ឧទាហរណ៍-8-5

គេអោយអនុគមន៍ខួប f, មានខួប T = 1, កំនត់ដោយ

$f(t) = e^{-t}$ ចំពោះ $t \in [0, 1[$

1°) ចូរគណនាមេគុណហ្វូរីយេកុំផ្លិចនៃ f

2°) បង្ហាញថាលើចន្លោះ]0 , 1[, អនុគមន៍ f អាចបំបែកជា សេរីហ្វូរីយេកុំផ្លិច ។ នៅលើចន្លោះដដែលនោះ ចូរអោយសេរីហ្វូរីយេ ជាចំនួនកុំផ្លិច និងអោយសេរីហ្វូរីយេជាចំនួនពិត ។

ចំលើយ

1°) $f(t) = e^{-t}$ ជាចំនួនពិត

ចំពោះ $n \in Z$, មេគុណហ្វូរីយេកុំផ្លិច គឺ

$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$ ដោយ T = 1 និង $\omega = \frac{2\pi}{T}$, នោះ

$C_n = \int_0^1 e^{-t}e^{-in2\pi t}\,dt = \int_0^1 e^{-(1+in2\pi)t}dt = \left|-\frac{e^{-(1+in2\pi)t}}{1+in2\pi}\right|_0^1$

$C_n = \frac{1}{1+in2\pi}(1 - e^{-(1+in2\pi)}) = \frac{1}{1+in2\pi}(1 - e^{-1}.e^{-in2\pi})$

$= \frac{1}{1+in2\pi}[1 - \frac{1}{e}(\cos n2\pi - i\sin n2\pi)]$

$= \frac{1}{1+in2\pi}(1 - \frac{1}{e})$ ព្រោះ $\cos n2\pi = 1$ និង $\sin n2\pi = 0$

ដូច្នេះ $\boxed{C_n = \frac{1}{1+in2\pi}(1 - \frac{1}{e})}$ $n \in Z$, **(F-8.3-d)**

2°)

a) យើងទុកអោយអ្នកអានបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R ។ ហួសពីនេះ ទៅទៀត f ជាប់លើចន្លោះ]0 , 1[ដូច្នេះតាមទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ សេរីហ្វូរីយេនៃអនុគមន៍ f ខិតជិតទៅ f លើចន្លោះ]0 , 1[ហើយយើងបាន :

f(t) $= \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+in2\pi}(1 - \frac{1}{e})e^{in2\pi t}$ ($n\in Z$) ដោយ **(F-8.3-c)**

b) យើងដឹងថា: $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $n \in \boldsymbol{N}^*$

ដូច្នេះ $\frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{1+in2\pi}(1 - \frac{1}{e})$ (ដោយ **(F-8.3-d)**)

$= \frac{1-in2\pi}{1-(in2\pi)^2}(1 - \frac{1}{e})$ (ដោយប្រើចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់)

$= \frac{1-in2\pi}{1+4\pi^2 n^2}(1 - \frac{1}{e})$

ដូច្នេះ , ចំពោះ $n \in N^*$

$a_n = \frac{2(1-\frac{1}{e})}{1+4\pi^2 n^2}$ និង $b_n = \frac{4\pi n(1-\frac{1}{e})}{1+4\pi^2 n^2}$ (ព្រោះថាចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែផ្នែកចំនួនពិតស្មើគ្នា និងផ្នែកចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា) ។

- ដោយ $a_0 = c_0$, **(F-8.3-d)** អោយចំពោះ $n = 0$ $a_0 = (1 - \frac{1}{e})$

ដូច្នេះចំពោះ $t \in]0,1[$, យើងបាន :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n\geq 1}^{+\infty}(a_n \cos(n2\pi t) + b_n \sin(n2\pi t))$$

$$= (1 - \frac{1}{e})\left[1 + \sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{2}{1+4\pi^2 n^2}(\cos(n2\pi t) + 2\pi n\sin(n2\pi t))\right]$$

$$\boxed{f(t) = (1 - \frac{1}{e})\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{1+4\pi^2 n^2}(\cos(2\pi n t) + 2\pi n\sin(2\pi n t))\right]}$$