8.3 ភាពកុំផ្លិចនៃសេរីហ្វូរីយេ

បើ f ជាអនុគមន៍ចំនួនពិត, ខួប, មានខួប T នឹងនៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើចន្លោះ ប្រវែង T, $[\alpha, \alpha + T]$ $(\alpha \in R)$, នោះតួទូទៅនៃសេរីហ្វូរីយេនៃអនុមន៍ f គឺ :

$$U_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

ដោយប្រើរូបមន្ត អឺលែ (Euler)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

យើងបាន :

$$U_n = a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}$$

$$= a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$= \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{in\omega t} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-in\omega t}$$

រឺ

$$\boxed{\mathbf{U_n} = C_n e^{in\omega t} + \overline{C_n} \cdot e^{-in\omega t}} \qquad \textbf{(F-8.3-a)}$$

ដោយយក $C_n = \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)$ និង $\overline{C_n} = \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)$

បើប្រើកន្សោមអាំងតេក្រាលនៃ a_n និង b_n , នោះ

$$C_n = \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)$$

ទៅជា :

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt - i\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt\right]$$
$$= \frac{1}{T}\left[\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\left(\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)\right)dt\right]$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, កន្សោម C_n ទៅជា

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{-in\omega t}\,dt} \qquad \textit{(F - 8.3 - b)}$$

ហើយចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $\overline{C_n}$ បានជា

$$\overline{C_n} = \overline{\frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{-in\omega t}\,dt} = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} \overline{f(t)e^{-in\omega t}dt}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{+in\omega t}dt$$ (ព្រោះ f ជាអនុគមន៍ ពិត, $\overline{f(t)} = f(t)$)

បើយើងជំនួស n ដោយ - n ក្នុងរូបមន្ត (F-8.3-b), យើងបាន :

$$C_{-n} = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{+in\omega t}\,dt$$

ដោយប្រៀបធៀបនឹង $\overline{C_n}$ យើងឃើញ $C_{-n} = \overline{C_n}$

ដោយ **(F-8.3- a)**, យើងបាន

$$U_n = C_n . e^{in\omega t} + C_{-n} . e^{-in\omega t}$$

ដោយសង្កេតថា (មើល **F-8.3-b** ចំពោះ n = 0)

$C_0 = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)dt = a_0$, ការបំបែកជាសេរីហ្វូរីយេ នៃអនុគមន៍ f បានជា :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t})$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad (n \in Z)}$$ (នេះជា ភាពកុំផ្លិចនៃ សេរីហ្វូរីយេ)

ជាសង្ខេបយើងបានលទ្ធផលដូចតទៅនេះ:

ភាពកុំផ្លិចនៃសេរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ f, យកចំនួនពិត, ខួប, មានខួប T ហើយនៅក្នុងថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R គឺ:

$\mathbf{f(t)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{c_n}\, \boldsymbol{e^{in\omega t}}$ ដោយ $C_n = \frac{1}{T}\int_{\propto}^{\propto+T} f(t)e^{-in\omega t}\,dt$ $(n\epsilon Z)$

នៅគ្រប់ចំនុច ដែល f ជាប់ ។ មេគុណកុំផ្លិច C_n

ភ្ជាប់ទៅនឹងមេគុណ**ចំនួនពិត** **(a_n និង b_n)** ដោយទំនាក់ទំនង:

$C_0 = a_0$; $C_n = \dfrac{a_n - i\, b_n}{2}$ ($n\epsilon N^*$ ហើយ $i^2 = -1$) ;

$C_{-n} = \overline{C_n}$

(F-8.3-c)