ជំពូកទី-១

មូលដ្ឋានផ្នែកសមហេតុសមផល នៃគណិតសាស្ត្រ

(Bases logiques des mathématiques)

I. *ការសមហេតុសមផលជាដំបូង*

ទ្រឹស្តីនីមួយៗនៃគណិតសាស្ត្រ សិក្សាអំពីវត្ថុ ដែលគេបំបែកជាក្រុមៗ ដូចជា « សំនុំ » ជាក្រុម ក្នុងការសិក្សាអំពីទ្រឹស្តីតូប៉ូឡូស៊ី (topologie) *« ចំនួនគត់ » ជាក្រុមក្នុងការសិក្សាលេខគណិត* (arithmétique) *« ចំណុច បន្ទាត់ ឬ ប្លង់ » ជាក្រុម ក្នុងការសិក្សាធរណីមាត្រ* (géométrie) *ជាដើម ។*

វត្ថុទាំងនោះ អាចកំនត់ដោយទ្រឹស្តីចាស់ដែលមានរួចមកហើយក៏មាន តែក៏អាចពុំទាន់កំនត់ក៏មាន ហើយនៅពេលនោះ គេគ្រាន់តែថ្លែងនូវ កម្មសិទ្ធ (propriétés) *ខ្លះនៃវត្ថុនោះៗ កម្មសិទ្ធដើម គេហៅថា ស្វ័យស័ត្យ* (axiomes) *ដែលទុកដូចជាក្បួនច្បាប់ត្រូវប្រកាន់យកក្នុងទ្រឹស្តី ។ ការថ្លែងទាំងនោះ ច្រើនតែបានមកពីការនិកក្នុក ដោយមិនមានការពិចារណា។ កាលពីជំនាន់ដើម គេហៅស្វ័យសត្យ អ្វីដែលមើលទៅឃើញច្បាស់ថាត្រូវតែយ៉ាងហ្នឹង ហើយសល់ពីនោះគេហៅថា ឧបធារណ៍* (postulat) *។*

តែចំពោះការសមហេតុសមផលវិញនោះ ស្វ័យស័ត្យ និងឧបធារណ៍ មិនខុសគ្នាទេ ។

យើងនឹងឃើញ ដូចជា សញ្ញាណនៃចំនួនគត់ អាចកំនត់ដោយទ្រឹស្តីសំនុំ តែគេក៏អាចរាប់ជាសញ្ញាណដើមបំផុតពុំទាន់កំនត់ ដោយយកស្វ័យស័ត្យប៉េអានូ (axiome de Péano) *។ ក៏ដូចគ្នាដែរ សញ្ញាណនៃបន្ទាត់ធរណីមាត្រ* (la droite géométrique) *អាចកំនត់ដោយ សញ្ញាណនៃចំនួនគត់ តែក៏អាចថាជា សញ្ញាណដើមបំផុត ដោយយកស្វ័យស័ត្យនៃចំនួនពិត (មើល* §VI,10) *ជាលក្ខខណ្ឌ។*

ជាទូទៅ សញ្ញាណគណិតសាស្ត្រជំនាន់បូរាណទាំងអស់ អាចកំនត់ដោយសញ្ញាណសំនុំ (la notion d’ensemble) *៖ ហេតុនេះហើយបានជាថា ទ្រឹស្តីសំនុំ ដែលកើត*

នៅចុងសតវត្សទី១៩ ជាទ្រឹស្តីសំខាន់ ។ តែសម័យនេះក៏មានទ្រឹស្តីថ្មីដែលបណ្តាល ឲ្យមានកំណើតសត្វលោកផ្សេងទៀត ក្រៅពីសំនុំ ។

នៅក្នុងទ្រឹស្តី វត្ថុទាំងឡាយ អាចមានទំនាក់ទំនងនឹងគ្នា ដែលហៅថា **រីឡាស្យុង** (relations) ។ ពាក្យ « រីឡាស្យុង » នេះ ពិបាកនឹងឲ្យនិយមន័យ ៖ ជាពិសេស ស្វ័យស័ត្យ ក៏ជា រីឡាស្យុងដែរ ។

បើ (A)ជា រីឡាស្យុង ការបដិសេធនៃ (A) ក៏ជា រីឡាស្យុង ដែលតាងដោយ (non A) ។

បើ (A) និង (B)ជារីឡាស្យុង នោះ (A និង B) ហើយនិង (A ឬ B) ក៏ជារីឡាស្យុង ។

ក្នុងគណិតសាស្ត្រ គេនឹងសង្កេតឃើញថា ពាក្យ « ឬ » មិនមានន័យថា ឃ្លាតចេញពីគ្នានោះទេ ៖ ដោយថ្លែងថា (A ឬ B) នោះគេមិន បដិសេធ (A និង B) ទេ បានន័យថា នៅក្នុង (A ឬ B) ក៏មាន (A និង B) ដែរ ។ តែការសន្មតនេះ ផ្ទុយនឹងលក្ខណៈខាងក្រៅនៃការសមហេតុសមផល (la logique formelle) ។

គេថា (A) ឲ្យ (B) បើ (B)ជាវិបាកនៃ(A) ហើយគេសរសេរ A => B ; ឧទាហរណ៍ (A និង B) => (A ឬ B) ។ បើកាលណា គេមាន [A => B ផង] និង [B => A ផង] នោះ គេថា (A) និង (B) សមមូលនឹងគ្នា (les relations (A) et (B) sont équivalentes) ហើយគេសរសេរ A ⇔ B ។

វិបាកនៃស្វ័យស័ត្យ ហៅថា ទ្រឹស្តីបទ (théorème) ឬ ការស្នើ (proposition) ។ ការស្នើ នៅក្នុងទ្រឹស្តីណាមួយ ជារីឡាស្យុងត្រូវ តែក្នុងទ្រឹស្តីនោះទេ ។ ឧទាហរណ៍ « ផលបូក នៃមុំក្នុងត្រីកោណ ស្មើនឹង180 ដឺក្រេ » ជា រីឡាស្យុងមួយត្រូវ ចំពោះធរណីមាត្រអឺខ្លីតឌីយែន (la géométrie euclidienne) ហើយខុសចំពោះធរណីមាត្រ (géométrie) អេលីបទីក (elliptique) ឬ អ៊ីពែបូលីក (hyperbolique) ។

ការបង្ហាញនូវទ្រឹស្តីបទ គឺ ជាស៊ីតនៃ រីឡាស្យុងដែលស្របគ្នា មានរាងជា A => B

ហើយដើម្បីទៅដល់ រឹឡាស្យុង ដែលចង់បាន គេចាប់ផ្តើមឡើងដោយប្រើស្វ័យស័ត្យ ឬ ទ្រឹស្តីបទដែលមានរួចមកហើយ ។

រឹឡាស្យុងដែលថ្លែង ក្នុងទ្រឹស្តីបទ ក៏ជារឹឡាស្យុងស្របមួយដែរ ដែលមានរាងជា H => C រឹឡាស្យុង H ហៅថា សម្មតិកម្ម (hypothèse) ហើយ រឹឡាស្យុង C ហៅថា សេចក្តីសន្និដ្ឋាន (conclusion) ។ ទ្រឹស្តីបទច្រាស គឺ C => H ។ បើ H ⇔ C គេថា (H) ជាលក្ខខណ្ឌ ចាំបាច់ (nécessaire) និង គ្រប់គ្រាន់ (suffisante) ដើម្បី (C) ត្រូវ ។

ពាក្យថា **លែម** (lemme) គឺជា ការស្នើមួយ (proposition) ដែលគេប្រើ ក្នុងការបង្ហាញ ទ្រឹស្តីបទ ដែលសំខាន់ៗ ។ កូរ៉ូលែ(corollaire) របស់ទ្រឹស្តីបទ គឺវិបាក (conséquence) ដែលគេទាញភ្លាមពីទ្រឹស្តីបទនោះ ។ នៅក្នុងការសមហេតុសមផល ការស្នើ ទ្រឹស្តីបទ លែម និង កូរ៉ូលែ ពុំខុសគ្នាទេ ។

គេសន្មតថា ការស្នើណាក៏ដោយ សុទ្ធតែ ឬ**ត្រូវ** ឬ**ខុស** គឺថា ការស្នើនោះ មិនអាចត្រូវផង និងខុសផងនោះទេ បើមិនដូច្នេះទេ គេពុំអាចធ្វើការពិចារណាតាម ហេតុផលបានឡើយ ។

ក្នុងការសន្មតនេះទៀត គេដកចេញនូវទ្រឹស្តីដែល ផ្ទុយគ្នា ទំនាស់គ្នា គឺថាជាទ្រឹស្តីដែល នៅក្នុងនោះ រឹឡាស្យុងដូចជា (A) និង (non A) ត្រូវទាំងពីរ ឬ ខុសទាំងពីរ ។ មានទ្រឹស្តីខ្លះ គេពុំអាចបង្ហាញថាទ្រឹស្តីនោះ មិនផ្ទុយគ្នានោះទេ នេះជាចំណោទ មួយដ៏ធំក្នុងការសមហេតុសមផល ។ ដោយចំណោទនេះធ្លាប់មានរួចមកហើយ បើសិនជាថ្ងៃណាមួយចំណោទរបៀបនោះ នៅមានទៀត អ្នកគណិតសាស្ត្រ នឹងលប់ការផ្ទុយនោះ ដោយកែប្រែស្វ័យស័ត្យ តែក៏មិនឲ្យប៉ះពាល់ដល់គ្រឿងចាំបាច់ នៃសំណង់នោះ[1]ដែរ។

[1] គេអាចនឹកស្មានថា គ្រាន់តែបន្ថែម ស្វ័យស័ត្យថ្មី ដែលបន្ថយវត្ថុក្នុងក្រុម នៃទ្រឹស្តីនោះ ៖ គេបានធ្វើ បែបនេះរួចមកហើយ ចំពោះទ្រឹស្តីសំនុំ ។

យើងធ្លាប់បានប្រើរួចមកហើយ ដើម្បីបង្ហាញការស្នើ H => C គេប្រើ « របៀបបង្ហាញដោយមិនទំនង (la démonstration par absurde) » ដោយ បង្ហាញថា ទ្រឹស្តីបានមកដោយបន្ថែមក្នុង ស្វ័យស័្យត (axiomes) នូវរឹឡាស្យុង (H) និង (non C) ជាទ្រឹស្តីផ្ទុយ[2] ។

[2] ដើម្បី បង្ហាញថា A => B គេអាច យក (non B) ជាសម្មតិកម្ម ហើយដោយប្រើសម្មតិកម្មនេះ គេទៅដល់សេចក្តីសន្និដ្ឋានមួយ ដែលផ្ទុយពី A (សម្មតិកម្មដែលគេឲ្យជាដំបូង) ។ ដូច្នេះ (non B) មិនត្រូវទេ គឺបានន័យថា B ត្រូវ បើយោងទៅតាម ការសន្មត (B) និង (non B) មិនអាចខុសទាំងពីរ ឬក៏ ត្រូវទាំងពីរ ។