9- ចំណោទ ដោយមាន ចំលើយ

9-1 ចំណោទ-ទី១

ប្រធាន:ការបំបែកជាសេរីហ្វួរីយេនៃសញ្ញាអេលិចត្រូនិក។

t_0 ជាចំនួនពិតមួយ ហើយ គេមានសញ្ញាមួយដែលគំរូដោយ អនុគមន៍ f ខួប, មានខួប 2π, និងកំនត់ដោយ

$$\begin{cases} f(t) = E & \text{បើ } t \in [t_0, t_0+\pi[\\ f(t) = -E & \text{បើ } t \in [t_0+\pi, t_0+2\pi[\end{cases}$$

1°) ក្នុងតំរុយអរតូកូណាល គូរខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ f ដែលកំរិតត្រឹមតែចន្លោះ $[t_0 - 3\pi, t_0 + 3\pi]$

2°) បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ IR ។

3°) អោយ ដោយបញ្ជាក់ហេតុផលនូវការបំបែកជាសេរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍f គ្រប់ចំនុច ដែល f ជាប់

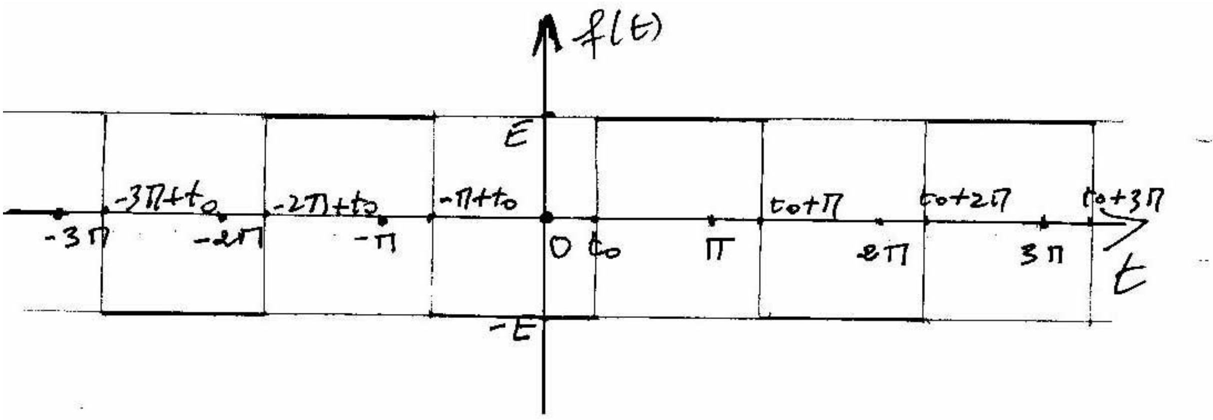
4°)

a) ចូរសង្កេតមើល ក្នុងករណីពិសេស $t_0 = 0$ និង $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ ។ តើយើងអាចដឹងមុនទេនូវលទ្ធផលនេះ

b) គូរក្រាបនៃ f ចំពោះចំនួនទាំងពីរខាងលើនៃ t_0

ចំលើយ

1°)



2°)

a). ដោយ f ជាអនុគមន៍ខួប យើងសិក្សា f លើចន្លោះប្រវែងមួយខួប $[t_0, t_0+2\pi]$ ។
នៅលើចន្លោះនេះ អនុគមន៍ f ជាប់ , មានដេរីវេជាប់ លើកលែងតែត្រង់ចំនុច $t = t_0 + \pi$ ។ ព្រោះនៅលើចន្លោះ $[t_0, t_0+\pi[$ និង$[t_0+\pi, t_0+2\pi[$, f ជាអនុគមន៍ថេរ ។

b) .

$$\lim_{\substack{t \to t_0 + \pi \\ t < t_0 + \pi}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 + \pi \\ t < t_0 + \pi}} (E) = E$$

$$\lim_{\substack{t \to t_0 + \pi \\ t > t_0 + \pi}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 + \pi \\ t > t_0 + \pi}} (-E) = -E$$

ដូច្នេះចំនួន $f(t_0+\pi-0)$ និង $f(t_0+\pi+0)$ ជាចំនួនពិតក្នុង IR ហើយស្មើនឹង E និង -E ។
ដូច្នេះ $t = t_0 + \pi$ ជាចំនុចដាច់ប្រភេទទី ១ ។

ក៏ដូចគ្នាដែរ :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 + 2\pi \\ t < t_0 + 2\pi}} f(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 + 2\pi \\ t < t_0 + 2\pi}} (-E) = -E$$

ដូច្នេះ $f(t_0+2\pi-0)$ ជាចំនួនពិតក្នុង R និងស្មើនឹង -E ។

c) អនុគមន៍ f មានដេរីវេ លើ $]t_0,t_0+\pi[$ និងលើ $]t_0+\pi, t_0+2\pi[$ ហើយ f' ជាអនុគមន៍ថេរ $(f'(t)=0)$។លីមីតខាងឆ្វេងនិងខាងស្តាំនៃអនុគមន៍ដេរីវេត្រង់ចំនុច $t_0+\pi$ និងលិមីតខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំនៃអនុគមន៍ដេរីវេ ត្រង់ចំនុច $t_0+2\pi$ មានចំនួនក្នុង R ហើយលីមីតនោះ ស្មើនឹង 0 ។

លទ្ធផល a), b), c) ខាងលើនេះ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ <u>C1 ដោយកង់ៗលើ $[t_0,t_0+2\pi]$</u> ហើយលើសពីនេះទៅទៀត f ជាអនុគមន៍ខួបមានខួបស្មើនឹង 2π ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ <u>C^1 ដោយកង់ៗលើ **R**</u> ។

3°) គណនាមេគុណហ្វួរីយេ

. គណនា a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{t_0}^{t_0+\pi} Edt + \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi}(-E)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[E\pi - E\pi\right] = 0$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

. គណនា a_n

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{t_0}^{t_0+\pi} E\cos(nt)\,dt + \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi} -E\cos(nt)dt\right]$$

$$= \frac{E}{n\pi}\left[\ [\sin(n(t_0+\pi)) - \sin(nt_0)] - [\sin(n(t_0+2\pi)) - \sin(n(t_0+\pi))]\ \right]$$

$$= \frac{E}{n\pi}\left[\ \sin(nt_0+n\pi) - \sin(nt_0) - \sin(nt_0+n2\pi) + \sin(nt_0+n\pi)\ \right]$$

ដោយ

$\sin(nt_0 + 2n\pi) = \sin(nt_0)$ និង

$\sin(nt_0 + n\pi) = (-1)^n\sin(nt_0)$, យើងបាន :

$$a_n = \frac{E}{n\pi}\left[(-1)^n \sin(nt_0) - \sin(nt_0) - \sin(nt_0) + (-1)^n \sin(nt_0)\right]$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2E}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\sin(nt_0)}$$

- បើ $n = 2p$, $(-1)^n = (-1)^{2p} = 1$, ដូច្នេះ

$$\boxed{a_{2p} = 0}$$

- បើ $n = 2p+1$, $(-1)^n = (-1)^{2p+1} = -1$, ដូច្នេះ

$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{-4E}{(2p+1)\pi}\sin[(2p+1)t_0]}$$

. <u>គណនា b_n</u>

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{t_0}^{t_0+\pi} E\sin(nt)\,dt + \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi} -E\sin(nt)dt\right]$$

ដូចកាលដែលយើងគណនា a_n , បន្ទាប់ពីគណនាយើងបាន :

- បើ $n = 2p$, $\boxed{b_{2p} = 0}$
- បើ $n = 2p + 1$,

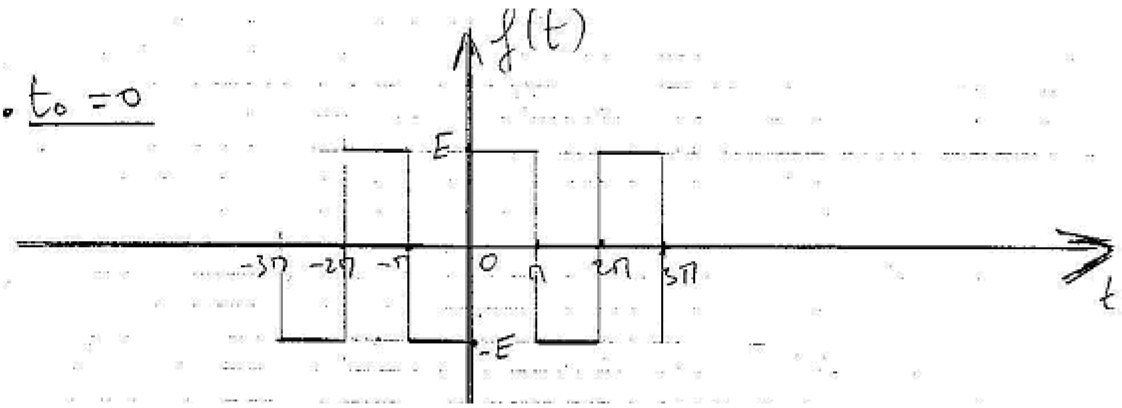
$$\boxed{b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi}\cos[(2p+1)t_0]}$$

ដោយ f នៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R ,ទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេអនុញ្ញាតអោយថា នៅត្រង់ចំនុច t ដែល f ជាប់, សេរីហ្វួរីយេនៃ f មានលីមីតទៅរក f ។ ដូច្នេះចំពោះចំនុចទាំងនោះ យើងបាន :

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left[-\frac{\sin[(2p+1)t_0]}{2p+1}\cos(2p+1)\,t + \frac{\cos[(2p+1)t_0]}{2p+1}\sin(2p+1)\,t\right]$$

4°)

<u>**ក្រាប-9-1-4-a**</u> គូរតាមនិយមន័យ



យើងសង្កេតឃើញថាចំពោះចំនួន t_0, អនុគមន៍ f ពុំមែនជាអនុគមន៍សេស ព្រោះថា : (មើលនិយមន័យ f)

$f(0) = E \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(-\pi) = -E \\ f(\pi) = -E \end{array}\right\} \Rightarrow f(-\pi) \neq -f(\pi)$$

$$\left.\begin{aligned} f(-2\pi) &= E \\ f(2\pi) &= E \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-2\pi) \neq -f(2\pi)$$

តែយើងអាចប្តូរតម្លៃខ្លះ ដែលអនុគមន៍ f យកលើចន្លោះប្រវែងមួយខួប ដើម្បីអោយ f ទៅជាអនុគមន៍សេស

<u>ឧទាហរណ៍ដូចជា</u> :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = E \quad \text{បើ } t \in [0, \pi[\\ f(\pi) = 0 \\ f(t) = -E \quad \text{បើ } t \in]\pi, 2\pi[\\ f(2\pi) = 0 \end{cases}$$

<u>សង្កេត</u> ដើម្បី f ទៅជាអនុគមន៍សេស យ៉ាងហោចណាស់ត្រូវ f(0) = 0 នេះចំពោះអនុគមន៍ធម្មតាៗ តែចំពោះអនុគមន៍ខួប f ត្រូវដូរត្រង់ ∝ ដែល f(∝) ដូរ ពីចំនួន (+E) មក ជាចំនួន (-E), ដោយយក f(∝) = 0 ។

ធ្វើរបៀបនេះ, ដោយ f ទៅជាអនុគមន៍សេស នោះសេរីហ្វូរីយេនៃ f ជាសេរី ដែលមានតែ sinus ហើយចំពោះគ្រប់ $n \in N$, $a_n = 0$ ហើយ

$b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi}\cos[(2p+1)t_0] = \frac{4E}{(2p+1)\pi}$ ព្រោះ $t_0 = 0$ ដូច្នេះ $\cos[(2p+1)t_0] = 1$

ហើយនៅគ្រប់ចំនុចដែល f ជាប់, យើងបាន

$$f(t) = f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(2p+1)t}{2p+1}$$

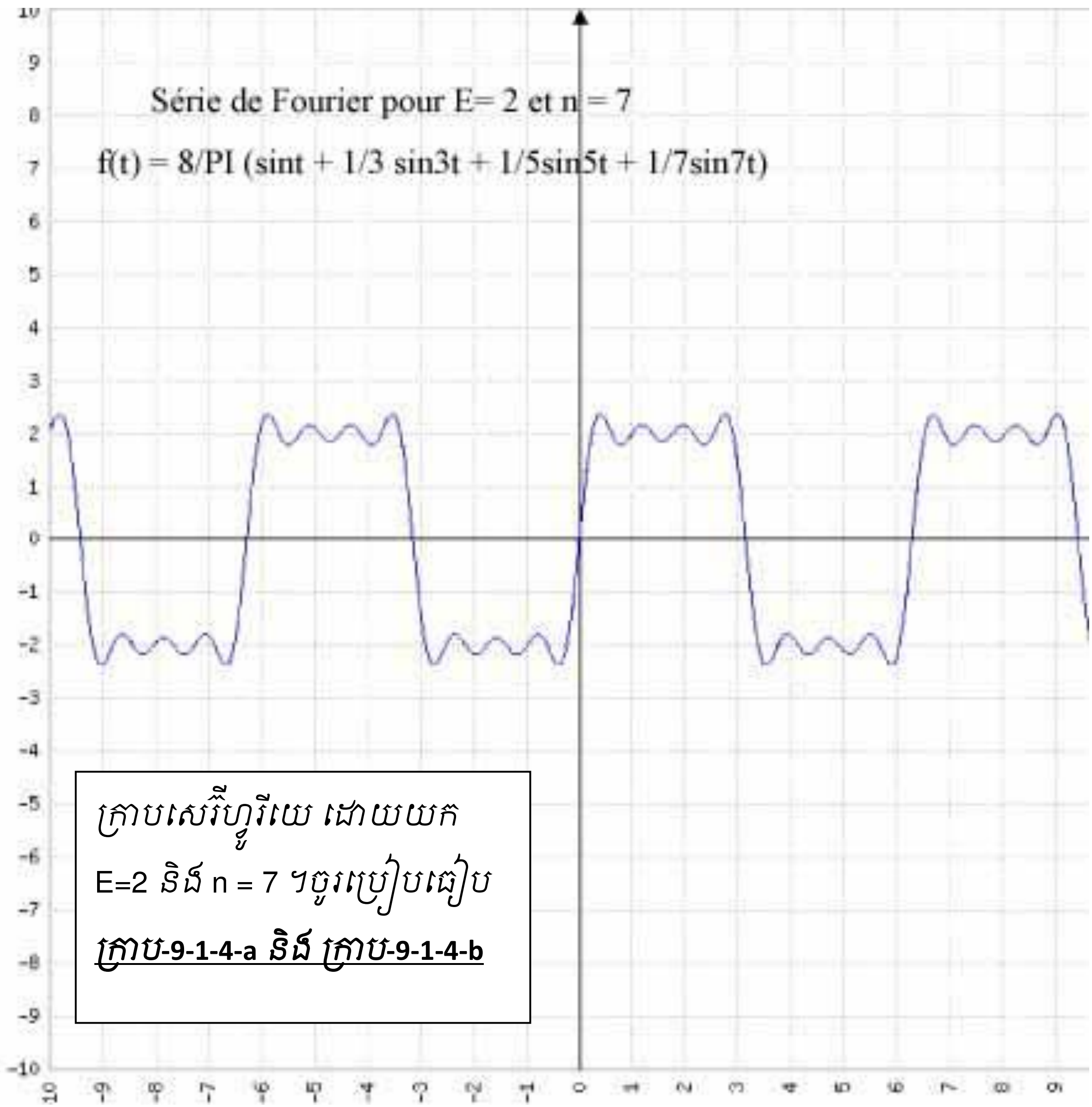
រឺ (បើសរសេរអោយពាយ)

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \ldots\ldots\right)$$

ចំពោះ E = 2, ហើយ n = 7, យើងបាន :

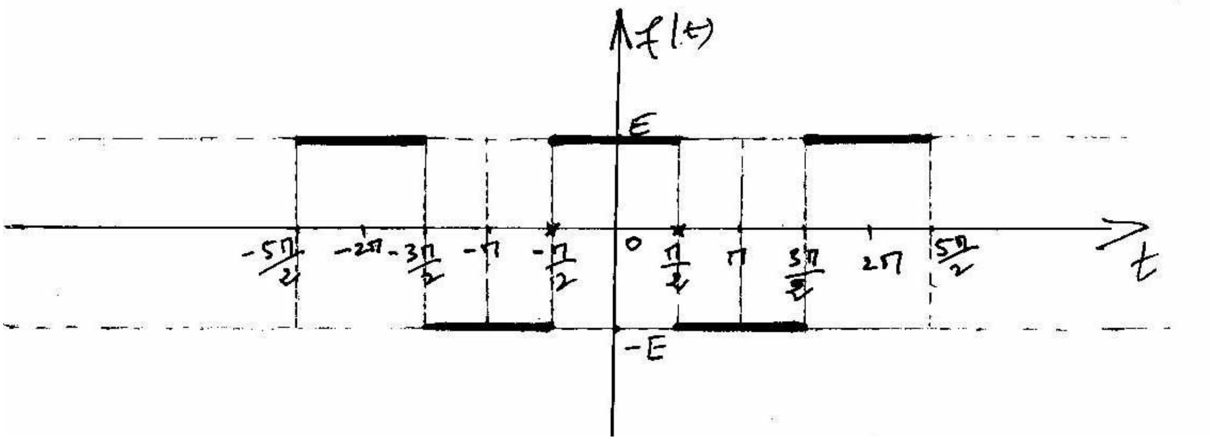
$f(t) = \frac{8}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7}\right)$ ហើយខ្សែកោងមានរាងដូចខាងក្រោមនេះ

<u>ក្រាប-**9-1-4-b**</u> គូរតាមរូបមន្តបានមកពីការបំបែកអនុគមន៍ **f** ជាសេរីហ្វូរីយេ


Série de Fourier pour E= 2 et n = 7
f(t) = 8/PI (sint + 1/3 sin3t + 1/5sin5t + 1/7sin7t)
ក្រាបសេរីហ្វួរីយេ ដោយយក
E=2 និង n = 7 ។ចូរប្រៀបធៀប
ក្រាប-9-1-4-a និង ក្រាប-9-1-4-b

. t_0 = - $\frac{\pi}{2}$

<u>ក្រាប-9-1-4-c</u>



ចំពោះ t_0 = -$\frac{\pi}{2}$ *ដោយសង្កេត ក្រាប*-9-1-4-c *យើងអាចប្តូរអនុគមន៍* f *ត្រង់ចំនុចខ្លះ ដើម្បីអោយ* f *ទៅជាអនុគមន៍គូ (ព្រោះថាចំពោះអនុគមន៍* f *គូឬសេសនោះសេរីហ្វួរីយេ អាចបង្រួញបាន)អោយតែចំនួននៃអនុគមន៍*f *ត្រង់ចំនុចដែលយើងប្តូរតំលៃនោះជា ចំនួនពិត នៅលើចន្លោះប្រវែងមួយខួប ។*

ឧបមាដូចជានៅលើចន្លោះប្រវែងមួយខួប [-π,+π] (*មើល*<u>**ក្រាប-9-1-4-c**</u>) *យើងកំនត់ អនុគមន៍* f *ដោយ* :

$$\begin{cases} f(t) = -E \quad \text{បើ} \quad t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\\ f(-\frac{\pi}{2}) = 0 \\ f(t) = E \quad \text{បើ} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ f(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ f(t) = -E \quad \text{បើ} \quad t \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

យើងឃើញមានតែត្រង់ ចំនុច - $\frac{\pi}{2}$ *និង* $\frac{\pi}{2}$ *នោះទេដែលយើងប្តូរតំលៃនៃអនុគមន៍* f *ដោយយកចំនួនពិតសូន្យ* (f (-$\frac{\pi}{2}$) = f ($\frac{\pi}{2}$) = 0), *ដូច្នេះក្នុងការគណនា* a_0 , a_n , b_n *អាំងតេក្រាលអត់មានប្តូរតំលៃទេ ។ នៅក្នុងករណីនេះ* (*គឺថា* f *អនុគមន៍គូ*) *យើងបាន* $b_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, *ហើយសេរីហ្វួរីយេ នៃអនុគមន៍* f *គឺជា សេរីដោយមានតែ***cosinus** *។ ដោយ*

$$a_{2p+1} = \frac{-4E}{(2p+1)\pi} \sin[(2p+1)t_0]$$

នោះយើងបានចំពោះ t_0 = $-\frac{\pi}{2}$

$a_{2p+1} = \frac{-4E}{(2p+1)\pi}\sin[(2p+1)(-\frac{\pi}{2})]$ (ដោយ sin (-x) = -sin (x)) ដូច្នេះ

$\sin[(2p+1)(-\frac{\pi}{2})]$ = sin [- (2p+1)($\frac{\pi}{2}$)] = - sin [(2p+1) $\frac{\pi}{2}$]

$a_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi}\sin[(2p+1)(\frac{\pi}{2})]$ = $\frac{4E}{(2p+1)\pi}(-1)^p$

$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{4E}{\pi}\frac{(-1)^p}{(2p+1)}}$$

នៅគ្រប់ចំនុច t ដែល f ជាប់ , យើងបាន

$$\boxed{f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{\cos(2p+1)t}{2p+1}}$$

រឺ

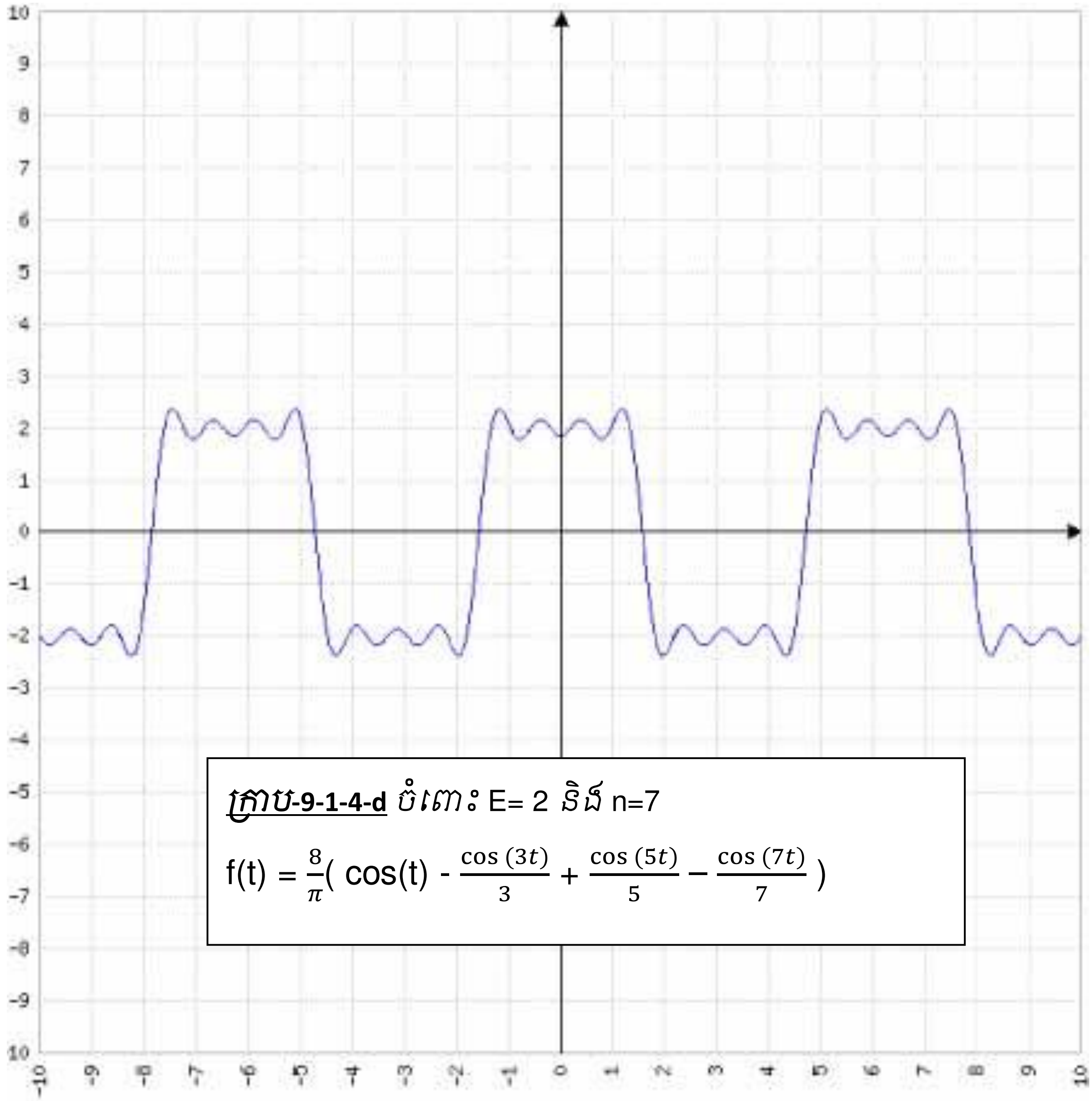
$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\cos t - \frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(5t)}{5} - \frac{\cos(7t)}{7} + \dots\dots\right)$$

ដោយយក E= 2 និង n=7 សេរីហ្វូរីយេ នៃអនុគមន៍ f គឺ

$f(t) = \frac{8}{\pi}\left(\cos(t) - \frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(5t)}{5} - \frac{\cos(7t)}{7}\right)$ ហើយ ក្រាបមានទម្រង់ដូចខាងក្រោមនេះ (ក្រាប-9-1-4-d)។

__សង្កេត__

ក្រាប-9-1-4-c ជាក្រាប អនុគមន៍ f គូរ ទៅតាម<u>និយមន័យ</u> របស់អនុគមន៍ f ចំណែក **ក្រាប-9-1-4-d** វិញ គឺ គូរដោយប្រើរូ<u>បមន្ត</u> បានមកពីសេរីហ្វូរីយេនៃអនុគមន៍ f ។ បើកាលណា គេយក n កាន់តែធំ នោះ **ក្រាប-9-1-4-d** នឹងមានទម្រង់ កាន់តែជិតដូច **ក្រាប-9-1-4-c**, $\forall t \in \mathbb{R}$ ។



ក្រាប-9-1-4-d ចំពោះ E= 2 និង n=7

$$f(t) = \frac{8}{\pi}\left(\cos(t) - \frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(5t)}{5} - \frac{\cos(7t)}{7} \right)$$

យើងបានឃើញរួចមកហើយ (មើល §8 . 6) ថាស្ពិច([1])នៃប្រេហ្វកង់ (spectre de fréquence) នៃអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ពី N ទៅ R កំនត់ដោយ :

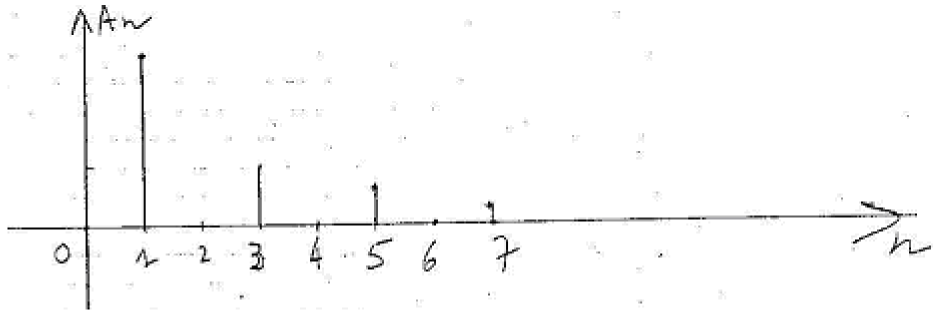
$$n \dashrightarrow A_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}$$

[1] ជាន័យធម្មតា តាមពាក្យសាមញ្ញ គឺ កាំរស្មីចម្រុះពណ៌ព្រោងព្រាតបែកចេញពីពន្លឺ ដូចជានៅពេលដែលពន្លឺនោះចាំងទៅលើត្បូងថ្មៃជាដើម។

នៅក្នុងករណីទាំងពីរ $t_0 = 0$ និង $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ យើងបាន

$$\begin{cases} A_{2p} = 0 \quad (p \epsilon N) \quad \text{និង} \\ A_{2p+1} = \frac{4E}{\pi} \cdot \frac{1}{2p+1} \end{cases}$$

(គ្រប់ អារម្មនីក នៅជួរគត់ សុទ្ធតែសូន្យ)



សង្កេត :

យើងឃើញស្ពិចខាងលើនេះ <u>នៅដដែល</u> គ្រប់តំលៃ t_0 ។ ព្រោះថាជួរ t_0 គឺជួរ <u>គល់នៃពេលវេលា</u> គឺថាយើងរំកិលសញ្ញា ដោយចំនួនមួយ τ

ហើយមេគុណហ្វូរីយេក៏ផ្លាស់ពី c_nទៅ c'_n

ដោយ $c'_n = e^{-in\tau}c_n$ (មើលចំណោទទី ២) បន្ទាប់នេះ, ហើយ

$|c'_n| = |e^{-in\tau}||c_n|$, ដោយ $|e^{-in\tau}| = 1$, នោះ

$| c'_n | = | c_n |$ ។

គឺរូបខាងលើនេះហើយ ដែលយើងឃើញនៅលើអេក្រង់ (écran)

នៃអាណាលីស៊ីស្តេច (analyseur de spectre) ។