

លំហាត់ ទី ១៣

ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍ $y = \frac{x}{1-x^2}$ កំណត់ នូវ អូមេអូម៉ូម៉ូរ្វិស

(homéomorphisme) ពី ចន្លោះ បើក $] -1, +1 [$ ទៅលើ $\mathbb{R}$ ទាំងមូល ។

ចម្លើយ

ដោយលំហាត់ ទី ១២ ដើម្បីបង្ហាញថា អនុគមន៍ y ប៊ីសេចទីវ នោះយើង គូក្រាប ជា

មុនសិន ។ យើងឃើញថា $y = f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ កំណត់ នៅលើចន្លោះ បើក

$] -1, +1 [$ ជាប់ ហើយមានដេរីវេ $y' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0$ ហើយ ចំពោះ $x = 0 \Rightarrow$

$y = 0$ និង $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1-x^2} = -\infty$ (ពីព្រោះ $x < 0$) ហើយ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x^2} = +\infty$ ។

x	-1	0	+1
y'		1	
y	$-\infty$	0	$+\infty$

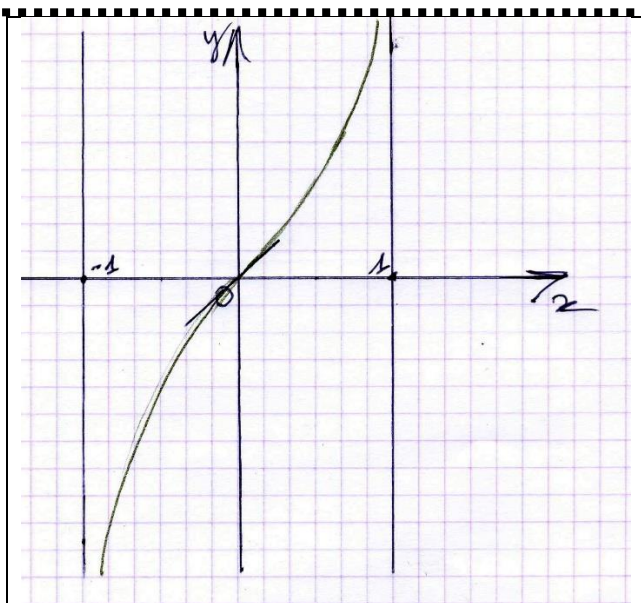
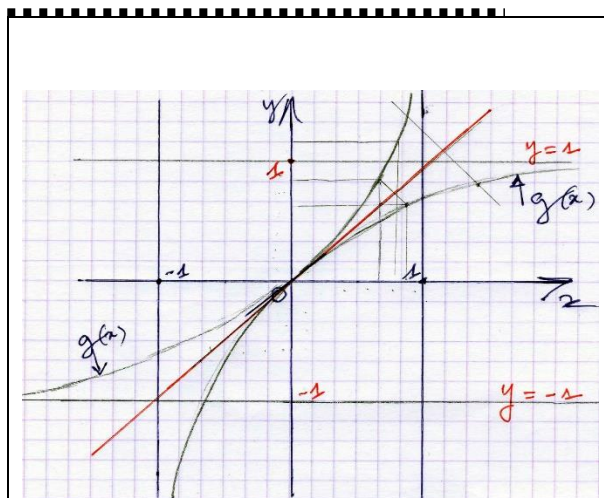


Fig - 12



ដោយក្រាបនេះ យើងឃើញថា អនុគមន៍ f កើនដោយតឹងរឹង ពីចន្លោះបើក

$] -1, +1[$ ទៅលើ សំនុំនៃចំនួនពិត $R =] -\infty, +\infty [$ ហើយជាប់នៅចន្លោះ នោះ។

ដូច្នេះ f បីសេចទីវ ហើយបើអនុគមន៍ ប្រាស g ក៏បីសេចទីវនិងជាប់ដែរ នោះ f

ជា អូមេអូម៉ូហ្វីស ។ ឥឡូវនេះយើងរក អនុគមន៍ប្រាស g កំណត់ពី R ទៅ $] -$

$1, +1[$

ដែលបំពេញ ៖ $y = f(x) \Rightarrow g(y) = f^{-1}(y) = x$ ។

ដូច្នេះ យើងត្រូវ រក x ដោយប្រើ សមីការ $y = f(x)$ ៖

$$(1) \quad y = \frac{x}{1-x^2} \Rightarrow$$

បើ $y = 0$ នោះ $x = 0$ ពីព្រោះ $-1 < x < 1$ ដូច្នេះ $1 - x^2 > 0$

បើ $y \neq 0$ ដោយ (1) យើងបាន

$yx^2 + x - y = 0$ ជា សមីការ មាន ដឺក្រេ ពីរ ហើយ x ជាចំនួនដែលត្រូវរក ។

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.y.(-y) = 1 + 4y^2 > 0$$

ដូច្នេះ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y}$ ដោយ $|x| < 1$ នោះ x មានតែមួយគឺ $x = \frac{-1 + \sqrt{1+4y^2}}{2y}$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ប្រាស g គឺ ៖

$$(2) \quad \begin{cases} g(y) = 0 & \text{បើ } y = 0 \\ g(y) = \frac{-1 + \sqrt{1+4y^2}}{2y} & \forall y \in R^* \text{ (} R^* = R - \{0\} \text{) } \end{cases}$$

ដើម្បី ថា g ជាអនុគមន៍ ជាប់ ក្នុង R ទាំងមូល នោះយើងត្រូវបង្ហាញថា g ជាប់

ត្រង់ចំណុច $y = 0$ គឺ ថា $\lim_{y \rightarrow 0^-} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = 0$ [ដោយ (2)]

$$g(y) = \frac{-1}{2y} + \frac{\sqrt{1+4y^2}}{2y} \cong \frac{-1}{2y} + \frac{\sqrt{1}}{2y} \text{ ពីព្រោះ } 4y^2 \text{ ខិតជិតសូន្យ លឿនជាង } 2y \text{ កាលណា}$$

$$y \rightarrow 0 \text{ ។ ដូច្នេះ } g(y) \cong \frac{-1}{2y} + \frac{\sqrt{1}}{2y} = \frac{-1}{2y} + \frac{1}{2y} = 0 \text{ កាលណា } y \rightarrow 0 \text{ ។ ដូច្នេះ អនុគមន៍}$$

g ជាប់ នៅក្នុងសំនុំនៃចំនួនពិត R ។ ដើម្បីបង្ហាញថា g បីសេចទីវ ត្រូវ រកដេរីវេ ។

តាម Fig - 12 ខាងលើ ក្រាប នៃ g ដែលឆ្លុះនឹងក្រាបនៃ f ធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះនោះ

មានបន្ទាត់ អាសាតូត $y = 1$ និង $y = -1$ ។

ដើម្បីគូរក្រាប ក្នុងតម្រុយ Oxy ត្រូវយក អថេរ x ដូច អនុគមន៍ $f(x)$ ដែរ។

$$\text{គឺ } g(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

សង្ខេប

ដោយក្រាបខាងលើ យើងឃើញថា $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ហើយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

លទ្ធផលនេះ បាន ដោយយើង គូរក្រាប ឆ្លុះគ្នា តាមបន្ទាត់ពុះ។ តើយើងអាចរក

លទ្ធផលនេះ បានដោយ ប្រើ កន្សោម $g(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ នេះបានទេ?

.....
ចូរ រកនូវលីមីត ទាំងពីរនេះ គឺ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ហើយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ ។ បើរកមិន

ឃើញ ត្រូវមើលឡើងវិញ នូវ និយមន័យ នៃ $|x|$ និង $\sqrt{x^2}$ ។