<u>ឧទាហរណ៍ 8-4</u>

គេអោយអនុគមន៍ f , ខួប , មានខួប T = 4, កំនត់ដោយ :

f(t) = 0 បើ $t \in [-2, -1[$

f(t) = 1 + t បើ $t \in [-1, 0[$

f(t) = 1 - t បើ $t \in [0, 1[$

f(t) = 0 បើ $t \in [1, 2[$

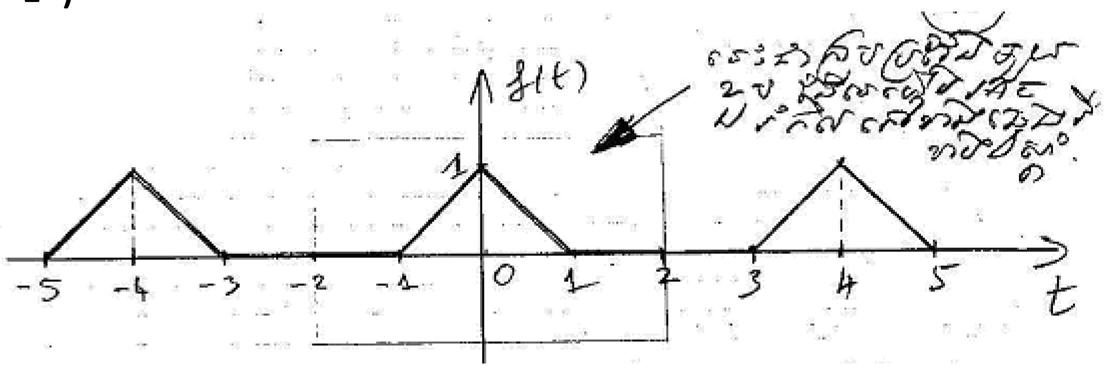
1°) ក្នុងតំរុយអ័រតូកូណាល, ចូរគូរក្រាបដំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងចន្លោះ [-5 , +5]
គេនឹងសង្កេតឃើញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍គូ

2°) គណនាមេគុណហ្វូរីយេនៃអនុគមន៍ f

3°) តើអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងលក្ខ័ណ្ឌទាំងអស់នៃទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេទេ ?
បើផ្ទៀងផ្ទាត់ ចូរអោយសេរីហ្វូរីយេនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ [-2 , +2[

<u>ចំលើយ</u> :

1°)



2°)

a) ដោយ f ជាអនុគមន៍គូ យើងបាន $b_n = 0$ $(n \in N)$

b) គណនា a_0

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}} f(t).dt$ (ព្រោះ f ជាអនុគមន៍គូ)

$= \frac{2}{4}\int_0^2 f(t)dt = \frac{2}{4}[\int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt]$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)dt$ (ព្រោះ f(t) = 0 លើចន្លោះ [1,2[ )

$= \frac{1}{2}\left|t - \frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$ => $\boxed{a_0 = \frac{1}{4}}$

គណនា a_n (n$\in N^*$)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t.dt$$

ដោយ $T = 4,\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{r} f(t)\text{ ជាអនុគមន៍គូ} \\ \text{និង } \cos n\omega t \text{ ជាអនុគមន៍គូ} \end{array}\right| \Rightarrow f(t).\cos n\omega t \text{ ជាអនុគមន៍គូ}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t).\cos n\omega t.dt \quad = \frac{4}{4}\int_0^2 f(t).\cos n\omega t.dt$$

$$= [\int_0^1 f(t).\cos n\omega t.dt \quad + \int_1^2 f(t).\cos n\omega t.dt\ ]$$

$$= \int_0^1 (1-t).\cos n\frac{\pi}{2}t.dt \quad (\text{ព្រោះ } f(t) = 0 \text{ លើចន្លោះ } [1,2[\ )$$

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

u = 1 – t => du = - dt

$\cos n\frac{\pi}{2}t.dt$ = dv => v = $\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t$ $(n\in N^*)$, ដូច្នេះ

$$a_n = \left|(1-t).\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}t.dt$$

$$= -\frac{4}{(n\pi)^2}\left|\cos\frac{n\pi}{2}t\right|_0^1 = \frac{4}{n^2}.\frac{1}{\pi^2}\ [1 - \cos\frac{n\pi}{2}]$$

-បើ n ជាចំនួនគូ $(n\neq 0)$, $n = 2p$ គេបាន

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{2p\pi}{2} = \cos(p\pi) = (-1)^p \Rightarrow$$

$$a_{2p} = \frac{4}{(2p)^2}.\frac{1}{\pi^2}\ [1 - (-1)^p\ ] = \begin{cases} 0 \quad \text{បើ } p = 2k\ (k \neq 0) \\ \frac{2}{(2k+1)^2}.\frac{1}{\pi^2} \quad (\text{បើ } p = 2k+1) \end{cases}$$

p = 2k => $a_{2p} = a_{2(2k)} = a_{4k}$ => $a_{4k} = 0$

$$\boxed{a_{4k} = 0\ ,(k \neq 0)}$$

p = 2k+1 => $a_{2p} = a_{2(2k+1)} = a_{4k+2}$ => $a_{4k+2} = \frac{2}{(2k+1)^2}.\frac{1}{\pi^2}$

$$\boxed{a_{4k+2} = \frac{2}{(2k+1)^2}.\frac{1}{\pi^2}}$$

-បើ n ជាចំនួនសេស (n ≠ 0), n = 2p+1 គេបាន

$\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{(2p+1)\pi}{2} = \cos(2p+1)\frac{\pi}{2} = 0$, ហើយ

$a_n = \frac{4}{n^2}.\frac{1}{\pi^2}\,[1 - \cos\frac{n\pi}{2}]$ ទៅជា $a_{2p+1} = \frac{4}{n^2}.\frac{1}{\pi^2} = \frac{4}{(2p+1)^2}.\frac{1}{\pi^2}$

$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2}.\frac{1}{\pi^2},\ (p \in N)}$$

3°) *យើងយកចន្លោះ [-2 , +2] ដើម្បីនឹងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ័ណឌីរីក្លេ*

a) អនុគមន៍ f កំនត់, ជាប់និងមានដេរីវេជាប់លើចន្លោះ [- 2 , + 2] ក្រៅតែពីចំនួនខ្លះ

ដូចជា : t = - 1 , t = 0 , t = 1 , t = 2

ព្រោះថា : នៅគ្រប់ចន្លោះ [-2 , - 1 [, [- 1 , 0 [, [0, 1 [និង [1 , 2 [, អនុគមន៍ f រឺមួយស្មើនឹងសូន្យ រឺមួយស្មើនឹងអនុគមន៍ពហុធា ។

b) យើងពិនិត្យមើលនូវការប្រព្រឹត្តទៅនៃអនុគមន៍ f នៅក្បែរ t = - 1

$$\lim_{\substack{t \to -1 \\ t < -1}} f(t) = \lim_{\substack{t \to -1 \\ t < -1}} 0 = 0 = f(-1-0)$$

ដូច្នេះ f (-1 - 0) ជាចំនួនមួយក្នុង R ។

ដោយ f (- 1) = 0 ដូច្នេះ f (- 1) = f (- 1 – 0)

ជាហេតុអោយ f ជាប់ត្រង់ t = - 1

ដោយប្រើរបៀបខាងលើគេអាចបង្ហាញថា f ជាប់ត្រង់ចំនុច t = 0 , t = 1 និងជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ t = 2

ជាសន្និដ្ឋាន : ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ [-2 , + 2]

c) លើចន្លោះ] - 2 , - 1 [, f′(t) = 0 ដូច្នេះ f′(-1 -0) = 0

លើចន្លោះ] - 1 , 0 [, f′(t) = 1 ដូច្នេះ f′(-1 +0) = 1 និង f′ (0 -) = 1

លើចន្លោះ] 0 , 1 [, f′ (t) = - 1 ដូច្នេះ f′ (0 +) = -1 និង f′ (1 – 0) = - 1

លើចន្លោះ] 1 , 2 [, f′ (t) = 0 ដូច្នេះ f′ (1 + 0) = 0 និង f′ (2 – 0) = 0

ដូច្នេះ $f'(-1-0)$, $f'(-1+0)$, $f'(0-)$, $f'(0+)$, $f'(1-0)$, $f'(1+0)$ និងទីបញ្ចប់ $f'(2-0)$ សុទ្ធតែជាចំនួនពិត (មិនអនន្ត) ក្នុង R ។

លទ្ធផលទាំងអស់នេះ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗ លើចន្លោះ [-2,+2] ។

ដោយហេតុថា f ជាអនុគមន៍ខួប, មាន ខួប $T = 4$, ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថ្នាក់ C^1 ដោយកង់ៗលើ R ។

តាមទ្រឹស្តីបទឌីរីក្លេ យើងដឹងថាត្រង់គ្រប់ចំនុច t ដែល f ជាប់, សេរីហ្វូរីយេនៃ f មានលីមីត ស្មើនឹង f (t).

ដោយ f ជាប់លើចន្លោះ [-2 , + 2], ចំពោះគ្រប់ចំនុច t នៃចន្លោះនេះ យើងបាន :

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(4k+2)\frac{\pi}{2}t + \frac{4}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)\frac{\pi}{2}t$$