7. 2 ឧទាហរណ៍-2

G2

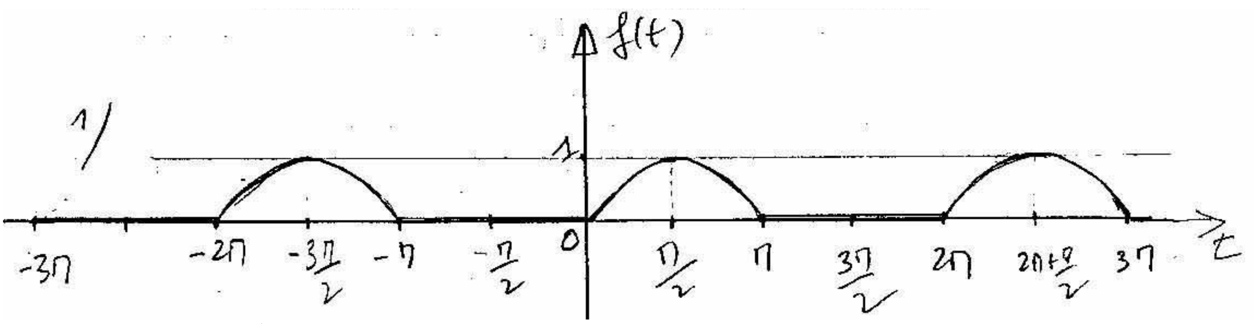
គេអោយសញ្ញាដែលគំរូដោយ អនុគមន៍ f មានខួបប្រវែង 2π, កំនត់ដោយ :

f(t) = sin(t) បើ $t \in [0, \pi[$

f(t) = 0 បើ $t \in [\pi, 2\pi[$

1) ចូរគូរនៅក្នុងតំរុយ អ័រតូកូណាល (orthogonal) ខ្សែកោងតំណាង f ក្នុងចន្លោះ $[-3\pi, +3\pi]$

2) គណនាមេគុណហ្វូរីយេ (coefficients de Fourier) នៃអនុគមន៍ f



ដូចជា ឧទាហរណ៍-1 ដែរ យើងគ្រាន់តែគូរក្រាបប្រវែងមួយខួប គឺលើចន្លោះ $[0, 2\pi[$, បន្ទាប់មកយើងរំកិលក្រាបនោះទៅខាងស្តាំ រឺ ខាងឆ្វេង (តែលើកនេះ ក្រាបពី មួយខួប ទៅ មួយខួប សុទ្ធតែជាប់គ្នារហូត មិនមែនដាច់ ដូចឧទាហរណ៍-1 នោះទេ)

2/ T = 2π, ដោយ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ នោះ $\omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).dt = \frac{1}{2\pi}[\int_0^{\pi} f(t).dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t).dt]$$

$= \frac{1}{2\pi}[\int_0^{\pi} sin(t).dt$ (ព្រោះថា f(t) = 0 នៅចន្លោះ $[\pi, 2\pi[$)

$$= \frac{1}{2\pi}.|-\cos t|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}(\cos(\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t.dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).\cos nt.dt$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi}\sin(t).\cos nt.dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0.\cos nt.dt]$$

$$= \frac{1}{\pi}.\int_0^{\pi}\sin(t).\cos nt.dt$$

$$= \frac{1}{\pi}.\int_0^{\pi}[\sin(t+nt) + \sin(t-nt)].dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}.\int_0^{\pi}[\sin(1+n)t + \sin(1-n)t].dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}.[\frac{1}{1+n}.|-\cos(1+n)t)|_0^{\pi} + \frac{1}{1-n}|-\cos(1-n)t|_0^{\pi}]$$

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+n}(\cos(1+n)\pi - \cos(0)) + \frac{1}{1-n}(\cos(1-n)\pi - \cos(0))\right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+n}(\cos(1+n)\pi - 1) + \frac{1}{1-n}(\cos(1-n)\pi - 1)\right] \qquad \textbf{(E1)}$$

-ដោយ $\cos(1+n)\pi$ អាចស្មើនឹង +1 រឺ -1 តាមចំនួន n នោះយើង គណនា a_n ទៅតាម n ជាចំនួនគត់គូ រឺ ក៏ជាចំនួន សេស

-ដោយមានតួ $\frac{1}{1-n}$ កន្សោម **(E1)** ខាងលើ មានន័យលុះត្រាតែ (1-n) $\neq 0$, គឺ n $\neq 1$

a) បើ n = 2p (n ជាចំនួនគូ) និង p ≥ 1

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+n}(\cos(1+n)\pi - 1) + \frac{1}{1-n}(\cos(1-n)\pi - 1)\right] \quad \text{ទៅជា :}$$
$$a_{2p} = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+2p}(\cos(1+2p)\pi - 1) + \frac{1}{1-2p}(\cos(1-2p)\pi - 1)\right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+2p}(-1 - 1) + \frac{1}{1-2p}(-1 - 1)\right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+2p}(-2) + \frac{1}{1-2p}(-2)\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+2p} + \frac{1}{1-2p}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{(1+2p)(1-2p)}\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{1-4p^2} \Rightarrow \boxed{a_{2p} = \frac{2}{\pi(1-4p^2)}} \quad \forall\, p \geq 1$$

b) បើ n = 2p + 1 (n ជាចំនួនសេស) និង p ≥ 1

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+n}(\cos(1+n)\pi - 1) + \frac{1}{1-n}(\cos(1-n)\pi - 1)\right] \quad \text{ទៅជា :}$$
$$a_{2p+1} = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+(2p+1)}(\cos(1+(2p+1))\pi - 1) + \frac{1}{1-(2p+1)}(\cos(1-(2p+1))\pi - 1)\right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2p+2}(\cos(2(p+1)\pi - 1) - \frac{1}{2p}(\cos(-2p)\pi - 1)\right]$$

= 0 ដោយ $\cos(2k)\pi = 1 \quad \forall\, k \in Z$ => $\boxed{a_{2p+1} = 0}$ $\forall$ p ≥ 1

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t.dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).\sin nt.dt$$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sint.\sin nt.dt$ (ដោយ f(t) = 0 នៅលើ $[\pi, 2\pi[$)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[(\cos(t-nt) - \cos(t+nt)].dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[(\cos(1-n)t - \cos(1+n)t].dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-n}.|\sin(1-n)|_0^{\pi} - \frac{1}{1+n}.|\sin(1+n)t|_0^{\pi}\right]$$

-ចំពោះ n ≠ 1

$b_n = 0$ ព្រោះ $\sin(1-n)\pi = 0$ និង $\sin(1+n)\pi = 0$ => $\boxed{b_n = 0 \text{ បើ } n \neq 1}$

-ចំពោះ n = 1

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega t.dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).\sin t.dt$$

$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \,.\, \sin t.\, dt \quad = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} sin^2\text{t.dt}$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - cos2t)\text{.dt}$ ដោយ $\sin^2\text{t} = \frac{1-\cos 2t}{2}$

$= \frac{1}{2\pi}\ [\ |t|_0^{\pi} - \frac{1}{2}.|sin2t|_0^{\pi}\ ] \ = \frac{1}{2}$ =>

$\boxed{b_1 = \frac{1}{2}}$

<u>ដោយសង្ខេបទៅ</u>

$a_0 = \frac{1}{\pi}$; $a_1 = 0$; $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_n = 0$ បើ n > 1

$a_{2p} = \frac{2}{\pi(1-4p^2)}$ (p ≥ 1) ; $a_{2p+1} = 0$ (p≥ 1)

C2

<u>ការសង្កេត</u>

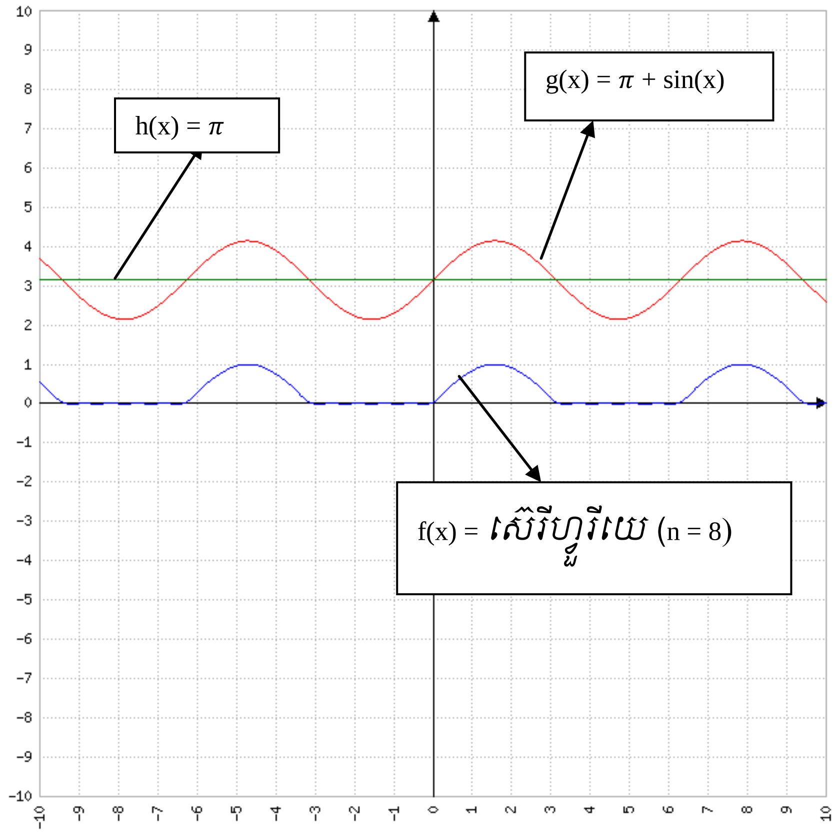
អនុគមន៍ខួប ក្នុង ឧទាហរណ៍-1 និង ឧទាហរណ៍-2 ខុសគ្នា ដោយ ក្នុង ឧទាហរណ៍-1 ខ្សែកោង G1 ដាច់ត្រង់ t = 0 និង t = 2π តែចំពោះ ខ្សែកោង G2 ក្នុង ឧទាហរណ៍-2 វិញ គឺ ជាប់រហូត ពីមួយខួបទៅមួយខួប ។ ដោយយើងមាន មេគុណ ហ្វូរីយេ យើងចង់ដឹងថាតើ ខ្សែកោង របស់អនុគមន៍បានដោយប្រើ C2 ខាងលើនេះ វាមានរាងយ៉ាងណា បើប្រៀបធៀបទៅនឹង ខ្សែកោង G2 ? យើងដឹងថា ចំពោះ ស៊េរីហ្វូរីយេ ៖

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$
$$= a_0 + a_1\cos(t) + b_1\sin(t) + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t) + a_3\cos(3t) + b_3\sin(3t) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + a_8\cos(8t) + b_8\sin(8t) + R(t).$$

(ដោយ $R(t) = \sum_{n\geq 9}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ និង ដោយ C2, នោះ

f(x) ទៅជា ៖

$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos(2x) + \frac{1}{15}\cos(4x) + \frac{1}{35}\cos(6x) + \frac{1}{63}\cos(8x)\right)$ (ដោយកំរិត n = 8)



បើប្រៀបធៀប ខ្សែកោង របស់ f(x) និង g(x) ឃើញថា ក្នុងចន្លោះ $[0, \pi]$ ខ្សែកោងទាំងពីរ មានរាងប្រហែលគ្នា ហើយខ្សែកោង របស់ f(x) ក៏ ប្រហែលនឹង ខ្សែកោង G2 ដែរ ។

Tableau de valeurs តារាងតម្លៃ អនុគមន៍ f, g, h.

x	f(x)	g(x)	h(x)		x	f(x)	g(x)	h(x)
-10	0,550	3,686	3,142		0	0,035	3,142	3,142
-9	0,002	2,729	3,142		1	0,839	3,983	3,142
-8	-0,001	2,152	3,142		2	0,912	4,051	3,142
-7	0,000	2,485	3,142		3	0,133	3,283	3,142
-6	0,270	3,421	3,142		4	-0,005	2,385	3,142
-5	0,962	4,101	3,142		5	0,004	2,183	3,142
-4	0,752	3,898	3,142		6	-0,010	2,862	3,142
-3	-0,008	3,000	3,142		7	0,657	3,799	3,142
-2	0,003	2,232	3,142		8	0,988	4,131	3,142
-1	-0,002	2,300	3,142		9	0,415	3,554	3,142
0	0,035	3,142	3,142		10	0,006	2,598	3,142