ និង ត្រង់ស៊ីទីវ នោះ R ជារឺឡាស្យុងសមមូល។

B/ « ពាក្យពីរ មានន័យប្រហែលគ្នា កាលណាវាអាចជំនួសគ្នាបាន »

ដោយតាង xRy រឺឡាស្យុង « x អាចជំនួស y »

1/ xRx ⇔ « x អាចជំនួស x » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R រេផ្លិចស៊ីវ

2/ xRy ⇔ « x អាចជំនួស y » => « y អាចជំនួស x » ត្រូវ ៖

ដូច្នេះ R ធ្មុះ

3/ (xRy និង yRz) ⇔ [« x អាចជំនួស y » និង « y អាចជំនួស z »]

⇨ « x អាចជំនួស z » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R ត្រង់ស៊ីទីវ

ដោយ រឺឡាស្យុង R រេផ្លិចស៊ីវ ធ្មុះ និង ត្រង់ស៊ីទីវ នោះ R ជារឺឡាស្យុងសមមូល។

C/ « ពាក្យពីរ មានសំឡេងដូចគ្នា កាលណាមនុស្សមានឈ្មោះដូចគ្នា »

ឧបមា មនុស្សបីនាក់ឈ្មោះសុក ៖ អ្នកទី១ ឈ្មោះ « សុក » អ្នកទី២ ឈ្មោះ « សុក្រ »

អ្នកទី៣ ឈ្មោះ « សុខ »

ដោយតាង xRy រឺឡាស្យុង « x មានឈ្មោះដូច y »

1/ xRx ⇔ « x មានឈ្មោះដូច x » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R រេផ្លិចស៊ីវ

2/ xRy ⇔ « x មានឈ្មោះដូច y » => « y មានឈ្មោះដូច x » ត្រូវ ៖

ដូច្នេះ R ឆ្លុះ

3/ (xRy និង yRz) ⇔ [« x មានឈ្មោះដូច y » និង « y មានឈ្មោះដូច z »]

⇨ « x មានឈ្មោះដូច z » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R ត្រង់ស៊ីទីវ

ដោយ រីឡាស្យុង R រេផ្លិចស៊ីវ ឆ្លុះ និង ត្រង់ស៊ីទីវ នោះ R ជារីឡាស្យុងសមមូល។

D/ « មនុស្សពីរនាក់មានមុខការដូចគ្នា កាលណាគេមានមុខរបរដូចគ្នា »

ហើយដោយសន្មតថា មនុស្សម្នាក់ៗ មានបុខរបរតែមួយគត់[13]

<u>ឧបមា</u> មុខរបរ ជាងឈើ វេជ្ជបណ្ឌិត គ្រូបង្រៀន

ដោយតាង xRy រីឡាស្យុង « x មានមុខរបរដូច y »

1/ xRx ⇔ « x មានមុខរបរដូច x » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R រេផ្លិចស៊ីវ

2/ xRy ⇔ « x មានមុខរបរដូច y » => « y មានមុខរបរដូច x » ត្រូវ ៖

ដូច្នេះ R ឆ្លុះ

3/ (xRy និង yRz) ⇔ [« x មានមុខរបរដូច y » និង « y មានមុខរបរដូច z »]

⇨ « x មានឈ្មោះដូច z » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R ត្រង់ស៊ីទីវ

ដោយ រីឡាស្យុង R រេផ្លិចស៊ីវ ឆ្លុះ និង ត្រង់ស៊ីទីវ នោះ R ជារីឡាស្យុងសមមូល។

E/ « សិស្សពីរនាក់មានគ្រូជាមួយគ្នា កាលណាគេមានគ្រូធំតែមួយ »

ហើយដោយសន្មតថា មនុស្សម្នាក់ៗ មានគ្រូធំតែមួយគត់

ដោយតាង xRy រីឡាស្យុង « x មានគ្រូធំជាមួយនឹង y »

1/ xRx ⇔ « x មានគ្រូធំជាមួយនឹង x » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R រេផ្លិចស៊ីវ

2/ xRy ⇔ « xមានគ្រូធំជាមួយនឹង y » => « y មានគ្រូធំជាមួយនឹងx » ត្រូវ ៖

[13] បើម្នាក់ៗ ប្រកបមុខរបរច្រើន នោះ រីឡាស្យុងអាចមិន ត្រង់ស៊ីទីវ

ដូច្នេះ R ឆ្លុះ

3/ (xRy និង yRz) ⇔ [« xមានគ្រូធំជាមួយនឹង y » និង « y មានគ្រូធំជាមួយនឹង z »]

⇒ « x មានគ្រូធំជាមួយនឹង z » ត្រូវ ៖ ដូច្នេះ R ត្រង់ស៊ីទីវ

ដោយ រីឡាស្យុង R រេផ្លិចស៊ីវ ឆ្លុះ និង ត្រង់ស៊ីទីវ នោះ R ជារីឡាស្យុងសមមូល។

សង្កេត

ថ្នាក់ សមមូល C_x គឺជា សំនុំ ដែលមានធាតុ x ជាតំណាង ហើយធាតុឯទៀតៗនៅក្នុងសំនុំនោះ សុទ្ធតែ សមមូលនឹង x ។ នៅក្នុង ឧទាហរណ៍ខាងលើនេះ គឺ ជាក្រុមសិស្សទាំងអស់ ដែលមានគ្រូធំ(ឈ្មោះលោក **ក**)ទាំងអស់គ្នា ។ តែ បើលោក **ខ** ក៏មានកូនសិស្សដែរ នោះកូនសិស្សរបស់គាត់នៅក្នុងថ្នាក់ សមមូលមួយផ្សេងទៀត ។ ដូចជានៅក្នុងសាសនា ចំពោះពុទ្ធសាសនិកជន គឺព្រះពុទ្ធជាគ្រូធំ ហើយក្នុងសាសនាអ៊ីស្លាម មានមហាម៉ាត់ ជាគ្រូធំ ។ ថ្នាក់សមមូលមួយ អ្នកកាន់ព្រះពុទ្ធសាសនា ខុសគ្នាពីថ្នាក់សមមូល អ្នក កាន់សាសនាអ៊ីស្លាម ។

បើ C_x ជាថ្នាក់សមមូល នៃ អ្នកកាន់ព្រះពុទ្ធសាសនា ហើយ បើ C_y ជាថ្នាក់សមមូល នៃអ្នកកាន់ សាសនាអ៊ីស្លាម នោះ $C_x \cap C_y = \emptyset$ ។

ចំពោះ សំណួរឯទៀត ចូររកចម្លើយដោយខ្លួនឯងចុះ ៕

==

I-2. គេឲ្យ រីឡាស្យុងទ្វិភាគ R ឆ្លុះ និង ត្រង់ស៊ីទីវ លើថ្នាក់វត្ថុមួយចំនួន ។ បើសិនជាចំពោះ វត្ថុ xមួយ មានយ៉ាងហោចណាស់វត្ថុ y មួយដែលឲ្យ រីឡាស្យុង R(x,y) ផ្ទៀងផ្ទាត់ នៅពេលនោះ រីឡាស្យុង R រ៉េផ្លិចស៊ីវ ។ [ចូរសង្កេតថា $R(x,y)$ និង $R(y,x)$ => (x,x)]

ចម្លើយ

តាមនិយមន័យ R រ៉េផ្លិចស៊ីវ ⇔ $\forall x$ នៅក្នុងថ្នាក់នៃវត្ថុ រីឡាស្យុង $R(x,x)$ ត្រូវ ។

យើងតាងដោយ E = ថ្នាក់វត្ថុ ដែលរីឡាស្យុង R កំនត់

យើងតាងដោយ x ជាតុជម្មតាមួយនៃ E ($x \in E$)

$x \in E$ => $\exists y$ ដែលឲ្យ R(x,y) (1)

ដោយ R ឆ្លុះ ដូច្នេះ R(x,y) => $R(y,x)$ (2)

ដោយ R ត្រង់ស៊ីទីវ នោះ [(1) និង (2)] <=> [R(x,y) និង $R(y,x)$] => $R(x,x)$ (3)

ដោយ x ជាជាតុមួយ ធម្មតានៃ E ដូច្នេះដោយ (3)យើងបាន ៖ $\forall x \in E,\ R(x,x)$ ត្រូវ

ដូច្នេះ R រ៉េផ្លិចស៊ីវ ៕

==

I-3. ចូរបង្ហាញថា រឺឡាស្យុងរវាងបន្ទាត់ក្នុងលំហ (dans l'espace) កំនត់ដោយ ៖
« បន្ទាត់ D និង D' នៅក្នុងប្លង់តែមួយ » មិនសមមូល ។

តែ ចូរបង្ហាញថា រឺឡាស្យុង រវាងរង្វង់ ដែលមាន កាំ មិនសូន្យ កំនត់ដោយ ៖
« C និង C' នៅក្នុងប្លង់តែមួយ » ជារឺឡាស្យុងសមមូល ។

<u>ចម្លើយ</u>

បន្ទាត់ពីរ នៅក្នុងលំហ អាចមិនកាត់គ្នា តែបន្ទាត់ពីរនៅក្នុងប្លង់ បើមិនស្របគ្នា នោះវានឹងកាត់គ្នាជានិច្ច ។ ម្យ៉ាងទៀតបន្ទាត់ពីរ ស្របគ្នា ឬ កាត់គ្នា កំនត់បានប្លង់តែមួយគត់។

a/ <u>រឺឡាស្យុង « បន្ទាត់ *D* និង *D'* នៅក្នុងប្លង់តែមួយ » មិនសមមូល</u>

ដោយតាង $D(R)D'$ រឺឡាស្យុង «D និង D' នៅក្នុងប្លង់តែមួយ » យើងអាចសរសេរ ៖

$D(R)D'$ => D និង D' នៅក្នុងប្លង់ (P1)

$D'(R)D''$ => D' និង D'' នៅក្នុងប្លង់ (P2)

យើងឃើញថា ប្លង់ (P1) និង (P2) មានបន្ទាត់ D' ដូចគ្នា ដូច្នេះ ប្លង់ទាំងពីរនេះ ប្រសព្វ និង កាត់គ្នាតាមបន្ទាត់ D' ។ ដោយ D និង D'' នៅក្នុង ប្លង់ពីរ កាត់គ្នាយ៉ាងនេះ

ជាទូទៅ D និង D'' ពុំអាចកាត់គ្នា ឬស្របគ្នាបានទេ ដូច្នេះក៏ពុំអាចនៅក្នុងប្លង់តែមួយបានដែរ ។ រួមសេចក្តីទៅ រីឡាស្យុង (R) មិនត្រង់ស៊ីទីវ ព្រោះថា

[$D(R)D'$ និង $D'(R)D''$] មិនឲ្យ $D(R)D''$ ។ ដូច្នេះ រីឡាស្យុង (R)ក៏មិនសមមូលដែរ ។

b/ រីឡាស្យុង « C និង C' នៅក្នុងប្លង់តែមួយ » សមមូល

ដោយតាង $C(R)C'$ រីឡាស្យុង «C និង C' នៅក្នុងប្លង់តែមួយ » យើងអាចសរសេរ ៖

1/ $C(R)C$ => C និង C នៅក្នុងប្លង់តែមួយ ត្រូវ ពីព្រោះថា កាលណាគេមានបី ចំនុច គេអាចកំនត់បានប្លង់មួយ ដោយច្បាស់លាស់ ហើយនៅលើរង្វង់ C មានលើសពី ៣ចំនុចទៅទៀត ។ ដូច្នេះ (R) រេផ្លិចស៊ីវ

2/ $C(R)C'$ <=> « C និង C' នៅក្នុងប្លង់តែមួយ » ដូច្នេះ ក៏ដូចជាថា

« C' និង C នៅក្នុងប្លង់តែមួយ » ៖ បានន័យថា (R) ឆ្លុះ

3/ បង្ហាញថា $(R)'$ ត្រង់ស៊ីទីវ

$C(R)C'$ => C និង C' នៅក្នុងប្លង់ (P1)

$C'(R)C''$ => C' និង C'' នៅក្នុងប្លង់ (P2)

យើងឃើញថា ប្លង់ (P1) និង (P2) ប្រសព្វគ្នា ព្រោះមាន រង្វង់ C' ជាមួយគ្នា ដូច្នេះ

(P1) = (P2) => រង្វង់ C, C', C'' នៅក្នុងប្លង់តែមួយ បានន័យថា $C(R)C''$

ដូច្នេះ (R) ត្រង់ស៊ីទីវ ។ រួមសេចក្តីទៅ (R) សមមូល ៕

===

I-4. គេឲ្យរីឡាស្យុងសមមូលពីរ R និង S ។ ចូរបង្ហាញថា រីឡាស្យុង $T(x,y)$ កំនត់ដោយ « x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S » ជារីឡាស្យុងសមមូល ។ តើ នៅតែ សមមូលទៀតទេ ចំពោះ $T'(x,y)$ កំនត់ដោយ

« x កុងគ្រុយនឹង y ម៉ូឌុយឡូ R **ឬ** ម៉ូឌុយឡូ S »? ។

ឧទាហរណ៍

r និង s សំដៅ ចំនួនគត់ ($r \in N,\ s \in N$) ហើយគេយក $R(x,y)$ គឺរឹឡាស្យុងរវាងចំនួនគត់ កំនត់ដោយ « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ » ហើយនិងចំពោះ S(x,y) កំនត់ដោយ « $|x-y|$ ចែកនឹង s ដាច់ » ។ តើនៅពេលនោះ គេអាចសម្ដែង រឹឡាស្យុង T ដូចម្ដេច ។ ហើយចូរបញ្ជាក់ថា នៅក្នុងប្រការនោះដដែល រឹឡាស្យុង T' នឹងសមមូលបានលុះណាតែ $r = s$ ។

ចម្លើយ

នៅក្នុង លេខគណិត (arihmétique) គេថាចំនួន x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R កាលណា គេចែក x ដោយ R និង y ដោយ R នោះ សេស (សំណល់) នៃការចែកទាំងពីរ ស្មើគ្នា ។ ដូច្នេះបានន័យថា៖

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R កាលណា ក្នុងវិធីចែក x និង y ដោយ R សេស$[\frac{x}{R}]$ = សេស$[\frac{y}{R}]$ ។	(F1)

បើ $x = k.R + x1$ ហើយ $y = h.R + y1$ នោះគេបាន

$x1 = y1$ ដោយ $0 \le x1 < R$ និង $0 \le y1 < R$ ។

ពីនិយមន័យនេះ យើងអាចទាញយកនូវនិយមន័យទី២ គឺ ៖

$$x = k.R + x1 \quad \text{និង} \quad y = h.R + y1 \Rightarrow x - y = (k-h)R + (x1 - y1)$$

ដោយ $x1 = y1$ ដូច្នេះ $x - y = (k-h)R$ បានន័យថា $(x-y)$ ចែកនឹង R ដាច់ ។

ដូច្នេះយើងអាចប្រើនិយមន័ទី ២ គឺ ៖

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R កាលណា $(x-y)$ ចែកនឹង R ដាច់	(F2)

ឧទាហរណ៍ ក្នុងកុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ 5 យើងឃើញថា 7 និង 17 កុងគ្រុយ គ្នា

ពីព្រោះ 7 ចែកនឹង 5 ឲ្យ សេស ស្មើនឹង 2 ហើយ 17 ចែកនឹង 5 ឲ្យ សេស ស្មើនឹង 2 ដែរ ។ ដូច្នេះ គេសរសេរ $7 \equiv 17\ [5]$ <u>មើលថា</u> 7 កុងគ្រុយនិង 17 ម៉ូឌុយឡូ 5 ។ ហើយ $(17-7)=10$ ដែលចែកនឹង 5 ដាច់ ។

ឥឡូវ ត្រឡប់មករកចម្លើយ៖

1/ $T(x,y)$ កំនត់ដោយ « x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S » ជាវីឡាស្យុង សមមូល[14]។

a/ $T(x,y)$ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ⇔ $\forall x$ នៅក្នុងថ្នាក់នៃវត្ថុ វីឡាស្យុង $T(x,x)$ ត្រូវ ។

$T(x,x)$ ត្រូវ <=> « x និង x កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S » ត្រូវ

ដោយ R សមមូល ដូច្នេះ xRx ត្រូវ ហើយ ដោយ S សមមូល ដូច្នេះ xSx ត្រូវ ដូច្នេះ « x និង x កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S » ត្រូវ ។ ដូច្នេះ $T(x,y)$ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ។

b/ $T(x,y)$ ឆ្លុះ ⇔ $T(x,y)$ ត្រូវ => $T(y,x)$ ត្រូវ ។

$T(x,y)$ ត្រូវ => « x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S »

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R => xRy ត្រូវ => yRx ត្រូវ (ពីព្រោះ R សមមូល)

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ S => xSy ត្រូវ => ySx ត្រូវ (ពីព្រោះ S សមមូល)

[yRx ត្រូវ និង ySx ត្រូវ] => $T(y,x)$ ត្រូវ

c/ $T(x,y)$ ត្រង់ស៊ីទីវ ⇔ $T(x,y)$ និង $T(y,z)$ => $T(x,z)$ ។

$T(x,y)$ ត្រូវ => « x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S »

$T(y,z)$ ត្រូវ => « y និង z កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S »

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S => xRy និង xSy (1)

[14] នៅក្នុង ការបង្ហាញនេះ ត្រូវយក x និង y ជាវត្ថុទូទៅ មិនមែនតែជា ចំនួន ក្នុង N ទេ ។

y និង z កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S => yRz និង ySz (2)

ដោយ (1) និង (2) យើងបាន៖

xRy និង yRz => xRz (ពីព្រោះ R សមមូល)

xSy និង ySz => xSz (ពីព្រោះ S សមមូល)

ដូច្នេះ យើងបាន $T(x,z) = [\, xRz$ និង $xSz\,]$

រួមសេចក្ដីទៅ $T(x,y)$ និង $T(y,z)$ => $T(x,z)$ ៖ $T(x,y)$ ត្រង់ស៊ីទីវ

__សង្កេត__

បើនៅ ក្នុង (1) និង (2) គេជំនួស ពាក្យ « និង » ដោយពាក្យ « ឬ »[15] នោះឃ្លាទាំងពីរ ទៅជា៖

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R ឬ S => xRy (1a) (ដោយខ្ញុំ យកតែ R)

y និង z កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R ឬ S => ySz (2a) (ដោយខ្ញុំ យកតែ S) ។

នៅពេលនោះយើងឃើញថា ក្នុង (1a) និង (2a) [xRy និង ySz] ពុំអាចឲ្យ xRz ទេ ដូច្នេះ $T'(x,y)$ មិនត្រង់ស៊ីទីវទេ ហើយ ក៏មិនជា សមមូលដែរ ។

2/ __ចូរសម្ដែង $T(x,y)$ នៅពេលដែល r និង s សំដៅ ចំនួនគត់ ($r \in N,\ s \in N$)__

យើងបានឃើញរួចហើយ នៅរូបមន្ត (F2) ខាងលើ ៖

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R កាលណា $(x-y)$ ចែកនឹង R ដាច់

ដូច្នេះ យើងអាចសម្ដែង

$T(x,y)$: « x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ r និង s » ទៅជា ៖

$T(x,y)$: « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ ហើយនិង ចែកនឹង s ដាច់ »

[15] តាមធម្មតា បើគេថា « a ឬ b » បានន័យថា គេយកតែ a អត់យក b ក៏បាន ឬ យកតែ b អត់យក a ក៏បាន តែគេអាចយកទាំងពីរក៏បានដែរ ។ ឥឡូវ ក្នុងការសង្កេតខាងលើនេះ ខ្ញុំសន្មតថា យកតែ a ឬ យកតែ b ពោលគឺ មិនយកទាំង ២ តែម្ដង ។

តើ យើងអាចបង្រួញបានទេ?

$|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ => $\Big\}$ => $|x-y|$ ចែកនឹង rs ដាច់ ព្រោះថា

$|x-y|$ ចែកនឹង s ដាច់ => $|x-y| = Krs = Ks(r) = Kr(s)$

ដូច្នេះ $T(x,y)$ អាចសម្តែងម្យ៉ាងទៀត ថា ៖

បើ r និង s ជាចំនួនគត់ នោះ $T(x,y)$ ជារីឡាស្យុងកំនត់ដោយ៖

« $|x-y|$ ចែកនឹង rs ដាច់ » ។

c/ <u>រីឡាស្យុង T' នឹងជា សមមូលបានលុះណាតែ $r = s$</u>

ដើមឡើយ

$T'(x,y)$: « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ ឬ ចែកនឹង s ដាច់ »

ឥឡូវនេះ ដោយ $r = s$ នោះ $T'(x,y)$ ទៅជា៖

$T'(x,y)$: « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ ឬ ចែកនឹង r ដាច់ » ដូច្នេះ

$T'(x,y)$: « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ » (3)

1/ តាមការ សង្កេត ខាងលើ ដោយ (1a) និង (2a) យើងបានឃើញហើយថា T'(x,y) មិនត្រង់ស៊ីទីវ ព្រោះ [xRy និង ySz] ពុំអាចឲ្យ xRz ទេ ។

តែបើ $r = s$ នោះ [xRy និង ySz] ទៅជា [xry និង yrz] ដែលឲ្យ xrz ពីព្រោះ r សមមូល ដូច្នេះ r ត្រង់ស៊ីទីវ ។ ដូច្នេះ $T'(x,y)$ ត្រង់ស៊ីទីវ ។

ដើម្បី ថា $T'(x,y)$ ជារីឡាស្យុងសមមូល នោះត្រូវបង្ហាញ ថា វា រ៉េផ្លិចស៊ីវ និងឆ្លុះ ថែមទៀត ។

2/ ដោយ (3) T'(x,x) ⇔ « $|x-x|$ ចែកនឹង r ដាច់ » <=> « $|0|$ ចែកនឹង r ដាច់ » ត្រូវ (ពីព្រោះ សូន្យ ចែកដាច់ជានិច្ច បើភាគបែងខុសពី សូន្យ)។ ដូច្នេះ $T'(x,y)$ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ។

3/ T'(x,y) ⇔ « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ » => « $|y-x|$ ចែកនឹង r ដាច់ » <=> T'(y,x)

ពីព្រោះ $|x-y| = |y-x|$ [16] ។ ដូច្នេះ T'(x,y) ឆ្លុះ ។

ដោយ T'(x,y) ត្រង់ស៊ីទីវ រ៉េផ្លិចស៊ីវ និង ឆ្លុះ នោះ T'(x,y) ជារីឡាស្យុងសមមូល ៕

==

I-5. គេហៅថា រីឡាស្យុងលំដាប់ស្រ៊ីគ (relation d'ordre strict) គឺរីឡាស្យុង R ទ្វិភាគ ត្រង់ស៊ីទីវ ហើយ [R(x,y) និង R(y,x)] ពុំអាចស្របគ្នាបាន។

a/ ចូរឲ្យឧទាហរណ៍ រីឡាស្យុងបែបនោះ

b/ បង្ហាញថា រីឡាស្យុង S កំនត់ដោយ S(x,y) ⇔ [R(x,y) ឬ x = y] ជារីឡាស្យុងលំដាប់ ។

<u>ចម្លើយ</u>

a/ ចំពោះសិស្សនៅក្នុងថ្នាក់រៀនណាមួយ គេកំនត់ R(x,y) ដោយ៖

R(x,y) : « x ខ្ពស់ជាង y »

ដូច្នេះ បើ R(x,y) ត្រូវ នោះ R(y,x)ពុំអាចត្រូវទេ ពីព្រោះ [R(y,x) : « y ខ្ពស់ជាង x »] ហើយ [R(x,y) : « x ខ្ពស់ជាង y »] ។

ម្យ៉ាងទៀត ៖

R(x,y) និង R(y,z) ឲ្យ « x ខ្ពស់ជាង y » និង « y ខ្ពស់ជាង z » ដូច្នេះ « x ខ្ពស់ជាង z » ត្រូវ ដូច្នេះ R(x,y) ត្រង់ស៊ីទីវ ។

b/ S(x,y) ⇔ [R(x,y) ឬ x = y] ជារីឡាស្យុងលំដាប់

1- S(x,x) ⇔ [R(x,x)ឬ x = x] ត្រូវ ពីព្រោះ x = x ត្រូវ $\forall x$ => S(x,y) រ៉េផ្លិចស៊ីវ

---

[16] យើងអាចសួរថា ហេតុអ្វីបានជាចាំបាច់ដាក់ជា តម្លៃអាប់សូលុយ (valeur absolue) $|x-y|$ ពីព្រោះ បើ (x –y) ចែកនឹង r ដាច់ (y – x) = - (x – y) ក៏ចែកនឹង r ដាច់ដែរ ។ ចម្លើយ គឺ គេចង់នៅតែក្នុងចំនួនគត់ N ដែលជាចំនួន វិជ្ជមាន ។

2- S(x,y) ⇔ [R(x,y)ឬ x = y] => ⎫ ដោយ R(x,y) ≠ R(y,x)

S(y,x) ⇔ [R(y,x) ឬ y = x] => ⎭ ដូច្នេះ S(x,y) = S(y,x) => x = y ដូច្នេះ S(x,y)

ប្រឆាំងធ្លុះ

3- S(x,y) ⇔ [R(x,y)ឬ x = y] ⎫=> ដោយ R ត្រង់ស៊ីទីវ [R(x,y) និង R(y,z)] => R(x,z)

S(y,z) ⇔ [R(y,z) ឬ y = z] ⎭ ដោយ [x = y និង y = z] => x = z ដូច្នេះ

[S(x,y) និង S(y,z)] => [R(x,z) ឬ x = z] ⇔ S(x,z) ៖ S(x,y) ត្រង់ស៊ីទីវ ។

ដូច្នេះ S(x,y) ជារីឡាស្យុងលំដាប់ ៕

==

I-6. គេឲ្យ S រីឡាស្យុងទ្វិភាគ ត្រង់ស៊ីទីវ និង រ៉េផ្លិចស៊ីវ ។

a/ ចូរបង្ហាញថា រីឡាស្យុង T(x,y) កំនត់ដោយ [S(x,y) និង S(y,x)] ជាសមមូល ។

b/ ចូរបង្ហាញថា គេ កំនត់ រីឡាស្យុងលំដាប់ (relation d'ordre) លើ ថ្នាក់សមមូល ម៉ូឌុយឡូ T ដោយតាង X‹Y កាលណាមាន តំណាង x នៃ X និង តំណាង y នៃ Y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង S(x,y) ។

[គេនឹងបង្ហាញថា តំណាង x' នីមួយៗនៃ X និង តំណាង y' នីមួយៗនៃ Y នោះ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង S(x',y')] ។

<u>ឧទាហរណ៍ នៃរីឡាស្យុងខាងលើ</u>

a/ $S(P,Q)$ ជារីឡាស្យុង រវាង ពហុធា (polynôme) មានមួយ អថេរ កំនត់ដោយ $d^\circ P \le d^\circ Q$ (ដោយ$d^\circ P$ សំដៅ ដឺក្រេនៃពហុពហុធា P) ។ នៅពេលនោះថ្នាក់សមមូល ម៉ូឌុយឡូ S អាចចំណាំដោយ ដឺក្រេ នៃពហុធាដែលជាតំណាង ។

b/ $S(f,g)$ ជារីឡាស្យុង រវាង អនុគមន៍ មាន អថេរក្នុងចំនួនពិត R កំនត់ដោយ $f(0) \le g(0)$ ។ នៅពេលនោះ ថ្នាក់សមមូល ម៉ូឌុយឡូ T អាចចំណាំដោយ តម្លៃត្រង់គល់នៃតំរុយ (identifiées valeurs à l'origine des fonctions) របស់អនុគមន៍ដែល

ជាតំណាង ។

<u>ចម្លើយ</u>

a/ <u>រឺឡាស្យុង $T(x,y)$ កំនត់ដោយ $[S(x,y)$ និង $S(y,x)]$ ជាសមមូល</u>

គេឲ្យ S រឺឡាស្យុងទ្វិភាគ ត្រង់ស៊ីទីវ និង រ៉េផ្លិចស៊ីវ

1/ $T(x,x) \Leftrightarrow S(x,x)$ និង $S(x,x)$ ។ ដោយ $S(x,x)$ ត្រូវ ពីព្រោះ គេឲ្យ S រ៉េផ្លិចស៊ីវ

ដូច្នេះ $T(x,x)$ ត្រូវ ។

2/ $T(x,y) \Leftrightarrow [S(x,y)$ និង $S(y,x)] = [S(y,x)$ និង $S(x,y)]$ [17] ត្រូវ $\Leftrightarrow T(y,x)$

ដូច្នេះ $[T(x,y) \Rightarrow T(y,x)]$ ត្រូវ

3/ $T(x,y)$ និង $T(y,z) \Leftrightarrow [S(x,y)$ និង $S(y,x)]$ និង $[S(y,z)$ និង $S(z,y)] \Leftrightarrow$

$[S(x,y)$ និង $S(y,x)$ និង $S(y,z)$ និង $S(z,y)] \Leftrightarrow$

$[S(x,y)$ និង $S(y,z)]$ និង$[S(z,y)$ និង $S(y,x)]$ (1)

ដោយ $[S(x,y)$ និង $S(y,z)] \Rightarrow S(x,z)$ ពីព្រោះ S ត្រង់ស៊ីទីវ

និង $[S(z,y)$ និង $S(y,x)] \Rightarrow S(z,x)$ ពីព្រោះ S ត្រង់ស៊ីទីវ

ហើយ ដោយ $[S(x,z)$ និង $S(z,x)] \Leftrightarrow T(x,z)$ នោះដោយ (1) យើងបាន៖

$T(x,y)$ និង $T(y,z) \Rightarrow T(x,z)$ ដែលបង្ហាញថា $T(x,y)$ ត្រង់ស៊ីទីវ ។

b/ <u>ចូរបង្ហាញថា រឺឡាស្យុង $X \prec Y$ ជារឺឡាស្យុង លំដាប់</u>

យើងបានឃើញនៅ a/ ថា $T(x,y)$ ជារឺឡាស្យុងសមមូល ដូច្នេះត្រូវមាន ថ្នាក់សមមូល ដែលនៅទីនេះ តាងដោយ X, Y, Z … ហើយនៅក្នុងថ្នាក់ទាំងនោះ x, y, z, …. ជាធាតុតំណាង ពោលគឺ x ជាធាតុតំណាងនៃ ថ្នាក់ X, y ជាធាតុតំណាងនៃ ថ្នាក់ Y, z ជាធាតុតំណាងនៃ ថ្នាក់ Z ……។ ដូច្នេះតាមនិយមន័យ ៖

$X = \left\{ t, \quad \text{ដែលឲ្យ } T(x,t) \right\}$

[17] ព្រោះថា (A និង B) = (B និង A)

$Y = \left\{ t, \quad \text{ដែលឲ្យ } T(y,t) \right\}$

$Z = \left\{ t, \quad \text{ដែលឲ្យ } T(z,t) \right\}$

ដូច្នេះ X‹Y ⇔ S(x,y) [ដោយ S រីឡាស្យុងទិ្វភាគ ត្រង់ស៊ីទីវ និង រ៉េផ្លិចស៊ីវ] (2)

1/ X‹X ⇔ S(x,x) ត្រូវ ពីព្រោះ S រ៉េផ្លិចស៊ីវ ដោយ(2)

ដូច្នេះ X‹Y រ៉េផ្លិចស៊ីវ

2/ បង្ហាញថា X‹Y ប្រឆាំងឆ្លុះ (anti-symétrique) គឺថា [X‹Y និង Y‹X] => X = Y (3)

X‹Y => $\exists x' \in X$ និង $y' \in Y$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ T(x,x'), T(y,y') និង S(x',y') ត្រូវ (4)

Y‹X => $\exists y' \in Y$ និង $x' \in X$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ T(y,y''), T(x,x') និង S(y',x') ត្រូវ (5)

(4) និង (5) => [S(x',y') និង S(y',x')] ត្រូវ

ដោយប្រើនិយមន័យ របស់ T(x,y) ៖

[S(x',y') និង S(y',x')] ⇔ T(x',y')

ដូច្នេះ T(x',y') ត្រូវ => x' និង y' កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ T => x' និង y' នៅក្នុងថ្នាក់សមមូលជាមួយគ្នា ។ ដោយ x' នៅក្នុងថ្នាក់ X ហើយ y' នៅក្នុងថ្នាក់ Y ដូច្នេះ X = Y

ដោយ (3) យើងអាចសន្និដ្ឋានថា X‹Y ប្រឆាំងឆ្លុះ (anti-symétrique) ។

3/ បង្ហាញថា ៖ X‹Y ត្រង់ស៊ីទីវ គឺថា [X‹Y និង Y‹Z] => X‹Z (6)

យើងដឹងថា S ជារីឡាស្យុងទិ្វភាគ ត្រង់ស៊ីទីវ និង រ៉េផ្លិចស៊ីវ

[X‹Y និង Y‹Z] ⇔ [S(x,y) និង S(y,z)] => S(x,z) ពីព្រោះ S ត្រង់ស៊ីទីវ ⇔ X‹Z

ដូច្នេះ (6) ៖ X‹Y ត្រង់ស៊ីទីវ ។

ដោយ 1/, 2/ និង 3/ យើងអាចសន្និដ្ឋាន ថា X‹Y ជារីឡាស្យុងលំដាប់ ។

<u>ឧទាហរណ៍ នៃរីឡាស្យុង S(P,Q)</u>

a/ S(P,Q) ⇔ $d^{\circ}P \le d^{\circ}Q$ (ដឺក្រេពហុធា P តូចឬស្មើនឹង ដឺក្រេពហុធា Q)

យើងអាចតាងដោយ ៖

C(0) : ថ្នាក់នៃពហុធា ដែលមាន ដឺក្រេយ៉ាងធំស្មើនឹងសូន្យ គឺចំនួន ថេរ ទាំងឡាយ

C(1) : ថ្នាក់នៃពហុធា ដែលមាន ដឺក្រេយ៉ាងធំស្មើនឹង 1 គឺ ពហុធាដែលមានដឺក្រេ ≤ 1

C(2) : ថ្នាក់នៃពហុធា ដែលមាន ដឺក្រេយ៉ាងធំស្មើនឹង 2 គឺ ពហុធាដែលមានដឺក្រេ ≤ 2

………………………….

b/ $S(f,g)$ ជាទំនាក់ទំនង រវាង អនុគមន៍ មាន អថេរក្នុងចំនួនពិត R កំនត់ដោយ

$f(0) \le g(0)$

ឧបមា មានអនុគមន៍ : f, g, h, ដែលមានតម្លៃត្រង់គល់ ស្មើនឹង 5, 3, 7 គឺថា

f(0) =5, g(0)=3, h(0)=7

យើងអាចតាងដោយ ៖

C(3) : ថ្នាក់នៃអនុគមន៍ ដែលមានតម្លៃត្រង់គល់យ៉ាងធំស្មើនឹង 3 = $\{ g \}$

C(5) : ថ្នាក់នៃអនុគមន៍ ដែលមានតម្លៃត្រង់គល់យ៉ាងធំស្មើនឹង 5 = $\{ g, f \}$

C(7) : ថ្នាក់នៃអនុគមន៍ ដែលមានតម្លៃត្រង់គល់យ៉ាងធំស្មើនឹង 7 = $\{ g, f, h \}$

==

I-7. គេឲ្យ ទំនាក់ទំនងលំដាប់ R និង S ។ ចូរបង្ហាញថា ទំនាក់ទំនង T កំនត់ដោយ

T(x,y) ⇔ [R(x,y) និង S(x,y)] នៅតែជា ទំនាក់ទំនងលំដាប់ ។ តើ ចំពោះ T’ កំនត់ដោយ

T’(x,y) ⇔ [R(x,y) ឬ S(x,y)] នៅតែជា ទំនាក់ទំនងលំដាប់ទេ ?

<u>ចម្លើយ</u>

ដើម្បី T ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់ នោះ T ត្រូវ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ប្រឆាំងឆ្លុះ និង ត្រង់ស៊ីទីវ

1/ T(x,x) ⇔ [R(x,x) និង S(x,x)]

ដោយ R និង S ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់ ដូច្នេះ រ៉េផ្លិចស៊ីវ => [R(x,x) និង S(x,x)] ត្រូវ

ដូច្នេះ T(x,x) ត្រូវ => T រ៉េផ្លិចស៊ីវ

2/ $T(x,y) \Leftrightarrow [\, R(x,y)$ និង $S(x,y)]$ (1)

$T(y,x) \Leftrightarrow [\, R(y,x)$ និង $S(y,x)]$ (2)

ដោយ R និង S ជារឺឡាស្យុងលំដាប់ ដូច្នេះដោយ (1) និង (2) យើងបាន ៖

$[R(x,y)$ និង $R(y,x)\,] \Rightarrow x = y$ => ដូច្នេះ

$[S(x,y)$ និង $S(y,x)\,] \Rightarrow x = y$ $[\, T(x,y)$ និង $T(y,x)\,] \Rightarrow x = y$

ដូច្នេះ T ប្រឆាំងធ្លុះ ។

3/ $T(x,y) \Leftrightarrow [\, R(x,y)$ និង $S(x,y)]$ (3)

$T(y,z) \Leftrightarrow [\, R(y,z)$ និង $S(y,z)]$ (4)

ដោយ (3) និង (4) យើងមាន $[\, R(x,y)$ និង $S(x,y)]$ និង $[\, R(y,z)$ និង $S(y,z)]$ (5)

ដោយ (5) $R(x,y)$ និង $R(y,z) \Rightarrow R(x,z)$ ពីព្រោះ R ត្រង់ស៊ីទីវ

ដោយ (5) $S(x,y)$ និង $S(y,z) \Rightarrow S(x,z)$ ពីព្រោះ S ត្រង់ស៊ីទីវ

ដូច្នេះ ដោយ (3) និង (4) យើងបាន $[R(x,z)$ និង $S(x,z)\,] \Leftrightarrow T(x,z)$

រួមសេចក្តីទៅ $[T(x,y)$ និង $T(y,z)\,] \Rightarrow T(x,z)$ ៖ T ត្រង់ស៊ីទីវ

ដូច្នេះ T ជា រឺឡាស្យុងលំដាប់ ។

<u>សង្កេត</u>

បើ $T'(x,y) \Leftrightarrow [\, R(x,y)$ ឬ $S(x,y)]$ នោះ T' មិនត្រង់ស៊ីទីវទេ ដូច្នេះក៏មិនជា រឺឡាស្យុងលំដាប់ដែរ ។ ព្រោះថា ៖

$T'(x,y) \Leftrightarrow [\, R(x,y)$ ឬ $S(x,y)]$ (6)

$T'(y,z) \Leftrightarrow [\, R(y,z)$ ឬ $S(y,z)]$ (7)

ដោយ (6) និង (7) យើងបាន $[\, R(x,y)$ ឬ $S(x,y)]$ និង $[\, R(y,z)$ ឬ $S(y,z)]$ (8)

ដោយ (8) យើងអាចយក $[\, R(x,y)\,]$ និង $[\, S(y,z)\,]$ ដែលមិនអាចឲ្យ $R(x,z)$ ឬ $S(x,z)$ ដើម្បីនឹងថា $T'(x,z)$ ៕

មាតិការ .... ទំព័រ(ក្នុងអត្ថបទ)

====================== **ចប់** =================================