I-4. គេឲ្យរីឡាស្យុងសមមូលពីរ R និង S ។ ចូរបង្ហាញថា រីឡាស្យុង $T(x,y)$ កំនត់ដោយ «x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S» ជារីឡាស្យុងសមមូល ។ តើ នៅតែ សមមូលទៀតទេ ចំពោះ $T'(x,y)$ កំនត់ដោយ

«x កុងគ្រុយនឹង y ម៉ូឌុយឡូ R **ឬ** ម៉ូឌុយឡូ S»? ។

<u>ឧទាហរណ៍</u>

r និង s សំដៅ ចំនួនគត់ ($r \in N,\ s \in N$) ហើយគេយក $R(x,y)$ គឺរីឡាស្យុងរវាងចំនួនគត់ កំនត់ដោយ « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ » ហើយនិងចំពោះ S(x,y) កំនត់ដោយ « $|x-y|$ ចែកនឹង s ដាច់ » ។ តើនៅពេលនោះ គេអាចសម្តែង រីឡាស្យុង T ដូចម្តេច ។ ហើយចូរបញ្ជាក់ថា នៅក្នុងប្រការនោះដដែល រីឡាស្យុង T’ នឹងសមមូលបានលុះណាតែ $r = s$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

នៅក្នុង <u>លេខគណិត (arihmétique)</u> គេថាចំនួន x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R កាលណា គេចែក x ដោយ R និង y ដោយ R នោះ សេស (សំណល់) នៃការចែកទាំងពីរ ស្មើគ្នា ។ ដូច្នេះបានន័យថា៖

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R កាលណា ក្នុងវិធីចែក x និង y ដោយ R សេស$[\frac{x}{R}]$ = សេស$[\frac{y}{R}]$ ។	(F1)

បើ $x = k.R + x1$ ហើយ $y = h.R + y1$ នោះគេបាន

$x1 = y1$ ដោយ $0 \le x1 < R$ និង $0 \le y1 < R$ ។

ពីនិយមន័យនេះ យើងអាចទាញយកនូវនិយមន័យទី២ គឺ៖

$$x = k.R + x1 \quad \text{និង} \quad y = h.R + y1 \Rightarrow x - y = (k-h)R + (x1 - y1)$$

ដោយ $x1 = y1$ ដូច្នេះ $x - y = (k-h)R$ បានន័យថា $(x-y)$ ចែកនឹង R ដាច់ ។

ដូច្នេះយើងអាចប្រើនិយមន័យទី ២ គឺ ៖

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R កាលណា $(x-y)$ ចែកនឹង R ដាច់

(F2)

ឧទាហរណ៍ ក្នុងកុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ 5 យើងឃើញថា 7 និង 17 កុងគ្រុយ គ្នា ពីព្រោះ 7 ចែកនឹង 5 ឲ្យ សេស ស្មើនឹង 2 ហើយ 17 ចែកនឹង 5 ឲ្យ សេស ស្មើនឹង 2 ដែរ ។ ដូច្នេះ គេសរសេរ $7 \equiv 17\ [5]$ មើលថា 7 កុងគ្រុយនិង 17 ម៉ូឌុយឡូ 5 ។ ហើយ $(17-7) = 10$ ដែលចែកនឹង 5 ដាច់ ។

ឥឡូវ ត្រឡប់មករកចម្លើយ៖

1/ $T(x,y)$ កំនត់ដោយ « x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S » ជារឺឡាស្យុង សមមូល[1]។

a/ $T(x,y)$ រ៉េផ្លិចស៊ីវ $\Leftrightarrow$ $\forall x$ នៅក្នុងថ្នាក់នៃវត្ថុ រឺឡាស្យុង $T(x,x)$ ត្រូវ ។

$T(x,x)$ ត្រូវ <=> « x និង x កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S » ត្រូវ

ដោយ R សមមូល ដូច្នេះ xRx ត្រូវ ហើយ ដោយ S សមមូល ដូច្នេះ xSx ត្រូវ

ដូច្នេះ « x និង x កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S » ត្រូវ ។ ដូច្នេះ $T(x,y)$ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ។

b/ $T(x,y)$ ឆ្លុះ $\Leftrightarrow$ $T(x,y)$ ត្រូវ => $T(y,x)$ ត្រូវ ។

$T(x,y)$ ត្រូវ => « x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S »

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R => xRy ត្រូវ => yRx ត្រូវ (ពីព្រោះ R សមមូល)

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ S => xSy ត្រូវ => ySx ត្រូវ (ពីព្រោះ S សមមូល)

[yRx ត្រូវ និង ySx ត្រូវ] => $T(y,x)$ ត្រូវ

c/ $T(x,y)$ ត្រង់ស៊ីទីវ $\Leftrightarrow$ $T(x,y)$ និង $T(y,z)$ => $T(x,z)$ ។

[1] នៅក្នុង ការបង្ហាញនេះ ត្រូវយក x និង y ជាវត្ថុទូទៅ មិនមែនតែជា ចំនួន ក្នុង N ទេ ។

$T(x,y)$ ត្រូវ => « x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S »

$T(y,z)$ ត្រូវ => « y និង z កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S »

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S => xRy និង xSy (1)

y និង z កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R និង S => yRz និង ySz (2)

ដោយ (1) និង (2) យើងបាន៖

xRy និង yRz => xRz (ពីព្រោះ R សមមូល)

xSy និង ySz => xSz (ពីព្រោះ S សមមូល)

ដូច្នេះ យើងបាន $T(x,z) = [\, xRz$ និង $xSz\,]$

រួមសេចក្តីទៅ $T(x,y)$ និង $T(y,z)$ => $T(x,z)$ ៖ $T(x,y)$ ត្រង់ស៊ីទីវ

<u>សង្កេត</u>

បើនៅ ក្នុង (1) និង (2) គេជំនួស ពាក្យ « និង » ដោយពាក្យ « ឬ »[2] នោះឃ្លាទាំងពីរ ទៅជា៖

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R ឬ S => xRy (1a) (ដោយខ្ញុំ យកតែ R)

y និង z កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R ឬ S => ySz (2a) (ដោយខ្ញុំ យកតែ S) ។

នៅពេលនោះយើងឃើញថា ក្នុង (1a) និង (2a) [xRy និង ySz] ពុំអាចឲ្យ xRz ទេ ដូច្នេះ $T'(x,y)$ មិនត្រង់ស៊ីទីវទេ ហើយ ក៏មិនជា សមមូលដែរ ។

2/ <u>ចូរសម្តែង $T(x,y)$ នៅពេលដែល r និង s សំដៅ ចំនួនគត់ ($r \in N,\ s \in N$)</u>

យើងបានឃើញរួចហើយ នៅរូបមន្ត (F2) ខាងលើ ៖

x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ R កាលណា $(x-y)$ ចែកនឹង R ដាច់

---

[2] តាមធម្មតា បើគេថា « a ឬ b » បានន័យថា គេយកតែ a អត់យក b ក៏បាន ឬ យកតែ b អត់យក a ក៏បាន តែគេអាចយកទាំងពីរក៏បានដែរ ។ ឥឡូវ ក្នុងការសង្កេតខាងលើនេះ ខ្ញុំសន្មតថា យកតែ a ឬ យកតែ b ពោលគឺ មិនយកទាំង ២ តែម្តង ។

ដូច្នេះ យើងអាចសម្តែង

$T(x,y)$: « x និង y កុងគ្រុយ ម៉ូឌុយឡូ r និង s » ទៅជា ៖

$T(x,y)$: « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ ហើយនិង ចែកនឹង s ដាច់ »

តើ យើងអាចបង្រួញបានទេ?

$|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ => => $|x-y|$ ចែកនឹង rs ដាច់ ព្រោះថា

$|x-y|$ ចែកនឹង s ដាច់ => $|x-y| = Krs = Ks(r) = Kr(s)$

ដូច្នេះ $T(x,y)$ អាចសម្តែងម្យ៉ាងទៀត ថា ៖

បើ r និង s ជាចំនួនគត់ នោះ $T(x,y)$ ជារីឡាស្យុងកំនត់ដោយ៖

« $|x-y|$ ចែកនឹង rs ដាច់ » ។

<u>c/ រីឡាស្យុង T' នឹងជា សមមូលបានលុះណាតែ $r = s$</u>

ដើមឡើយ

$T'(x,y)$: « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ ឬ ចែកនឹង s ដាច់ »

ឥឡូវនេះ ដោយ $r = s$ នោះ $T'(x,y)$ ទៅជា៖

$T'(x,y)$: « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ ឬ ចែកនឹង r ដាច់ » ដូច្នេះ

$T'(x,y)$: « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ » (3)

1/ តាមការ សង្កេត ខាងលើ ដោយ (1a) និង (2a) យើងបានឃើញហើយថា T'(x,y) មិនត្រង់ស៊ីទីវ ព្រោះ [xRy និង ySz] ពុំអាចឲ្យ xRz ទេ ។

តែបើ $r = s$ នោះ [xRy និង ySz] ទៅជា [xry និង yrz] ដែលឲ្យ xrz ពីព្រោះ r សមមូល ដូច្នេះ r ត្រង់ស៊ីទីវ ។ ដូច្នេះ $T'(x,y)$ ត្រង់ស៊ីទីវ ។

ដើម្បី ថា $T'(x,y)$ ជារីឡាស្យុងសមមូល នោះត្រូវបង្ហាញ ថា វា រ៉េផ្លិចស៊ីវ និងឆ្លុះ ថែមទៀត ។

2/ ដោយ (3) T'(x,x) ⇔ « $|x-x|$ ចែកនឹង r ដាច់ » <=> « $|0|$ ចែកនឹង r ដាច់ » ត្រូវ (ពីព្រោះ សូន្យ ចែកដាច់ជានិច្ច បើភាគបែងខុសពី សូន្យ)។ ដូច្នេះ $T'(x,y)$ រ៉េផ្លិចស៊ីវ ។

3/ T'(x,y) ⇔ « $|x-y|$ ចែកនឹង r ដាច់ » => « $|y-x|$ ចែកនឹង r ដាច់ » <=> T'(y,x) ពីព្រោះ $|x-y| = |y-x|$[3] ។ ដូច្នេះ T'(x,y) ឆ្លុះ ។

ដោយ T'(x,y) ត្រង់ស៊ីទីវ រ៉េផ្លិចស៊ីវ និង ឆ្លុះ នោះ T'(x,y) ជារឺឡាស្យុងសមមូល ៕

[3] យើងអាចសួរថា ហេតុអ្វីបានជាចាំបាច់ដាក់ជា តម្លៃអាប់សូលុយ (valeur absolue) $|x-y|$ ពីព្រោះ បើ (x –y) ចែកនឹង r ដាច់ (y – x) = - (x – y) ក៏ចែកនឹង r ដាច់ដែរ ។ ចម្លើយ គឺ គេចង់នៅតែក្នុងចំនួនគត់ N ដែលជាចំនួន វិជ្ជមាន ។