IV. ***រីឡាស្យុងទ្វិភាគ* (relation binaire) ; *សមមូលភាព* (équivalences).**

ក្នុងចំណោម រីឡាស្យុង ដែលជាទំនាក់ទំនងរវាងវត្ថុទាំងឡាយនៃទ្រឹស្តី ក្នុងគណិតសាស្ត្រ រីឡាស្យុងដែលសំខាន់ជាងគេ គឺ រីឡាស្យុងទ្វិភាគ ដែលជារីឡាស្យុងរវាងពីរវត្ថុ x និង y ។ x និង y ហៅថា តួ នៃរីឡាស្យុង ។ ក្នុងអរូបី (dans l'abstrait) រីឡាស្យុងបែបនេះ គេសរសេរ $R(x,y)$ រឺ xRy ហើយ ការប្រកែកដោយ $x\not{R}y$ អក្សរ R អាចជំនួសដោយសញ្ញាអ្វីទៀតក៏បាន ។ តែក្នុងការប្រតិបត្តិ រីឡាស្យុងទ្វិភាគមាន ប្រភេទផ្សេងៗគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ដូចជា ៖ រីឡាស្យុងរវាងចំនួនគត់កំនត់ដោយ « x ជា ពហុគុណ នៃ y» (x est multiple de y) ឬ រីឡាស្យុងរវាងបន្ទាត់ កំនត់ដោយ « x កែង នឹង y» (x est perpendiculaire à y) ដែលកត់ដោយ $x \perp y$ ហើយបើចេញពីតំបន់ គណិតសាស្ត្រ រីឡាស្យុង « x ជាកូនសិស្ស របស់ y » និង « x មានជាតិដូច y » ជារីឡាស្យុងទ្វិភាគរវាងមនុស្សលោក ឬ « x ជារបស់ y » ជារីឡាស្យុង រវាងក្រុមខ្លះនៃវត្ថុ ឬ នៃមនុស្សក្នុងផ្នែកគណិតសាស្ត្រ ក៏ដូច ក្នុងជីវិតរស់នៅសព្វថ្ងៃ ។

<u>សមភាព - ភាពស្មើ (égalité)</u>

រីឡាស្យុងទ្វិភាគមួយដែលងាយហើយសំខាន់ គឺ រីឡាស្យុងសមភាព ដែលថ្លែង ថា « x ស្មើនឹង y » ហើយដែលគេសរសេរ $x = y$ ។ ចំពោះការយល់ជាធម្មតា រីឡាស្យុងនេះ មានន័យថា x និង y ជាវត្ថុតែមួយ ។ តែចំពោះ អ្នកតក្កវិញ្ញូ (logicien) វិញ ចំពោះរីឡាស្យុង P ដែលមានតួតែមួយ គឺ $P(x)$ សមមូលនឹង $P(y)$ ឬក៏ថាដោយប្រើសញ្ញាដែលយើងធ្លាប់បានឃើញ ៖ $(x = y) \Leftrightarrow [\ (\forall P),\ P(x) \Leftrightarrow P(y)\ ]$

យើងអាចបកប្រែ និយមន័យតាមតក្កវិជ្ជា(la logique)នេះ មកជាភាសាសាមញ្ញដោយនិយាយថា ៖ វត្ថុពីរ ស្មើគ្នា កាលណា វត្ថុទាំងពីរនោះមាន កម្មសិទ្ធិ (propriétés)ដូចគ្នា

គ្រប់កម្មសិទ្ធិទាំងអស់ ។

និយមន័យបែបនេះ ស្របនឹងទម្លាប់ដែលថា ស្មើគ្នា គឺវត្ថុផ្សេងគ្នាតែមើលមិនឃើញខុសគ្នា ដូចឃើងថា ៖ ពូ « ក » មានរថយន្ត ដូច រថយន្ត ពូ « ខ » ៖ យើងដឹងថាជារថយន្ត ពីរផ្សេងពីគ្នា តែ ម៉ាកនិងសេរី ដូចគ្នា ហើយមានកម្មសិទ្ធិទាំងអស់ដូចគ្នា ។ នៅក្នុងភាសានិយាយ ឃ្លាថា « x ស្មើនឹង y », « x ដូចសុទ្ធសាធនឹង y », « x គឺ y » បង្ហាញឲ្យឃើញថា មានការមិនច្បាស់ ។ តែនៅក្នុងគណិតសាស្ត្រ ឬ តក្កវិជ្ជា ការមិនច្បាស់នេះ គ្មានទេ ។

រីឡាស្យុងវិសមភាព ដែលសរសេរ $x \neq y$ អាចថ្លែង ដោយឃ្លាណាមួយខាងក្រោមនេះ ៖

« x មិនស្មើនឹង y » « x ខុសពី y » « x ផ្សេងពី y» ។

<u>កម្មសិទ្ធិនៃរីឡាស្យុងទ្វិភាគ (Propriétés des relations binaires)</u>

ឧទាហរណ៍ ខាងលើ បង្ហាញថា តួទាំងពីរ នៃរីឡាស្យុងទ្វិភាគ មិនមានមុខងារដូចគ្នាទាំងអស់ទេ ៖

1/ គេថា រីឡាស្យុង R ឆ្លុះ (R symétrique) កាលណា $R(x,y) \Rightarrow R(y,x)$ ។ឧទាហរណ៍ ដូចជា « រីឡាស្យុងបន្ទាត់កែង » $x \perp y \Rightarrow y \perp x$ ឬក៏រីឡាស្យុង « ជាជនរួមជាតិតែមួយនឹង » ។

2/ ម្យ៉ាងទៀត រីឡាស្យុង R រេហ្វិចស៊ីវ (R réflexive) បើកាលណាចំពោះវត្ថុទាំងអស់នៃដែនកំនត់របស់រីឡាស្យុង នោះ $R(x,x)$ ត្រូវ ។ ដូចជា « x ជាពហុគុណរបស់ y » ជារីឡាស្យុងរេហ្វិចស៊ីវ ពីព្រោះថា « x ជាពហុគុណរបស់ x » នោះត្រូវ ។ តែ ចំពោះបន្ទាត់វិញរីឡាស្យុង « x កែងនឹង y » មិនរេហ្វិចស៊ីវទេ ពីព្រោះថា « x កែងនឹង x » បានន័យថា « បន្ទាត់ x កែងនឹងបន្ទាត់ x » នោះពុំត្រូវទេ តែបើថា « បន្ទាត់ x ស្របនឹងបន្ទាត់ x » នោះត្រូវ ។

3/ ជាចុងក្រោយ គេថា រីឡាស្យុង R ត្រង់ស៊ីទីវ (R transitive) បើ ៖

R(x,y) និង R(y,z) => R(x,z) ត្រូវ ។

ឧទាហរណ៍ រីឡាស្យុង « x ជាពហុគុណរបស់ y » និង « x ជាជនរួមជាតិតែមួយនឹងជន y » ជា រីឡាស្យុងត្រង់ស៊ីទីវ ។ តែ រីឡាស្យុងបន្ទាត់ « x កែងនឹង y » មិនត្រង់ស៊ីទីវទេ ។ ចំពោះ រីឡាស្យុង « ជាពហុគុណរបស់ » ៖

$$\left.\begin{array}{l} \text{xRy} \Rightarrow \text{« x ជាពហុគុណរបស់ y »} \Rightarrow \exists k,\ \text{ដែលឲ្យ } x = ky \\ \text{yRz} \Rightarrow \text{« y ជាពហុគុណរបស់ z »} \Rightarrow \exists h,\ \text{ដែលឲ្យ } y = hz \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x = k(hz) = (kh)z \\ \text{រឺ } x = mz \Leftrightarrow xRz \end{array}$$

<u>សមមូលភាព (Equivalences)</u>

គេហៅថា រីឡាស្យុងសមមូល (relation d'équivalence) គឺជា រីឡាស្យុងទ្វិភាគដែលមានកម្មសិទ្ធិ ទាំងបីតែម្តង គឺ ៖

ឆ្លុះ (symétrique)[1] រ៉េផ្លិចស៊ីវ (réflexive)[2] និង ត្រង់ស៊ីទីវ (transitive)[3] ។

ឧទាហរណ៍ រីឡាស្យុង « x ជនរួមជាតិតែមួយនឹងជន y » ជារីឡាស្យុងសមមូល បើគេសន្មតថា ពលរដ្ឋម្នាក់ ជាជនរួមជាតិតែមួយនឹងខ្លួនឯង ។ ក្នុង លេខគណិត (en arithmétique) រីឡាស្យុង « x – y ជាចំនួនគត់គូ » ជារីឡាស្យុងសមមូល[4] ។ ហើយ តក្កសមមូល(équivalence logique) A ⇔ B ជា សមមូលរវាង កម្មសិទ្ធិ និងកម្មសិទ្ធិ[5] ។ តែរីឡាស្យុង « x ជាពហុគុណរបស់ y » មិនមែនជារីឡាស្យុងសមមូលទេ ពីព្រោះ

[1] ឆ្លុះ ដូចយើងឆ្លុះកញ្ចក់ ខ្លួនយើង ហើយនិងរូបយើងក្នុងកញ្ចក់ ដូចគ្នា អាចរត់ទៅ-រត់មកបាន

[2] រ៉េផ្លិចស៊ីវ ដូចត្រឡប់ (មកម្ចាស់ដើមវិញ)

[3] ត្រង់ស៊ីទីវ ដូច ឆ្លង (ចំឡង) ពីមួយ ទៅមួយ

[4] $xRy \Leftrightarrow \exists k,\ x - y = 2k$

[5] A ⇔ B គឺ [A => B និង B => A] (1)

ដូច្នេះ 1/ A ⇔ A ត្រូវ ដោយ (1)

2/ A ⇔ B => B ⇔ A ត្រូវ ដោយ (1)

3/ A ⇔ B និង B ⇔ C => ដោយ (1) យើងបាន៖

រឺឡាស្យុងនោះ មិនច្ចុះ (xRy ≠> yRx) ។

រឺឡាស្យុងសមមូល ច្រើនតាងដោយ សញ្ញាណាមួយ ក្នុងសញ្ញាទាំងពីរ ៖ ≡ និង ~ ។ បើ រឺឡាស្យុង R(x,y) ត្រូវ គេថា៖ « x កុងគ្រុយ (congru)នឹង y ម៉ូឌុយឡូ (modulo) R » ហើយគេសរសេរ « $x \equiv y$ [R] » រឺ « $x \sim y$ [R] » ។

គេថា សមភាព (égalité) ជារឺឡាស្យុងសមមូល ពិសេស គេអាចតាងការកំនត់រឺឡាស្យុង**សមភាព**ដោយ « x = y បើកាលណា x កុងគ្រុយ (congru) នឹង y ម៉ូឌុយឡូ(modulo) **គ្រប់រឺឡាស្យុង<u>សមមូល R</u>** ទាំងអស់» គឺ ៖

$$(x = y) \Leftrightarrow ((\forall R), x \equiv y [R])$$

យើងនឹងឃើញនៅ §6 ប្រព័ន្ធរវាង សញ្ញាណ សមភាព (égalité) និង សមមូល (équivalence) តែនៅពេលនេះ យើងក៏អាចចាប់និយាយថា វត្ថុពីរ សមមូល គឺកាលណា មានកម្មសិទ្ធិ <u>មួយ</u> រួមគ្នា ហើយ វត្ថុពីរ ស្មើគ្នា គឺកាលណា មាន<u>គ្រប់</u>កម្មសិទ្ធិទាំងអស់ រួមគ្នា[6]។

[A => B និង B => A] និង [B => C និង C => B] => [A => B និង B => C] និង [C => B និង B => A]

រឺ [A => C] និង [C => A] ⇔ A ⇔ C ។

ដូច្នេះ [A ⇔ B និង B ⇔ C] => A ⇔ C ។

[6] បើវត្ថុទី១ មានកម្មសិទ្ធិអ្វី វត្ថុទី២ក៏មានកម្មសិទ្ធិនោះដែរ ។