7 - ឧទាហរណ៍

7.1 ឧទាហរណ៍-1

គេឲ្យអនុគមន៍ f មានខួប $T = 2\pi$, កំនត់ដោយ

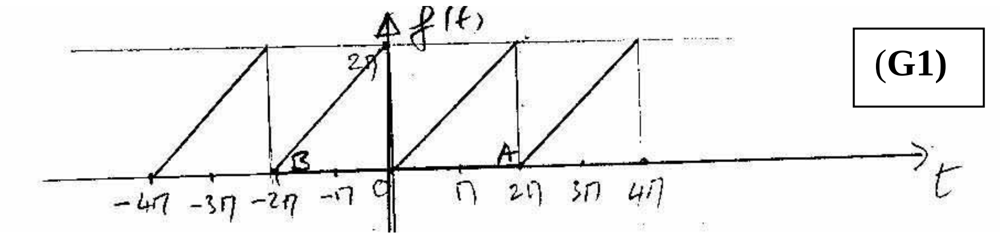
$f(t) = t$ បើ $t \in [0, 2\pi[$

ក) នៅក្នុងតំរុយ អរតូកូណាល $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ចូរគូរខ្សែកោងតំណាង អនុគមន៍ f ដោយកំរិតតែ ក្នុងចន្លោះ $[-4\pi, +4\pi]$

ខ) ចូររកមេគុណ ហ្វូរីយេ a_0 , a_n , b_n ។

ក)



(G1)

សង្កេត

ដោយ f ជាអនុគមន៍ខួប ហើយមួយខួប T ប្រវែង 2π
នោះយើងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f តែមួយខួប

គឺលើចន្លោះ $[0, 2\pi]$, បន្ទាប់មកយើងគ្រាន់តែរំកិលក្រាបនោះទៅខាងស្តាំ
ស្មើនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$

ដើម្បីនឹងបានក្រាបលើចន្លោះ $[2\pi, 4\pi]$ ហើយនឹងរំកិលទៅខាងឆ្វេងស្មើនឹង វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OB}$
ដើម្បីនឹងបានក្រាបលើចន្លោះ $[-2\pi, 0]$, ដល់បានក្រាបនៅក្នុងចន្លោះ $[-2\pi, 0]$
យើងរំកិលក្រាបនោះបន្តទៅទៀត ដើម្បីបានក្រាបក្នុងចន្លោះ $[-4\pi, -2\pi]$.

ខ) ដោយ f មិនមែនជាអនុគមន៍គូ រឺ សេស នោះយើងប្រើរូបមន្ត **(7)** នៃ §5 ដើម្បីរក
a_0 , a_n និង b_n ។

$T = 2\pi$, ដោយ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ នោះ $\omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t.dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(2\pi)^2}{2} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t.dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} t.\cos nt.dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t.\cos nt.dt$$

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក , យើងដាក់ :

u = t => du = dt

dv = $\cos nt.dt$ => v = $\frac{1}{n}\sin nt$, ដូច្នេះ a_n ទៅជា :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left|t.\frac{1}{n}\sin nt\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin nt.dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\pi\frac{1}{n}\sin n2\pi + \frac{1}{n^2}\left|\cos nt\right|_0^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}(\cos n2\pi - \cos 0)\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t).\sin n\omega t.dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} t.\sin nt.dt$$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t.\sin nt.dt$, ដោយប្រើអាំងតេក្រាល ដោយផ្នែក :

u = t => du = dt

dv = $\sin nt.dt$ => v = $-\frac{1}{n}\cos nt$, b_n ទៅជា :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left|t.\frac{-1}{n}\cos nt\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{-1}{n}\cos nt.dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left|t.\frac{-1}{n}\cos nt\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\left|\frac{1}{n}\sin nt\right|_0^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\pi\left(\frac{-1}{n}\right)\cos n2\pi + \frac{1}{n^2}\sin n2\pi\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2\pi}{n}\right] = -\frac{2}{n}$$

<u>ជាសង្ខេបទៅ</u>: $a_0 = \pi$ ហើយ a_n=0, $b_n = -\frac{2}{n}$, $\forall n \geq 1$

ដូច្នេះ

f(t) = $a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t)$ ទៅជា

t = $\pi - \sum_{n\geq 1}\frac{2}{n}\sin nt$

$$\boxed{t = \pi - 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin nt \text{ , បើសិនជាសេរីហ្វួរីយេមាន ។}} \quad \textbf{(E1)}$$

ការសង្កេត

រូបមន្ត **(E1)** បង្ហាញថា អនុគមន៍ f(t) = t និង g(t) = π - 2 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin nt$, ស្មើគ្នា ដូច្នេះ ខ្សែកោង នៃអនុគមន៍ទាំងពីរក៏ត្រូវដូចគ្នាដែរ ។ តែដោយ g(t) បានមកពីការ បំបែកជាសេរីហ្វួរីយេ ហើយ ស្មើនិង f(t) កាលណា n ទៅជិត +∞ យើងគ្រាន់តែមើល ទម្រង់ខ្សែកោងរបស់ g(t) នេះ ប្រៀបនិង ខ្សែកោង របស់ f(t) ចំពោះ ចំនួនខ្លះរបស់ n ទុកដូចជាការប្រៀបធៀបតទៅនេះ៖

g(t) = $\boldsymbol{\pi - 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin(nt)}$

ក/ <u>បើកំរិត n = 1</u>, គេសរសេរ g(t) = $\pi - 2\,[\,1/1.\sin(t) + \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\sin(nt)]$

$= \pi - 2\sin(t) + (-2\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\sin(nt))$

= g1(t) + R1(t) , ដោយ

<u>g1(t) = π - 2sint</u> និង R1(t) = $-2\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\sin(nt)$ (R1(t) គឺផ្នែកសំណល់របស់ g(t))

ខ/ <u>បើកំរិត n = 2</u>, គេសរសេរ g(t) = $\pi - 2\,[\,1/1.\sin(t) + ½.\sin(2t) + \sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}\sin(nt)]$

= g2(t) + R2(t) , ដោយ

<u>g2(t) = π - 2[sin(t) + ½.sin (2t)]</u> និង R2(t) = $-2\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}\sin(nt)$ (ជាផ្នែកសំណល់របស់ g(t))

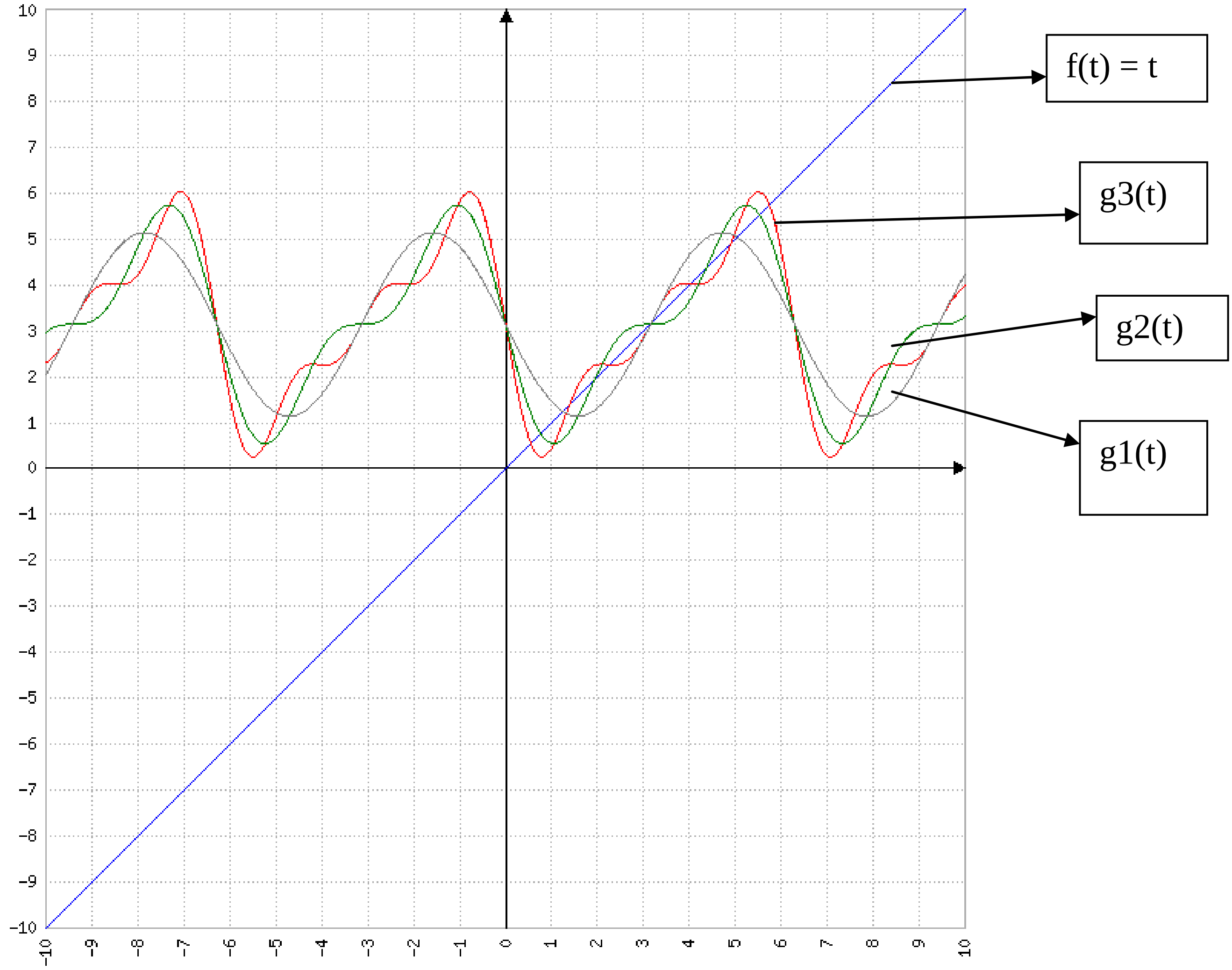
គ/ <u>បើកំរិត n = 3</u>, គេសរសេរ

g(t) = $\pi - 2\,[\,1/1.\text{Sin}(t) + ½.\sin(2t) + 1/3.\sin(3t) + \sum_{n\geq 4}\frac{1}{n}\sin(nt)]$

= g3(t) + R3(t) , ដោយ <u>g3(t) = $\pi - 2[\sin(t) + (1/2)\sin(2t) + (1/3)\sin(3t)]$</u> និង

R3(t) = $-\sum_{n\geq 4}\frac{1}{n}\sin(nt)$ (គឺផ្នែកសំណល់របស់ g(t))

យើងដឹងហើយថា f ជាអនុគមន៍មានខួប T= 2π, កំនត់ដោយ f(t) = t បើ t $\in [0,2\pi[$ ដូច្នេះយើងផ្ទួង ខ្សែកោងរបស់ f និង g តែក្នុងប្រវែង មួយ ខួបៗ ដូចខាងក្រោមនេះ ៖



យើងសង្កេតឃើញថា កាលណា n កាន់តែធំ កំពូល (អប្បបរមា)ខ្សែកោង កាន់តែខិតជិត គល់ O នៃតំរុយ (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) ព្រោះថា f(0) = 0 ដូច្នេះ g(0) ក៏ត្រូវខិតទៅជិត សូន្យ ដែរ កាលណា n ខិតជិតអនន្ត ។ ម្យ៉ាងទៀត ខ្សែកោង g(t) ក៏នឹងមានទម្រង់កាន់តែដូច ខ្សែបន្ទាត់របស់ f(t)= t ។

ខាងក្រោមនេះ ជាខ្សែកោង របស់ g(t) ដោយ n = 17

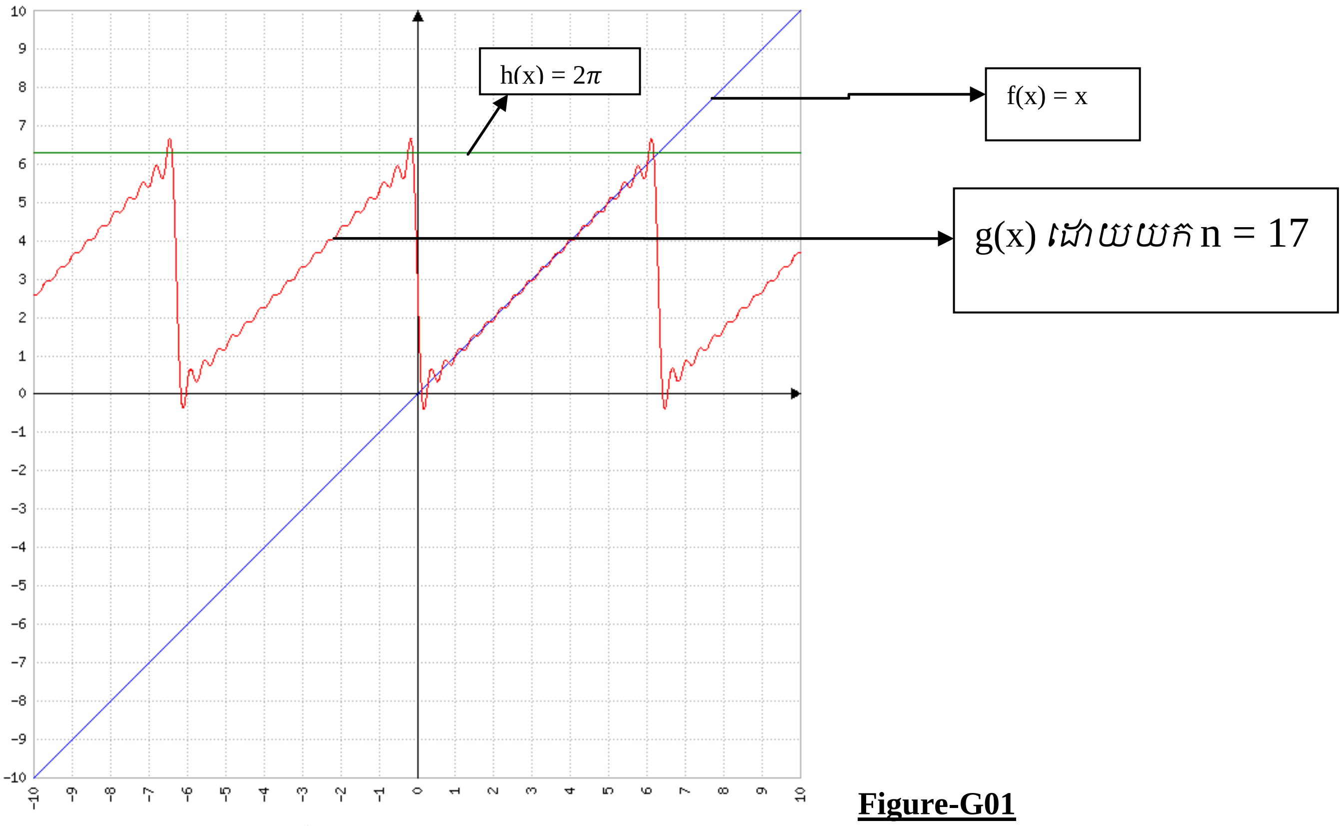


Figure-G01

តារាងតម្លៃនៃអនុគមន៍ : $f(x) = x$,

$g(x) = \pi - 2[\sin(x) + 1/2 .\sin(2x) + 1/3.\sin(3x) + \ldots.+1/17.\sin(17x)]$ (n = 17)

$h(x) = 2\pi$

Tableau des valeurs des trois fonctions f, g, h des courbes de Figure-G01								
X	f(x)	g(x)	h(x)		x	f(x)	g(x)	h(x)
-10	-10,000	2,602	6,283		0	0,000	3,142	6,283
-9	-9,000	3,620	6,283		1	1,000	1,020	6,283
-8	-8,000	4,553	6,283		2	2,000	1,938	6,283
-7	-7,000	5,406	6,283		3	3,000	2,965	6,283
-6	-6,000	0,308	6,283		4	4,000	4,039	6,283
-5	-5,000	1,197	6,283		5	5,000	5,087	6,283
-4	-4,000	2,244	6,283		6	6,000	5,975	6,283
-3	-3,000	3,318	6,283		7	7,000	0,878	6,283
-2	-2,000	4,345	6,283		8	8,000	1,730	6,283
-1	-1,000	5,263	6,283		9	9,000	2,663	6,283
	0,000	3,142	6,283		10	10,000	3,681	6,283

សង្កេត

ដោយតារាងនេះ យើងឃើញថា $f(0) = 0$ តែ $g(0) = 3,142$ ហេតុអ្វីបានជា $f(0)$ និង $g(0)$ មានតម្លៃខុសគ្នាច្រើនម្ល៉េះ ហើយបែរជាមានតម្លៃជិតគ្នាវិញ កាលណា $x \neq 0$? នេះមកពី f ជា អនុគមន៍លោត ត្រង់ $x = 0$ (ចូរកុំភ្លេចថា f ជាអនុគមន៍ខួប មួយខួប $= [0, 2\pi[$)។